应用数学和力学，第10卷第1期(1989年1月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

固体力学的不等式问题

郭 友 中

（中国科学院武汉数学物理研究所，1987年10月25日收到）

摘 要

本文全面讨论了固体力学中的不等式问题，内容包括变分原理与变分不等式中平稳型的和发展型的，确定性的和随机性的一些问题的主要概念、方法和结果.

一、引 论

变分不等式起源于Stampacchia的论文[1]以及稍后地与Lions合作的论文[2]，为了纪念它的创始人，意大利比萨高等师范学校设置了Stampacchia奖，于1982年第一次发奖，奖掖对不等式及有关问题卓有贡献的六位数理科学家.

变分原理与变分不等式为固体力学的近代发展提供了统一的框架和有力的工具.

变分学是和数学分析几乎同时发展起来研究极值问题的一个数学分支，和函数的极值一样，泛函数极值的必要条件是它的一阶变分(或一阶Gâteaux微分)为0；另一类关于泛函取极小的必要条件是说，泛函的二阶变分非负. 前者称为Euler-Lagrange条件(方程)；后者称为Legendre-Jacobi条件(方程)，它是强椭圆的. 但是，所有这些条件却都不是充分的. 1906年，Caratheodory举了一个反例：对泛函

$$I_c(u)\equiv\int_a^b[(u')^2-u^2(u')^4]dx \tag{1.1}$$

在边界条件$u(a)=u(b)=0$下，$u^*(x)=0$确实满足Legendre-Jacobi条件，但泛函$I_c(u^*(x))$显然不是极小值.

Gauss与Riemann师生两人都曾致力于二维Dirichlet问题解的存在性研究. 问题相当于求Dirichlet积分

$$I_D(u)=\int_\Omega[u_x^2+u_y^2]dxdy \tag{1.2}$$

在Ω的边界$\partial\Omega$上取定值的连续可微函数类中的极小，即它的Euler-Lagrange条件就是二维的Laplace方程. Riemann断言：问题是可解的，并称之为Dirichlet原则，然而，Riemann只说对了一半. 1870年，Weierstrass指出，尽管在上述函数类中Dirichlet积分有下界，但却不一定能达到. 这一发现导致在这一领域里工作的许多数学家转而从事充分条件的研究. 由于这一重要问题一时得不到解决，使得变分学的工作步入了低潮.

有览于此，1900年，Hilbert在题为数学问题的著名演说中，不仅第23问题，而且第19

与20问题都提到变分问题，他一再提醒人们给予变分问题以应得的重视，并第一个证明了Dirichlet原则。从此开始了变分学发展的新的时期，无论是在数学还是力学中都有重大进展。

文献[3][23]～[25]是有关变分不等式及其应用的很好的总结，更为详尽的论述请见文献[4]～[11]。

二、力 学 背 景

采用正交坐标，求和约定，拉丁指标变域为1至3。弹性体Ω内一点$x\equiv(x_1,x_2,x_3)$处，法线方向为$n\equiv(n_1,n_2,n_3)$的面上的应力$\sigma_n=(\sigma_{1n},\sigma_{2n},\sigma_{3n})$可以通过该点的应力张量$\sigma\equiv\{\sigma_{ij}\}$来表示：

$$\sigma_{in}=\sigma_{ij}n_j \tag{2.1}$$

1. 平衡方程

当物体Ω承受体力$p\equiv(p_1,p_2,p_3)$而处于平衡状态时，任取一子体$V\subset\Omega$，V的外部通过界面∂V作用于面元dS上的面力以及作用于体元dV上的体力在x_i方向的分量分别为：

$$\sigma_{in}dS=\sigma_{ij}n_jdS,\quad p_idV$$

整体与局部平衡方程分别为：

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\partial V}\sigma_{ij}n_jdS-\int_V p_idV=0\\&\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}-p_i=0\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

由整体到局部采用了Stokes公式，用到了V的任意性：$V\to x$。

对于外力矩$M\equiv x\wedge p$，整体与局部平衡方程分别为：

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\partial V}(x\wedge\sigma_j)n_jdS+\int_V(x\wedge p)dV=0\\&\sigma_{ij}=\sigma_{ji}\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

