应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

集值的Caristi不动点定理与Ekeland变分原理

张石生　　罗　群

（四川大学数学系）（贵州师范大学数学系）

（1987年11月2日收到）

摘　　要

本文提出一条加强形式的集值映象的 Caristi不动点定理，并用较简单的方法证明了Ekeland变分原理与这一加强形式的集值的Caristi不动点定理的等价性。本文的结果改进和加强了[4]中的相应结果。

1974年Ekeland[1]提出了下面一条变分原理：

定理1（Ekeland变分原理）　设(X, d)是一完备的度量空间，设φ: $X\longrightarrow(-\infty, +\infty]$是$\not\equiv+\infty$的下半连续的下有界的泛函。设对任给的$\varepsilon>0$，存在$u\in X$，使得

$$\varphi(u)\leqslant\inf\{\varphi(x): x\in X\}+\varepsilon \tag{1}$$

则对任何$\lambda>0$，存在点$v\in X$，使得

$$\varphi(v)\leqslant\varphi(u)-\varepsilon\lambda\cdot d(u, v) \tag{2}$$

$$d(u, v)\leqslant\frac{1}{\lambda} \tag{3}$$

$$\varphi(x)>\varphi(v)-\varepsilon\lambda\cdot d(v, x)\qquad \forall x\in X\backslash\{v\} \tag{4}$$

1976年Caristi[3]提出了下面的不动点定理：

定理2（单值的Caristi不动点定理）　设(X, d)是一完备的度量空间，设φ: $X\longrightarrow[0, \infty)$是下半连续函数。设$T: X\to X$是满足下列条件的映象：

$$d(x, Tx)\leqslant\varphi(x)-\varphi(Tx),\qquad \forall x\in X$$

则T在X中存在不动点。

这两条定理在近代非线性理论中起到非常重要的作用。它们在控制论、最优化理论、大范围分析、Banach空间几何理论、非线性半群理论等方面常常起到一些常用分析工具所难以起到的作用。

1979年Ekeland[2]借助于定理1证明了定理2，1987年史树中[4]用定理2也证明了定理1。至此，定理1与定理2等价性如何直接证明的问题被完全解决。

本文的目的是得出下面的加强形式的集值Caristi不动点定理（见定理3），并用较简单的方法证明了Ekeland变分原理与这一加强形式的集值的Caristi不动点定理的等价性。因此本文结果是[4]中结果的改进和加强。

定理3　设(X, d)是一完备的度量空间，设$CB(X)$是X的一切非空集的集合族。设φ：$X\to(-\infty, +\infty]$是下有界的下半连续泛函，且$\not\equiv+\infty$。设映象T：$X\to CB(X)$满足条件：对任一$x\in X$，存在$y\in Tx$，使得

$$d(x, y)\leqslant\varphi(x)-\varphi(y) \tag{5}$$

则对任何$u\in X$，$\varphi(u)\not\equiv+\infty$，以及$\beta>1$，存在$T$的不动点$v\in X$，使得

$$d(u, v)\leqslant\beta(\varphi(u)-\varphi(v)) \tag{6}$$

特别是，如果

$$\varphi(u)\leqslant\inf\{\varphi(x): x\in X\}+\varepsilon<\inf\{\varphi(x): x\in X\}+1$$

则v可满足：

$$d(u, v)\leqslant\sqrt{\varepsilon} \tag{7}$$

现在我们给出本文的主要结果。

定理4　定理1和定理3等价。

证　定理1$\Longrightarrow$定理3。

任取$u\in X$，$\varphi(u)\not\equiv+\infty$及$\beta>1$。如果

$$\varphi(u)=\inf\{\varphi(x): x\in X\}$$

则$\varphi(u)\leqslant\varphi(y)$，$\forall y\in Tu$。于是由条件(5)知，存在$y\in Tu$，使得

$$d(u, y)=0$$

故$u\in Tu$，因而u是T的不动点。取$v=u$，则(6)，(7)两式即被满足。故定理3的结论被证明。

如果

$$\varphi(u)>\inf\{\varphi(x): x\in X\}$$

记

$$\varphi(u)-\inf\{\varphi(x): x\in X\}=\varepsilon$$

对φ应用定理1，并取$\lambda=(\varepsilon\beta)^{-1}$，于是存在$v\in X$，使得

$$\varphi(v)\leqslant\varphi(u)-\frac{1}{\beta}d(u, v) \tag{8}$$

$$d(u, v)\leqslant\varepsilon\beta \tag{9}$$

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(v)-\frac{1}{\beta}d(v, x), \qquad \forall x\in X \tag{10}$$

由(5)和(10)，存在$y\in Tv$，使得

$$d(v, y)+\varphi(y)\leqslant\varphi(v)\leqslant\frac{1}{\beta}d(v, y)+\varphi(y)$$

由于$\beta>1$，且$\varphi(v)\leqslant\varphi(u)<+\infty$，故由上式得知

$$d(v, y)=0$$

故$v=y\in Tv$，因而v是T的不动点。另由(8)知(6)式成立。其次，当$0<\varepsilon<1$时，取$\beta=(\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}>1$，由(9)即得(7)。故结论得证。

定理3$\Longrightarrow$定理1。

用反证法。设在定理1的条件下，定理1的结论不成立。于是存在某一$\lambda>0$，使得对任给的$x\in X$有

$$\varphi(x)>\varphi(u)-\varepsilon\lambda d(u, x) \tag{11}$$

$$d(u,\ x)>\frac{1}{\lambda} \tag{12}$$

且存在某一y_0，$y_0\neq x$，使得

$$\varphi(y_0)\leqslant\varphi(x)-\varepsilon\lambda d(x,\ y_0) \tag{13}$$

令

$$F(x)=\{y\in X:\ y\neq x且\varphi(y)+\varepsilon\lambda d(x,\ y)\leqslant\varphi(x)\},\qquad x\in X$$

由(13)知$y_0\in F(x)$，故$F(x)$不空；另由φ的下半连续性知$F(x)$是X中的集。因而F是$X\to CB(X)$的映象，且在X中无不动点。

另由F的定义，对任一$x\in X$有

$$d(x,\ y)\leqslant\frac{1}{\varepsilon\lambda}(\varphi(x)-\varphi(y)),\qquad \forall y\in F(x) \tag{14}$$

由定理3知F在X中存在不动点。矛盾。由此矛盾知(13)式不能成立。

另外，显然(11)和(12)两式也不能成立。这就是说，在定理1的条件下，对任何$\lambda>0$，存在点$v\in X$，使得结论(2)，(3)，(4)成立。

定理证毕。

参 考 文 献

[1] Ekeland, I., On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.*, **47** (1974), 324—353.

[2] Ekeland, I., Nonconvex minimization problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series), **1** (1979), 443—474.

[3] Caristi. J., Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **215** (1976), 241—251.

[4] 史树中，Ekeland变分原理与Caristi不动点定理的等价性，数学进展，**16**，2 (1987)，203—206.

Set-Valued Caristi's Fixed Point Theorem and Ekeland's Variational Principle

Zhang Shi-sheng

(*Sichuan University, Chengdu*)

Luo Qun

(*Guizhou Normal University, Guiyang*)

Abstract

This paper proposes a formally stronger set-valued Caristi's fixed point theorem and by using a simple method we give a direct proof for the equivalence between Ekeland's variational principle and this set-valued Caristi's fixed point theorem. The results stated in this paper improve and strengthen the corresponding results in [4].