应用数学和力学，第10卷第2期（1989年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

凸度量空间中非扩张映象的不动点定理*

李 秉 友

（河北师范大学数学系，1987年10月24日收到）

摘　要

设X是一凸度量空间，并且它的每一直径趋于零的非空闭子集的逆减序列具有非空交的性质．本文证明了，如果X的非空闭子集K的自映象T满足不等式：

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant ad(x,\ y)+b\{d(x,\ Tx)+d(y,\ Ty)\}$$
$$+c\{d(x,\ Ty)+d(y,\ Tx)\},\quad \forall x,y\in K$$

其中$0\leqslant a<1$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$，使得$a+c\neq 0$且$a+2b+3c\leqslant 1$．

则T在K中存在唯一不动点．

一、引　　言

张石生在[1]中把度量空间中的非扩张映象分为五类，并且在满足一定条件的Banach空间中证明了它们不动点的存在．由[2]知道，每一Banach空间是凸度量空间，并且存在许多不能嵌入任一Banach空间的凸度量空间．因此，在凸度量空间中研究上述五类映象不动点的存在是有意义的．

1982年，Guay，Singh和Whitfield[3]证明了凸度量空间X中有界闭凸子集K的非扩张自映象T的不动点的存在．这类映象T满足不等式：

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant d(x,\ y)\qquad \forall x,\ y\in K$$

1986年，Beg和Azam在国际数学家大会上宣读了“凸度量空间中Kannan映象的不动点定理”的论文[4]．这类映象T满足不等式：

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant \frac{1}{2}\{d(x,\ Tx)+d(y,\ Ty)\}\qquad \forall x,y\in K$$

上述二条件结合成如下形式是自然的：

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant ad(x,\ y)+b\{d(x,\ Tx)+d(y,\ Ty)\}\qquad \forall x,\ y\in K$$

其中$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，且$a+2b=1$．

如果$0<a<1$的情形发生，我们可把上述结果推广成映象满足如下不等式的情形：

$$d(Tx,\ Ty)\leqslant ad(x,\ y)+b\{d(x,\ Tx)+d(y,\ Ty)\}$$
$$+c\{d(x,\ Ty)+d(y,\ Tx)\}\qquad \forall x,\ y\in K$$

---

* 张石生推荐．

其中$0\leqslant a<1$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$使得$a+c\neq 0$且$a+2b+3c\leqslant 1$。

二、预备知识和符号

1970年，W. Takahashi 在[2]中给出了度量空间中凸性的概念，从而推广了Banach空间中某些不动点定理。现把文[2]中与本文有关的一些结果选列如下：

（1） 设X是一度量空间。映象$W: X+X\times[0,1]\to X$称为X上的凸结构，如果对一切x，$y\in X$和$\lambda\in[0,1]$满足下列条件：

$$d(u,w(x,y,\lambda))\leqslant\lambda d(u,x)+(1-\lambda)d(u,y)\qquad\forall u\in X$$

（2） 具有凸结构的度量空间称为凸度量空间。

（3） 凸度量空间X的一个子集K称为凸的，如果

$$w(x,y,\lambda)\in K\qquad\forall x,\ y\in K\text{和}\lambda\in[0,1]$$

（4） 度量空间称为具有 Cantor 相交性质（简记为 CIP 性质），如果它的直径趋于零($\delta(K_n)\to 0$)的非空闭子集的递减序列$\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$具有非空交。

$\delta(A)$，$\bar{A}$，$\overline{CO}(A)$分别表示X的子集A的直径，闭包，凸闭包。

三、主 要 结 果

引理1 设X为一度量空间，映象$T: X\to X$满足不等式：

$$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,y)+b\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}$$
$$+c\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}\qquad\forall x,\ y\in X$$

其中$0\leqslant a<1$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$，使得$a+2b+3c\leqslant 1$。则

（i） $d(T^nx,T^{n+1}x)\leqslant d(T^{n-1}x,T^nx)$， $\forall n\in N$；

（ii） $d(Tx,Ty)\leqslant\left(\frac{a+b+c}{1-a-2c}\right)\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}$，$\forall x,\ y\in X$。

