应用数学和力学，第10卷第2期（1989年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

闭合圆柱壳在冲击荷载下的动力计算*

成祥生

（同济大学，1987年2月8日收到）

摘　　要

本文讨论闭合圆柱形壳体在冲击荷载作用下的动力计算．文中分析冲击过程各阶段的动量及能量的变化，并计入冲击物和被冲击的闭合圆柱壳系统质量的影响；用相当质量法将整个圆柱形壳体的分布质量转化为只有一个集中的"相当质量"，从而导出闭合圆柱形壳体在冲击力作用下的动力因数．本文的特点是具有实用价值，计算比较简便．

一、引　　言

杆件受冲击荷载作用下的动力计算问题曾在文献[1,2,3]中讨论过．本文应用能量原理对闭合的圆柱形壳体在冲击荷载作用下的动力计算问题进行研究．在讨论中，考虑了冲击物和被冲击的圆柱形壳体质量的影响；用相当质量法将具有分布质量的壳体化为只有一个集中质量的弹性系统，从而导出闭合圆柱形壳体在冲击荷载作用下的动力因数．

为了简化问题，我们作如下的假定：忽略冲击系统的阻尼作用，不计冲击过程中的能量损失，不考虑被冲击物体局部的塑性变形，壳体中的最大动力挠度仍在线性范围，最大的动力应力不超过壳体材料的比例极限．

二、冲击过程的分析

设有一闭合圆柱形壳体，水平放置，如图1所示．壳体长为L，半径为R，厚度为h．今设有一重物Q向静止的壳体冲击，冲击点为m_1点．我们选择右手正交曲线坐标系：α，β，γ，它们分别沿母线方向，圆周方向和半径方向，其中γ朝圆心为正．冲击点m_1的坐标为(α_1,β_1)．假定在冲击后，冲击重物和壳体两者连成一体，在冲击点壳体产生一动力挠度$w_{d\gamma}$；同时重物Q的速度很快减到零．若冲击物和壳体的质量分别为M和M_s，设在冲击前瞬间重物Q的速度为V_0，于是此时冲击物的动量为MV_0，若在冲击后瞬间，壳体在冲击点得到的速度为V，则壳体在冲击后瞬间得到的动量并不等于M_sV，而是量M_sV的一部份，因为壳体在其它各点的速度不等于V，尤其是壳体在支承处这些速度为零．我们设想把壳体的全部质量M_s的

* 何福保推荐．

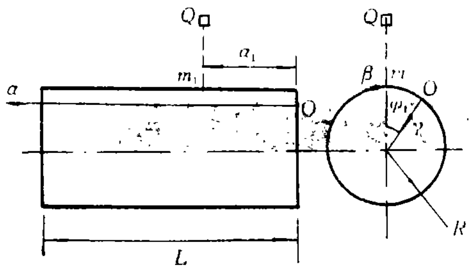

图 1

一部份eM_s集中于冲击点，其中$e<1$，于是壳体真正得到的动量就是eM_sV，其中e称为折算系数，该折算系数可根据原先具有分布质量的整个壳体和经过折算为一个集中的"相当质量"的弹性系统在振动时动能相等的原理求出。

现在对冲击系统应用动量守恒原理于冲击瞬间的前后。冲击物在冲击前瞬间具有的动量MV_0应等于冲击后瞬间，该冲击物与壳体合在一起所获得的动量$(M+eM_s)V$，于是得到了壳体在冲击后瞬间在冲击点所获得的速度

$$V=MV_0/(M+eM_s) \tag{2.1}$$

再应用能量守恒原理于冲击后的瞬间至壳体上冲击点的速度降到零的阶段。当壳体受冲击后，在冲击点既得到了速度V，那末当重物达到极点时，速度便从V降到零。若设重物沿壳体的半径方向运动而冲击，它的行程就是壳体在冲击点的法向动力挠度w_{dy}，如果略去分别沿壳体母线方向和圆周方向的位移u和v所引起的势能，则冲击物和壳体两者在冲击后瞬间所具有的动能与势能之和应等于薄壳在冲击点达到极点时壳体沿法向的弹性力的势能，即

$$\frac{1}{2}(M+eM_s)V^2+Mgw_{dy}=\frac{1}{2}Pw_{dy} \tag{2.2}$$

其中P为壳体上最大的法向弹性力，w_{dy}为壳体在冲击点处最大的法向动力挠度。由于w_{dy}和P都是从零增加到最大值，所以(2.2)式的右端便是弹性力P所作的功，即所谓弹性力的势能。