这里也用了Stokes公式，式(1.2)和V的任意性。

2. 最小势能原理

对位移$u\equiv(u_1,u_2,u_3)$的增量进行对称与反对称分解，分别得弹性体在点x处的应变与旋转：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{ij}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\\&\omega_{ij}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

位能密度与余能密度分别定义为：

$$A(\varepsilon)\equiv\int_0^\varepsilon\sigma_{ij}(\varepsilon)d\varepsilon_{ij},\quad B(\sigma)\equiv\int_0^\sigma\varepsilon_{ij}(\sigma)d\sigma_{ij} \tag{2.5}$$

广义位能密度与余能密度分别由Legendre变换相联系（参见[12]）：

$$\left.\begin{array}{l}A(\varepsilon,\sigma)\equiv\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}-B(\sigma),\ B(\varepsilon,\sigma)\equiv\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}-A(\varepsilon)\\ A(\varepsilon)=\sup\limits_{\sigma}A(\varepsilon,\sigma),\ B(\sigma)=\sup\limits_{\varepsilon}B(\varepsilon,\sigma)\end{array}\right\}\tag{2.6}$$

驻值存在的条件是：

$$\left.\begin{array}{l}(\partial^2B(\sigma)/\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl})\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{kl}\geqslant0\\ (\partial^2A(\varepsilon)/\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{hl})\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{hl}>0\end{array}\right\}\tag{2.7}$$

Euler方程是：

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{ij}=\partial A(\varepsilon,\sigma)/\partial\varepsilon_{ij}=\partial A(\varepsilon)/\partial\varepsilon_{ij}\\ \varepsilon_{ij}=\partial B(\varepsilon,\sigma)/\partial\sigma_{ij}=\partial B(\sigma)/\partial\sigma_{ij}\end{array}\right\}\tag{2.8}$$

即是说，位能与余能形式的物理方程是互补的；应力与应变不受物理方程约束时，须以关系(2.6)之1与2代替通常的物理方程：$A(\varepsilon)+B(\sigma)=\varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$。满足关系(2.8)的物体称为超弹性体，它是一种物理非线性物体；关系(2.7)常是弹性力学问题应力解存在唯一性的保证。

对称双线性泛函

$$a(u,v)\equiv\int_\Omega\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dV\tag{2.9}$$

称为虚功泛函，对应的非负二次型

$$a(u,u)=\int_\Omega\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)dV\equiv2I_i(u)\geqslant0\tag{2.10}$$

中$I_i(u)$称为弹性内能。$\varepsilon_{ij}(u)=0$的状态称为无应变状态，它等价于$a(u,u)=0$，或弹性体允许作无穷小刚体位移$v=a+b\wedge x$ (a,b是常矢量)，亦称虚位移，全体虚位移的集合记作V_0。弹性体Ω除受体力p作用外，通常还有作用在界面$\partial\Omega$上的面力$q\equiv(q_1,q_2,q_3)$，所以外功势能为

$$I_0(u)\equiv-\int_\Omega p_iu_idV-\int_{\partial\Omega}q_iu_idS\equiv-f(u)\tag{2.11}$$

对于势能泛函

$$J(u)\equiv\frac{1}{2}a(u,u)-f(u)\tag{2.12}$$

最小势能原理是说：平衡状态的位移u使势能J取极小，反之，使势能取极小的状态必是平衡状态。即

$$J(u)=\min_{v\in V}J(v)\tag{2.13}$$

V是位移v的允许集(例如：满足某些光滑性条件和定解条件的函数集，通常$V_0\not\subset V$)。

3. 虚功原理

令泛函(2.12)的一阶变分为0，对满足齐次边界条件的位移集V，有

$$\langle DJ(u),v\rangle\equiv\frac{d}{d\lambda}J(u+\lambda v)\Big|_{\lambda=0}=\frac{d}{d\lambda}\Big\{J(u)+\lambda[a(u,v)-f(v)]+\frac{\lambda^2}{2}a(v,v)\Big\}\Big|_{\lambda=0}=0$$