证 依假设，我们有

（i） $d(T^nx,T^{n+1}x)\leqslant\left(\frac{a+b+c}{1-b-c}\right)\cdot d(T^{n-1}x,T^nx)\leqslant d(T^{n-1}x,T^nx)$。

（ii） 依三角不等式，我们有

$$d(Tx,Ty)\leqslant a\{d(x,Tx)+d(Tx,Ty)+d(Ty,y)\}+b\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}$$
$$+c\{d(x,Tx)+d(Tx,Ty)+d(y,Ty)+d(Ty,Tx)\}$$

从而得

$$d(Tx,Ty)\leqslant\left(\frac{a+b+c}{1-a-2c}\right)\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}$$

引理2 设X为一具CIP性质的凸度量空间，映象$T: X\to X$满足不等式：

$$d(Tx,Ty)\leqslant ad(x,y)+b\{d(x,Tx)+d(y,Ty)\}$$
$$+c\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}\qquad\forall x,\ y\in X$$

其中$0\leqslant a<1$，$b\geqslant 0$，$c\geqslant 0$，使得$a+2b+3c\leqslant 1$，则下列二条件等价：

(a) T在X中有唯一不动点；

(b) $\inf\{d(x,Tx):\ x\in X\}=0$。

证 由(a)推出(b)是显然的。反之，能证出集$\{d(x, Tx): x\in X\}$有一最小元即可。

考虑集族

$$K_n=\left\{x\in X:\ d(x, Tx)\leqslant\frac{1-a-2c}{2n(1+b-c)},\quad n\in N\right\}$$

由$(1-a-2c)/2n(1+b-c)>0$和下确界定义，存在某$x_0\in X$使得

$$d(x_0, Tx_0)\leqslant\frac{1-a-2c}{2n(1+b-c)}$$

因此K_n是非空的。应用引理 1 的(ii)，有

$$d(Tx, Ty)\leqslant\left(\frac{a+b+c}{1-a-2c}\right)\{d(x, Tx)+d(y, Ty)\}\qquad\forall x, y\in K_n$$

于是，对任意$x, y\in K_n$，我们有

$$d(Tx, Ty)\leqslant\left(\frac{a+b+c}{1+b-c}\right)\left\{\frac{1}{n}\right\}\leqslant\frac{1}{n}$$

又由于对任意$x, y\in K_n$，有

$$d(x, y)\leqslant d(x, Tx)+d(Tx, Ty)+d(Ty, y)$$

再应用引理 1 的(ii)，有

$$d(x, y)\leqslant\left(\frac{1+b-c}{1-a-2c}\right)\{d(x, Tx)+d(y, Ty)\}\leqslant\frac{1}{n}\qquad\forall x, y\in K_n$$

因此，$\delta(K_n)\leqslant 1/n$，$\delta(TK_n)\leqslant 1/n$。所以$\delta(\overline{TK_n})\leqslant 1/n$。

又由引理 1 的(i)可知$TK_n\subset K_n$。于是$\{\overline{TK_n}\}$是直径趋于零（即$\delta(\overline{TK_n})\to 0$）的非空闭子集的递减序列，而$X$具有CIP 性质，故序列$\{\overline{TK_n}\}$有非空交。

现证，对每一$n\in N$，$\overline{TK_n}\subset K_n$。

对任一$z^*\in\overline{TK_n}$，存在序列$\{z_m\}\subset TK_n$，使得$z_m\to z^*$。显然$z_m=Ty_m$，其中$y_m\in K_n$，并且

$$d(z^*, Tz^*)\leqslant d(z^*, z_m)+d(Ty_m, Tz^*)$$

由T的定义，我们有

$$d(z^*, Tz^*)\leqslant\left(\frac{a+2c+1}{1-b-c}\right)d(z^*, z_m)+\left(\frac{a+b+c}{1-b-c}\right)d(y_m, Ty_m)$$

从而有

$$d(z^*, Tz^*)\leqslant\left(\frac{a+2c+1}{1-b-c}\right)d(z^*, z_m)+\frac{1-a-2c}{2n(1+b-c)}$$