三、动力因数的确定

由于弹性壳体始终工作于比例极限之内，故有如下正比例关系，$P:Q=w_{dy}:w_{st}$，由此可得

$$P=Qw_{dy}/w_{st} \tag{3.1}$$

其中w_{st}为由力Q在冲击点所引起的静力法向挠度。

将(3.1)代入(2.2)并注意到(2.1)，便得到关于w_{dy}的二次代数方程，由它可解得

$$w_{dy}=w_{st}\left(1\pm\sqrt{1+V_0^2/K_egw_{st}}\right) \tag{3.2}$$

式中

$$K_e=1+eM_s/M \tag{3.3}$$

由于w_{dy}应大于w_{st}，故在上式根号前应使用正号。式(3.2)可写成

$$w_{dy}=K_dw_{st} \tag{3.4}$$

其中

$$K_d=1+\sqrt{1+V_0^2/K_egw_{st}} \tag{3.5}$$

称为动力因数。由(3.4)可以看出：动力因数K_d表示动力挠度w_{dy}和静力挠度w_{st}的比值。若已知静力挠度，则可由(3.4)求出动力挠度。自然，动力内力或动应力亦可根据静力内力或静应力[5]乘上动力因数K_d而得到。

如果不计壳体质量的影响，则由式(3.3)并令$M_s=0$，从而$K_e=1$，于是由(3.5)便得到

$$K_d=1+\sqrt{1+V_0^2/gw_{st}} \tag{3.6}$$

这时我们将得到了动力因数K_d的上限值，应用时偏于安全。

如果在(3.5)或(3.6)中，重物的冲击速度$V_0=0$，就得到 $K_d=2$，这便是突加荷载情形下的动力因数。

四、求折算系数

对于如图1所示的封闭圆柱形壳体，若采用无量纲的坐标

$$\xi=\alpha/R,\ \varphi=\beta/R \tag{4.1}$$

式中β为弧长，而φ为圆心角。于是壳体上受冲击点的坐标(α_1, β_1)变为(ξ_1, φ_1)，其中$\xi_1=\alpha_1/R$，$\varphi_1=\beta_1/R$；壳体两端的坐标为0及$\xi_0=L/R$。

设壳体中面上任一点沿坐标线α，β，γ方向的瞬时位移分量分别是

$$u=u(\xi,\varphi,t),\ v=v(\xi,\varphi,t),\ w=w(\xi,\varphi,t) \tag{4.2}$$

今使原先具有分布质量的整个壳体的动能和经过折算后只有一个集中的“相当质量”eM_s的弹性系统的动能相等，即

$$\frac{1}{2g}\rho hR^2\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi}(u_t^2+v_t^2+w_t^2)d\xi\,d\varphi=\frac{1}{2}eM_s(u_t^2+v_t^2+w_t^2)_{m_1} \tag{4.3}$$

便可求出折算系数e。

上式中ρ为壳体材料的比重；u_t，v_t，w_t为各瞬时位移分量对时间的一阶偏导数；g为重力加速度。(4.3)式的左边表示具有分布质量的整个壳体的动能，右边表示在冲击点(ξ_1,φ_1)处只有一个集中的“相当质量”eM_s的弹性系统的动能。下标m_1表示该括号中的量应取冲击点(ξ_1,φ_1)处的值。若注意到壳体的总质量

$$M_s=2\pi RhL\rho/g \tag{4.4}$$

则由(4.3)可得折算系数

$$e=\frac{R}{2\pi L}\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi}(u_t^2+v_t^2+w_t^2)d\xi d\varphi/(u_t^2+v_t^2+w_t^2)_{m_1} \tag{4.5}$$

对处于振动中的圆柱形壳体，我们也可以使用一个所谓瞬时位移函数$F=F(\alpha,\beta,t)$，当引入无量纲的自变量ξ和φ之后，就成为$F=F(\xi,\varphi,t)$。瞬时位移分量u，v，w可用函数F表示如下[4]

$$\left.\begin{aligned}u&=-F_{\xi\varphi\varphi}+\mu F_{\xi\xi\xi}\\v&=(2+\mu)F_{\xi\xi\varphi}+F_{\varphi\varphi\varphi}\\w&=\nabla^4F=F_{\xi}^{(4)}+2F_{\xi\xi\varphi\varphi}^{(4)}+F_{\varphi}^{(4)}\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

式中μ为壳体材料的泊松系数，而$F_{\xi\varphi\varphi}$等为函数F对相应下标的偏导数。

对于两端简支的闭合圆柱形壳体，在相应于某个一般的振形下可设瞬时位移函数如下

$$F(\xi,\varphi,t)=C_{mn}\cos n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi\cdot\exp[i\omega_{mn}t] \tag{4.7}$$

