应用数学和力学，第10卷第3期（1989年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

功的互等定理和线弹性变分原理*

付宝连

（燕山大学，1986年11月27日收到）

摘　要

本文从功的互等定理系统地导出了线弹性变分原理并且给出了边界条件变化的混合变分原理．

一、引　言

文章[1]从功的互等定理导出了Castigliano定理．参照[1]的方法，我们系统地导出了经典线弹性变分原理和边界条件变化的变分原理并且给出了边界条件变化的混合变分原理．[3]已表明，边界条件变化的混合变分原理更具有实际意义．

二、功的互等定理和最小势能原理及最小余能原理

我们假设，第一状态是真实状态．对于该状态，在V内有$\bar{X},\cdots$；$u,\cdots$，在S_σ上有$\bar{X}_\nu,\cdots$；$u,\cdots$和在S_u上有$X_\nu,\cdots$；$\bar{u},\cdots$．

我们约定，本文中所谓的第一状态专指前述状态而言．

在本节，我们假设第二状态为：在V内有$\bar{X},\cdots$；$u+\delta u,\cdots$，在S_σ上有$\bar{X}_\nu,\cdots$；$u+\delta u,\cdots$和在S_u上有$X_\nu+\delta X_\nu,\cdots$；$\bar{u},\cdots$．

由于我们只考虑线弹性体，故U既表示势能又表示余能．

对于第一状态，根据Craperon原理，我们有

$$2U=\iiint_V(\bar{X}u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu u+\cdots)dS+\iint_{S_u}(X_\nu\bar{u}+\cdots)dS \tag{2.1}$$

而对于本节的第二状态我们有

$$2(U+\delta U)=\iiint_V[\bar{X}(u+\delta u)+\cdots]dV+\iint_{S_\sigma}[\bar{X}_\nu(u+\delta u)+\cdots]dS+\iint_{S_u}[(X_\nu+\delta X_\nu)\bar{u}+\cdots]dS \tag{2.2}$$

在第一状态和本节的第二状态之间应用功的互等定理，我们得到

---

* 钱伟长推荐．

$$\iiint_V [\bar{X}(u+\delta u)+\cdots]dV+\iint_{S_\sigma}[\bar{X}_\nu(u+\delta u)+\cdots]dS$$

$$+\iint_{S_u}(X_\nu\bar{u}+\cdots)dS=\iiint_V(\bar{X}u+\cdots)dV$$

$$+\iiint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu u+\cdots)dS+\iint_{S_u}[(X_\nu+\delta X_\nu)\bar{u}+\cdots]dS \tag{2.3}$$

式（2.3）中的左端项可以写成形式

$$2U+\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS$$

而其中的右端项为

$$2(U+\delta U)-\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV-\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS$$

将前二者代入（2.3）中，我们得到

$$\delta U=\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS \tag{2.4}$$

这就是最小势能原理。

直接简化式（2.3），我们有

$$\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS$$

$$=\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS \tag{2.5}$$

将（2.5）代入（2.4），我们得到

$$\delta U=\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS \tag{2.6}$$

这就是最小余能原理。

最小势能原理与最小余能原理之所以同时可从功的互等定理导出，乃由于第一状态与第二状态都是真实状态所致。

三、功的互等定理与边界条件变化的变分原理

（一）位移边界条件变化的变分原理

我们将首先考虑位移边界条件的变化。位移分量被给出在 S_u 上的变分为 $\delta\bar{u},\cdots$，而体力和在 S_σ 上的表面力保持不变。于是，我们有：在V内有$\bar{X},\cdots$；$u+\delta u,\cdots$，在 S_σ 上有 $\bar{X}_\nu,\cdots$；$u+\delta u,\cdots$和在 S_u 上有$X_\nu,\cdots$；$\bar{u}+\delta\bar{u},\cdots$并且我们称这一状态为本节的第二状态。在第一状态和本节的第二状态之间应用功的互等定理，我们有

$$\iiint_V[\bar{X}(u+\delta u)+\cdots]dV+\iint_{S_\sigma}[\bar{X}_\nu(u+\delta u)+\cdots]dS$$

$$+\iint_{S_u}[X_\nu(\bar{u}+\delta\bar{u})+\cdots]dS=\iiint_V(\bar{X}u+\cdots)dV$$

$$+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu u+\cdots)dS+\iint_{S_u}(X_\nu\bar{u}+\cdots)dS \tag{3.1}$$