令$m\to\infty$，我们有

$$d(z^*, Tz^*)\leqslant\frac{1-a-2c}{2n(1+b-c)}\qquad\forall z^*\in\overline{TK_n}$$

故$\overline{TK_n}\subset K_n$。这就完成了引理 2 的证明。

定理1 设X为具CIP性质的凸度量空间，K是X的非空闭凸子集，如果映象$T: K\to K$满足不等式：

$$d(Tx, Ty)\leqslant ad(x, y)+b\{d(x, Tx)+d(y, Ty)\}\qquad\forall x, y\in K\tag{3.1}$$

其中$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，且$a+2b=1$。

则T在K中存在唯一不动点。

证 设$\inf\{d(x, Tx): x\in K\}=\eta>0$. 则对任一$\varepsilon>0$，存在某$x\in K$，使得

$$d(x, Tx)<\eta+\varepsilon$$

由K是凸的，所以$z=w(T^2x, T^3x, 1/2)\in K$.

由凸性结构的定义，我们有

$$d(z, Tz)=d\left(w\left(T^2x, T^3x, \frac{1}{2}\right), Tz\right)\leqslant\frac{1}{2}d(T^2x, Tz)+\frac{1}{2}d(T^3x, Tz)$$

并且应用不等式(3.1)和引理1，我们有

$$d(z, Tz)\leqslant\frac{1}{2}a\{d(Tx, z)+d(T^2x, z)\}+b\{d(x, Tx)+d(z, Tz)\}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}a\left\{\left(a+b+\frac{1}{2}\right)d(x, Tx)+\frac{1}{2}d(x, Tx)\right\}$$

$$+b\left\{d(x, Tx)+d(z, Tz)\right\}$$

由此得出

$$d(z, Tz)\leqslant\left(\frac{a^2+ab+1}{2(1-b)}\right)d(x, Tx)+\lambda d(x, Tx)$$

其中 $$\lambda=\frac{a^2+ab+1}{2(1-b)}<1$$

选$\varepsilon<\eta(1-\lambda)/\lambda$，我们有

$$d(z, Tz)<\eta$$

这就得出一个矛盾，所以$\inf\{d(x, Tx): x\in K\}=0$。由引理 2 可知，$T$在$K$中存在唯一不动点。这就完成了定理 1 的证明。

定理2 设X为具 CIP 性质的凸度量空间，K是X的非空闭凸子集，如果映象$T: K\to K$满足不等式：

$$d(Tx, Ty)\leqslant ad(x, y)+b\{d(x, Tx)+d(y, Ty)\}$$
$$+c\{d(x, Ty)+d(y, Tx)\}, \qquad \forall x, y\in K \tag{3.2}$$

其中$0\leqslant a<1$，$b\geqslant0$，$c\geqslant0$，使得$a+c\neq0$且$a+2b+3c\leqslant1$。

则T在K中存在唯一不动点。

证 若$c=0$，则定理就是定理1。

若$c\neq0$和$\inf\{d(x, Tx): x\in K\}=\eta>0$，则对任一$\varepsilon>0$，存在某$x\in K$，使得

$$d(x, Tx)<\eta+\varepsilon$$

由K是凸的，所以$z=w(T^2x, T^3x, 1/2)\in K$。由凸性结构的定义，不等式(3.2)和引理 1，我们有

$$2d(z, Tz)\leqslant a\{d(Tx, z)+d(T^2x, z)\}+2b\{d(x, Tx)+d(z, Tz)\}$$
$$+c\{d(Tx, z)+2d(z, Tz)+2d(z, T^2x)+d(z, T^3x)\}$$

$$\leqslant a\left\{\frac{3}{2}d(x, Tx)+\frac{1}{2}d(x, Tx)\right\}+2b\{d(x, Tx)+d(z, Tz)\}$$

$$+c\left\{\frac{3}{2}d(x, Tx)+2d(z, Tz)+d(x, Tx)+\frac{1}{2}d(x, Tx)\right\}$$

由此可得

$$d(z, Tz)\leqslant\left(\frac{2a+2b+3c}{2(1-b-c)}\right)d(x, Tx)=\lambda d(x, Tx)$$