其中$\lambda_m=m\pi R/L$，ω_{mn}为对应于某个一般振形的固有频率，以下将略去它的下标mn。由(4.6)和(4.7)可得

$$\left.\begin{aligned}u(\xi,\varphi,t)&=C_{mn}\lambda_m(n^2-\mu\lambda_m^2)\cos n\varphi\cdot\cos\lambda_m\xi\cdot\exp[i\omega t]\\v(\xi,\varphi,t)&=C_{mn}n[(2+\mu)\lambda_m^2+n^2]\sin n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi\cdot\exp[i\omega t]\\w(\xi,\varphi,t)&=C_{mn}(\lambda_m^2+n^2)^2\cos n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi\cdot\exp[i\omega t]\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

不难看出，函数(4.7)在壳体的两端$\xi=0$及$\xi=\xi_0=L/R$满足如下的条件

$$F=F_{\xi\xi}=F_{\xi}^{(4)}=F_{\xi}^{(6)}=0 \tag{4.9}$$

它们相当于满足壳体在两个简支端的边界条件，即

当$\xi=0$及$\xi=\xi_0$时：$v=w=N_\alpha=M_\alpha=0$ (4.10)

其中N_α和M_α分别为壳体沿α坐标线方向的无矩内力和弯矩。

将(4.8)代入(4.5)进行积分并约简后，可得

$$e=\frac{1}{4}\{\lambda_m^2(n^2-\mu\lambda_m^2)^2+n^2[(2+\mu)\lambda_m^2+n^2]^2+(\lambda_m^2+n^2)^4\}$$
$$\cdot\{\lambda_m^2(n^2-\mu\lambda_m^2)^2\cos^2 n\varphi_1\cdot\cos^2\lambda_m\xi_1+n^2[(2+\mu)\lambda_m^2+n^2]^2\sin^2 n\varphi_1\cdot\sin^2\lambda_m\xi_1$$
$$+(\lambda_m^2+n^2)^4\cos^2 n\varphi_1\cdot\sin^2\lambda_m\xi_1\}^{-1} \tag{4.11}$$

由上式可见，当冲击点的坐标(ξ_1，φ_1)已知时，e值便取决于数n和m。再由(3.3)和(3.5)可知，e值愈小，K_d愈大，故求$e_{\min}$最有意义。实际计算表明，当$n=0$，$m\to\infty$时e值最小。我们假定冲击点的坐标是$\xi_1=\xi_0/2=L/2R$及$\varphi_1=0$，并且取$n=0$，1；$m=1,3,5,7,\cdots,15$进行了具体计算，得到e值的一收敛数列，其极限为0.252，不过当$n=0$和$m=9$时，折算系数e的数值已接近于这个极限值。

五、数 值 例 题

设有一水平放置，两端简支的闭合圆柱形壳体，受一重物Q冲击，该重物在冲击前瞬间的速度为V_0，重物在壳体的中间断面($\alpha_1=L/2$或$\xi_1=\xi_0/2=L/2R$) 内沿半径方向运动并朝壳体冲击。已知：壳体的材料为钢，$R=1$m，$L=10$m，壳体材料的弹性模量$E=2.1\times10^{10}$kg/m^2，壳体材料的密度$\rho=7.8\times10^3$kg/m^3，$h=0.04$m，$\mu=0.3$，重物$Q=98.1$kg，$V_0=0.3$m/sec。由题意知道，$\xi_1=L/2R=5$，取$\varphi_1=0$，经计算得到弯曲刚度$D=12.30769\times10^4$kg-m，冲击物质量$M=Q/g=98.1/9.81=10$kg-sec^2/m，壳体质量$M_s=2\pi RLh\rho/g=2\pi\times1\times10\times0.04\times7.8\times10^3/9.81=1.99832\times10^3$kg-sec^2/m。

在冲击点(ξ_1,φ_1)壳体的静力挠度w_{st}由下列微分方程[4]求之

$$\nabla^4 F+\frac{1-\mu^2}{c}F_{\xi}^{(4)}=R^4 Z/D \tag{5.1}$$

其中$c=h^2/12R^2=0.04^2/12\times1^2=1.3333\times10^{-4}$，$Z$为法向分布荷载的集度。

对于两端简支的闭合圆柱壳取满足边界条件(4.10)的位移函数如下

$$F(\xi,\varphi)=\sum_m\sum_n A_{mn}\cos n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi \tag{5.2}$$