我们可把（3.1）的左端项写成形式

$$2U+\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS+\iint_{S_u}(X_\nu\delta\bar{u}+\cdots)dS$$

而它的右端项为

$$2(U+\delta U)-\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV-\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS-\iint_{S_u}(X_\nu\delta\bar{u}+\cdots)dS$$

并且将它们二者代入（3.1）中，我们得到

$$\delta U=\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS+\iint_{S_u}(X_\nu\delta\bar{u}+\cdots)dS \tag{3.2}$$

这就是[2]中位移边界条件变化的势能原理。

同时我们可直接从（3.1）中得到

$$\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS+\iint_{S_u}(X_\nu\delta\bar{u}+\cdots)dS=0 \tag{3.3}$$

将（3.3）代入（3.2），我们同样可得到

$$\delta U=0 \tag{3.4}$$

这就是位移边界条件变化的余能原理。

（二）力边界条件变化的变分原理

其次，我们考虑力边界条件的变化。表面力分量被给出在 S_σ 上的变分 $\delta\bar{X}_\nu$，…，而体力和在 S_u 上的指定表面位移保持不变。于是，我们有：在 V 内有 $\bar{X}$，…；$u+\delta u$，…，在S_σ上有 $\bar{X}_\nu+\delta\bar{X}_\nu$，…；$u$，…和在 S_u 上有 $X_\nu+\delta X_\nu$，…；$\bar{u}$，…并且我们称这一状态为本节的第二状态。在第一状态和本节的第二状态之间应用功的互等定理，我们有

$$\iiint_V[\bar{X}(u+\delta u)+\cdots]dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu u+\cdots)dS+\iint_{S_u}(\bar{X}_\nu\bar{u}+\cdots)dS$$

$$=\iiint_V(\bar{X}u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}[(\bar{X}_\nu+\delta\bar{X}_\nu)u+\cdots]dS+\iint_{S_u}[(X_\nu+\delta X_\nu)\bar{u}+\cdots]dS \tag{3.5}$$

我们可把（3.5）的左端项写成形式

$$2(U+\delta U)-\iint_{S_\sigma}(u\delta\bar{X}_\nu+\cdots)dS-\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS$$

而（3.5)的右端项可写成

$$2U+\iint_{S_\sigma}(u\delta\bar{X}_\nu+\cdots)dS+\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS$$

将上两式代入（3.5）中，我们得

$$\delta U=\iint_{S_\sigma}(u\delta \bar{X}_\nu+\cdots)dS+\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS \tag{3.6}$$

这就是力边界条件变化的余能原理。

从（3.5）中直接得到

$$\iint_{S_\sigma}(u\delta \bar{X}_\nu+\cdots)dS+\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS=\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV \tag{3.7}$$

将（3.7）代入（3.6），我们得到

$$\delta U=\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV \tag{3.8}$$

这就是力边界条件变化的势能原理。

作为（3.6）的理论应用，我们给出弹性体表面位移的一般表达式如下

$$\Delta(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{E}\iiint_V\{(\sigma_x\sigma_{x1}+\cdots)-\nu[(\sigma_x\sigma_{y1}+\sigma_y\sigma_{x1})+\cdots]$$

$$+2(1+\nu)(\tau_{xy}\tau_{xy1}+\cdots)\}dV-\iint_{S_u}(\bar{u}X_{\nu1}+\cdots)dS \tag{3.9}$$

这里 σ_{x1}，…；$X_{\nu1}$，…分别表示由沿所求位移方向在流动坐标点（ξ，η，ζ）处作用一单位集中载荷所产生的相应的应力分量和表面力分量。

（三）体力变化的变分原理

最后，我们考虑体力的变化。我们假设，体力分量的变分为 $\delta\bar{X}$，…而力的边界条件和位移边界条件保持不变。于是，我们有：在 V 内有 $\bar{X}+\delta\bar{X}$，…；u，…，在 S_σ 上有 $\bar{X}_\nu$，…；$u+\delta u$，…和在 S_u 上有 $X_\nu+\delta X_\nu$，…；$\bar{u}$，…。我们称这一状态为本节的第二状态。在第一状态和本节的第二状态之间应用功的互等定理，我们有

$$\iiint_V(\bar{X}u+\cdots)dV+\iint_{S_\sigma}[\bar{X}_\nu(u+\delta u)+\cdots]dS+\iint_{S_u}(X_\nu\bar{u}+\cdots)dS$$

$$=\iiint_V[(\bar{X}+\delta\bar{X})u+\cdots]dV+\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu u+\cdots)dS$$

$$+\iint_{S_u}[(X_\nu+\delta X_\nu)\bar{u}+\cdots]dS \tag{3.10}$$

用与前节相同的方法，我们有

$$\delta U=\iiint_V(u\delta\bar{X}+\cdots)dV+\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS \tag{3.11}$$