其中 $$\lambda=\frac{2a+2b+3c}{2(1-b-c)}<1$$

选$\varepsilon<\eta(1-\lambda)/\lambda$，我们有

$$d(z, Tz)<\eta$$

这就得出一个矛盾，所以 $\inf\{d(x, Tx): x\in K\}=0$。

由引理 2 可知，T在K中存在唯一不动点。这就完成了定理 2 的证明。

注 定理 2 不能出现 $a=1$或$a+c=0$的情形。

例1(Kirk[5]) $a=1$的情形。

设$X=C[0, 1]$，因$C[0, 1]$是 Banach 空间，所以它是凸度量空间。

$$K=\{f\in C[0, 1]: f(0)=0, f(1)=1, 0\leqslant f(x)\leqslant 1\}$$

显然K是非空闭凸子集。定义映象T如下：

$$(Tf)(t)=tf(t) \qquad \forall t\in[0, 1]$$

则T映K到自身，并且由

$$\|Tf_1(t)-Tf_2(t)\|=t\|f_1-f_2\|\leqslant\|f_1-f_2\| \qquad \forall t\in[0, 1]$$

可知，它满足当$a=1$的条件(3.2)。但它没有不动点。

例2 $a+c=0$, $b=1/2$的情形。

设$X=l^\infty(C[0, 1])$，因$l^\infty(C[0, 1])$是$C[0, 1]$中一切有界函数序列所成的 Banach 空间，显然是凸度量空间。

$$K=\{f\in C[0, 1]: f(0)=0, f(1)=1, 0\leqslant f(x)\leqslant 1\}$$

则K中一切有界函数序列所成的子集$F\subset l^\infty(C[0, 1])$是有界闭凸集。定义映象$T$如下：

$$T\{f_n\}=\{f_n^n\} \qquad \forall f_n\in F$$

其中上边的指数表乘方。则T映F到自身，并且由

$$\|T\{f_n\}-T\{g_n\}\|\leqslant\frac{1}{2}\{\|\{f_n\}-T\{f_n\}\|+\|\{g_n\}-T\{g_n\}\|\}=1=\delta(F)$$

可知，它满足当$a+c=0$, $b=1/2$的条件(3.2)。但它没有不动点。

问题 张石生在[1]中把度量空间中非扩张映象分为五类，作者认为后两类映象不动点的存在问题，也可推广到凸度量空间。

最后，作者衷心感谢四川大学张石生教授在本文完成过程中给予的关怀和帮助。

参 考 文 献

[1] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社 (1984).

[2] Takahashi, W., A convexity in metric space and nonexpansive mappings, *I. Kodai Math. Sem. Rep.*, **22** (1970), 142—149.

[3] Guay, M. D., K. L. Singh and J. H. M. Whitfield, Fixed point theorems for nonexpansive mappings in convex metric spaces, *Proceedings, Conference on Nonlinear Analysis* (ed. S. P. Singh and J. H. Burry), Marcel Dekker, Inc., New York, **80** (1982), 179—189.

[4] Beg, Ismat and Akbar Azam (Quaid-i-Azam University, Pakistan), Fixed point

theorems for Kannan mappings, *Abstracts of International Congress of Mathematicians*, Berkeley, California, U. S. A. (1986), 3—11.

[5] Kirk, W. A., A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, *Amer. Math. Monthly*, 72 (1965), 1004—1006.

Fixed Point Theorem of Nonexpansive Mappings in Convex Metric Spaces

Li Bing-you

(*Department of Mathematics, Hebei Teachers' University, Shijiazhuang*)

Abstract

Let X be a convex metric space with the property that every decreasing sequence of nonempty closed subsets of X with diameters tending to zero has nonempty intersection. This paper proved that if T is a mapping of a closed convex nonempty subset K of X into itself satisfying the inequality:

$$d(Tx,\ Ty) \leqslant ad(x,\ y) + b\{d(x,\ Tx) + d(y,\ Ty)\} + c\{d(x,\ Ty) + d(y,\ Tx)\}, \quad \forall x,\ y \in K$$

for all x, y in K, where $0 \leqslant a < 1$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $a + c \neq 0$ and $a + 2b + 3c \leqslant 1$, then T has a unique fixed point in K.