即虚功$a(u,v)-f(v)$为0，即

$$a(u,v)-f(v)=0 \quad (\forall v\in V_0) \tag{2.14}$$

称为虚功原理，它的意思是说：平衡状态的位移u使虚功为0，反之亦然。写成分量的形式，有

$$-\int_\Omega\left[\frac{\partial\sigma_{ij}(u)}{\partial x_j}+p_i\right]v_i dV+\int_{\partial\Omega}[\sigma_{ij}(u)n_j-q_i]v_i dS=0. \tag{2.14)*$$

易证最小势能原理与虚功原理是等价的。

一个虚位移有六个自由度，可选六个线性无关的刚体位移：

$$v_{(1)}\equiv(1,0,0),\ v_{(2)}\equiv(0,1,0),\ v_{(3)}\equiv(0,0,1);$$
$$v_{(4)}\equiv(0,-x_3,x_2),\ v_{(5)}\equiv(x_3,0,-x_1),\ v_{(6)}\equiv(-x_2,x_1,0),$$

代入式(2.11)，得

$$\left.\begin{aligned}&f(v_{(1)},v_{(2)},v_{(3)})=-\left[\int_\Omega p dV+\int_{\partial\Omega}q dS\right]=0\\&f(v_{(4)},v_{(5)},v_{(6)})=-\left[\int_\Omega(x\wedge p)dV+\int_{\partial\Omega}(x\wedge q)dS\right]=0\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

它们分别表示外力与外力矩平衡，是变分问题(2.13)，(2.14)有解的充要条件。应力解是唯一的；位移解只确定到无穷小刚体位移，因而外加六个条件：

$$\int_\Omega u dV=0,\quad \int_\Omega u\wedge x dV=0 \tag{2.16}$$

则位移解也是唯一的。

由于v_i的任意性，从虚功原理(2.14)*易见它们蕴涵的平衡方程(2.2)和边界条件：

$$\sigma_{ij}(u)n_j-q_i=0 \tag{2.17}$$

反之亦然。一般情况下，静力平衡问题的边界条件可以写成：

$$u_i=g_i,\ 于\partial_1\Omega;\ \sigma_{ij}(u)n_j-q_i=0,\ 于\partial_2\Omega;$$
$$\partial_1\Omega\cup\partial_2\Omega=\partial\Omega,\ \partial_1\Omega\cap\partial_2\Omega=\phi, \tag{2.17)*$$

直接对方程(2.13)求解，其方法称为Ritz法；直接对方程(2.14)求解，其方法称为Galerkin法。

弹性理论中的势能是一个非负的二次泛函；虚功泛函是一个双线性泛函，不论弹性是否处于平衡态状。最初也许是这种生动的事实，启发了数学力学工作者的才智，来深入研究Hilbert空间上二次泛函的极小问题。

4. 协调方程

前面我们用式(2.4)，由位移u定义了应变ε和旋转ω。应变ε是刻划物体形状变化的本质量。位移的三个分量完全确定了应变的六个分量，因而这六个分量不应是完全独立的，所以，给定ε欲求u有解，ε的六个分量之间要满足一组可积性条件，它们称为协调方程：

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \varepsilon)^T=0 \tag{2.18}$$

式中上标"T"表示张量的转置。这是在Ω为单连区域的情况下，存在位移u满足几何方程(2.4)的充要条件。

5. 弹性势能的强制性

设$a(\cdot,\cdot)$：$H\times H\to R$是$H\times H$上的连续双线性形式（泛函），即存在常数$c>0$，使

一定的拓扑下，凸算子是次连续的，次微分具有单调性。因此，我们首先得在固体力学中引入常用的拓扑结果。

1. 拓扑结构

位移u，外力p(和q)，应变ε，应力σ组成的空间分别记作U，P，E，Σ。为使这里的运算能够正常进行，设U与$P=(H^1(\Omega))^3$，∂U与$\partial P=(H^{1/2}(\partial\Omega))^3$；$E$与$\Sigma=(H^0(\Omega))^6$，$\partial E$与$\partial\Sigma=(H^0(\partial\Omega))^6$；$\Omega$可应用Stokes定理。对它们也常用下列内积$[\cdot,\cdot]$或对偶积$\langle\cdot,\cdot\rangle$装配，使之成为Hilbert空间，例如：