将荷载亦可表示成类似的二重三角级数

$$Z(\xi,\varphi)=\sum_m\sum_n B_{mn}\cos n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi\qquad(m,n=1,2,3,\cdots,\infty) \tag{5.3}$$

其中系数B_{mn}可用下列公式去求

$$B_{mn}=\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi}Z(\xi,\varphi)\cos n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi d\xi d\varphi\cdot\left[\int_0^{\xi_0}\int_0^{2\pi}\cos^2 n\varphi\cdot\sin^2\lambda_m\xi d\xi d\varphi\right]^{-1}$$

对于集中力Q，我们有$Z(\xi,\varphi)=Q/R^2d\xi d\varphi$，于是由上式可得

$$B_{mn}=2Q\cos n\varphi_1\cdot\sin\lambda_m\xi_1/\pi\xi_0R^2 \tag{5.4}$$

将(5.2)～(5.4)代入(5.1)先求出A_{mn}，然后再由下式[4]计算w_{st}

$$w_{st}=(\nabla^4 F)_{m_1}\frac{2R^2Q}{\pi\xi_0 D}\sum_m\sum_n\left\{[(\lambda_m^2+n^2)^2\cos n\varphi_1\cdot\sin\lambda_m\xi_1\cdot\cos n\varphi\cdot\sin\lambda_m\xi]_{m_1}\right.$$

$$\left.\cdot\left[(\lambda_m^2+n^2)^4+\frac{1-\mu^2}{c}\lambda_m^4\right]^{-1}\right\}\qquad(m=1,3,5,7,\cdots;\ n=0,1,2,3,4,\cdots)\qquad(5.5)$$

当$\xi_1=\xi_0/2=L/2R=5$，$\varphi_1=0$时，并由上式取$m=1,3,5$；$n=0,1,2,3,4,5$共18项，求得

$$w_{st}=w(5,0)=5.47919\times10^{-6}\mathrm{m}\qquad(5.6)$$

由(4.11)已求出$e_{\min}=0.252$，于是由(3.3)得

$$K_e=1+eM_s/M=1+0.252\times1.99832\times10^3/10=51.35766\qquad(5.7)$$

最后由(3.5)求得

$$K_d=1+\sqrt{1+V_0^2/gK_e w_{st}}$$
$$=1+\sqrt{1+0.3^2/9.81\times51.35766\times5.47919\times10^{-6}}=6.79677\qquad(5.8)$$

于是动力内力或动应力可由静力内力或静应力乘上动力因数而得到。

六、结 束 语

（1） 本文是在保守系统中应用能量守恒原理导出了闭合圆柱壳受冲击荷载时的动力因数，其中并未计及冲击处物体的塑性变形。

（2） 在推导动力因数K_d时，计及壳体质量的影响，并将闭合圆柱壳的全部分布质量M_s的一部份eM_s，折算到冲击点。

（3） 只要知道冲击物在冲击前瞬间的速度V_0即可求出动力因数，而不管冲击物的方向如何，例如是沿铅直的或水平的方向。

（4） 本文是将材料力学和结构力学中求动力因数的方法推广并应用到壳体结构中。

（5） 着重指出：只要是壳体在冲击点的位移w_{dy}和受冲击系统的弹性力成正比，本文所述方法便可应用。

（6） 本文方法也可推广应用于两端非简支的闭合圆柱壳和开口圆柱壳旋转壳中。

（7） 本文所论的方法，其优点在于有实用价值和计算比较简便。

参 考 文 献

[1] Saint-Venant, B., *Theorie de l'Elasticite des Corps Solides*, Paris, Parag., 61 (1883), 490.

[2] Love, A. E. H., *Math. Theo. of Elast.*, (1927), 198.

[3] Timoshenko, S., *Vibration Problems in Engineering*, second edition (1937).

[4] Власов В. З., *Общая Теория Оболочек*, Гостехиздат (1949).

[5] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, second edition, McGraw-Hill Book Comp. Inc. (1959).

The Dynamic Computation of Closed Cylindrical Shell under Impact Load

Cheng Xiang-sheng

(*Tongji University, Shanghai*)

Abstract

This article discusses the dynamic computation of the closed cylindrical shell under impact load. In the text we analyse the changes of the momenta and the energy on each stage in the impact process, take into account the effect of the mass of impact object and the system of the closed cylindrical shell by impact, and transform the distributed mass of the whole cylindrical shell into an only concentrated "equivalent mass" by the method of reduced mass. Consequently we derive the dynamic factor of the closed cylindrical shell due to impact load.

The method proposed in this paper is of practical worth and is more convenient in calculations.