这就是体力变化的余能原理。

由（3.10）我们直接得到

$$\iiint_V(u\delta\bar{X}+\cdots)dV+\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS$$

$$=\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS \tag{3.12}$$

将（3.12）代入（3.11），我们得到

$$\delta U=\iint_{S_\sigma}(\bar{X}\delta u+\cdots)dV \tag{3.13}$$

这就是体力变化的势能原理。

作为(3.11)的理论应用，我们可给出与(3.9)相同形式的在 V 内的一般位移表达式。

四、功的互等定理与边界条件变化的混合变分原理

（一）位移边界条件变化的混合变分原理

像在第三节(一)段一样，首先，我们还是考虑位移边界条件的变化。但是与上节不同的是，在 S_σ 上指定的表面力分量是变化的，它们用 $\delta\bar{X}_\nu$，…来表示，而体力和在 S_σ 上的相应表面位移保持不变。于是我们有：在 V 内有 $\bar{X}$，…；$u+\delta u$，…，在 S_σ 上有 $\bar{X}_\nu+\delta\bar{X}_\nu$，…；$u$，…和在 S_u 上有 X_ν，…；$\bar{u}+\delta\bar{u}$，…并且我们称这一状态为本节的第二状态。在第三节(一)段与本节的两个第二状态之间应用功的互等定理，我们有

$$\iint_{S_\sigma}(\bar{X}_\nu\delta u+\cdots)dS=-\iint_{S_\sigma}(u\delta\bar{X}_\nu+\cdots)dS \tag{4.1}$$

将式(4.1)代入式(3.2)中，我们有

$$\delta U=\iiint_V(\bar{X}\delta u+\cdots)dV-\iint_{S_\sigma}(u\delta\bar{X}_\nu+\cdots)dS$$
$$+\iint_{S_u}(X_\nu\delta\bar{u}+\cdots)dS \tag{4.2}$$

这就是位移边界条件变化的混合变分原理。

（二）力边界条件变化的混合变分原理

像在第三节(二)段一样，其次，我们还是考虑力边界条件的变化。但是与第三节(二)段不一样的是，在 S_u 上指定的表面位移分量是变化的，它们用 $\delta\bar{u}$，…来表示，而体力和 S_u 上的相应表面力保持不变。于是我们有：在 V 内有 $\bar{X}$…；$u+\delta u$，…、在 S_σ 上有 $\bar{X}_\nu+\delta\bar{X}_\nu$，…；$u$，…和在 S_u 上有 X_ν，…，$\bar{u}+\delta\bar{u}$，…并且我们称该状态为本节的第二状态。在第三节（二）段和本节的两个第二状态之间应用功的互等定理，我们有

$$\iint_{S_u}(\bar{u}\delta X_\nu+\cdots)dS=-\iint_{S_u}(X_\nu\delta\bar{u}+\cdots)dS \tag{4.3}$$

将（4.3）代入（3.6），我们有

$$\delta U=\iint_{S_\sigma}(u\delta\bar{X}_\nu+\cdots)dS-\iint_{S_u}(X_\nu\delta\bar{u}+\cdots)dS \tag{4.4}$$

这就是力边界条件变化的混合变分原理。

（三）体力变化的混合变分原理

应用与前节相同的方法，我们能够获得体力变化的混合变分原理为

$$\delta U=\iiint_V(u\delta\bar{X}+\cdots)dV-\iint_{S_u}(X_\nu\delta\bar{u}+\cdots)dS \tag{4.5}$$

参 考 文 献

[1] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社 (1956.10).
[2] Washizu, K., *Variational Method in Elasticity and Plasticity* (second edition), Pergamon Press (1975).
[3] 付宝连，构造容许位移的转换边界法，应用数学和力学（待发表）.

The Reciprocal Theorem and Linear Elastic Variational Principles

Fu Bao-lian

(*Yanshan University, Qinhuangdao*)

Abstract

In this paper classical linear elastic variational principles are systematically derived from the reciprocal theorem and mixed variational principles of variations of boundary conditions are given.