$$\left.\begin{aligned}
&[u,v]_U\equiv\int_\Omega\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(v)dV \quad (\forall u,v\in U(\Omega))\\
&[f,g]_P\equiv\int_\Omega f_iL_i^{-1}(g)dV \quad (\forall f,g\in P(\Omega))\\
&[\varepsilon,\epsilon]_E\equiv\int_\Omega\varepsilon_{ij}\epsilon_{ij}dV \quad (\forall\varepsilon,\epsilon\in E(\Omega))\\
&[\sigma,\eta]_\Sigma\equiv\int_\Omega\sigma_{ij}\eta_{ij}dV \quad (\forall\sigma,\eta\in\Sigma(\Omega))
\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\langle u,f(v)\rangle_{UP}\equiv\int_\Omega u_if_i(v)dV \quad (\forall u\in U(\Omega),f\in P(\Omega))\\
&\langle\varepsilon(u),\sigma(v)\rangle_{E\Sigma}\equiv\int_\Omega\varepsilon_{ij}(u)\sigma_{ij}(v)dV \quad (\forall\varepsilon\in E(\Omega),\sigma\in\Sigma(\Omega))
\end{aligned}\right\}\tag{3.1*}$$

式$Lu-g=0$中的L称为弹性算子，它是由位移表写的平衡方程(2.2)中的算符。在不致引起误解时，内积和对偶积等周围的附标将省去不写。由此可见，$P=U^*$，$\Sigma=E^*$，即P与U，Σ与E都是对偶空间。

范数由内积或对偶积按常规确定。

设M为任一集合，M的所有子集作成的集合记作2^M，称T：$X\to2^Y$是从集X到集Y内的**集值映射**，记

$D(T)\equiv\{x\in X，Tx\neq\phi\}$为$T$的有效域，

$R(T)\equiv\{y\in Tx：x\in D(T)\}$为$T$的值域，和

$G(T)\equiv\{[x,y]\in X\times Y：x\in D(T)，y\in Tx\}$为$T$的图。

当$G(T)\subset G(S)$时，称映射S是T的扩张。

对任一映射下T：$X\to2^Y$，逆映射T^{-1}：$Y\to2^X$一定存在，而且

$$T^{-1}y\equiv\{x\in X：y\in Tx\}.$$

设X与Y都是线性拓扑空间，对其中集合M与V，如果关系$\text{Int}V\supset M$，则称V为M的邻域。如果对集$Tx\subset Y$的任一邻域V（或开集V，且$Tx\cap V\neq\phi$），有一x的邻域U，使$T(U)\subseteq V$（或使对任一$y\in U$，有$Ty\cap V\neq\phi$），则称映射T：$X\to2^Y$**具有上(或下）半连续性，既上半又下半连续的映射才有连续性**(Semi-Continuity)。以后称单值映射f：$X\to Y$为算子。对算子f：$X\to Y$及可逆线性算子s：$X\to X_s$与t：$Y\to Y_t$，称f是st-连续的，如果对任一序列$\{x_n\}\subset D(f)$，使$s(x_n)\to s(x)$于X_s，有$t(f(x_n))\to t(f(x))$于Y_t。当s与t分别取恒等算子和对偶算子时，X与Y分别成为X，X^*，X^{**}与Y，Y^*，Y^{**}，常用的st-连续性及引用的（原文

$$a(u,v)\leqslant c\|u\|\|v\| \qquad (\forall u,v\in H) \tag{2.19}$$

我们常用字母V，S与K分别记H中的集、星集与凸集，$f\in H^*$。如果存在常数$\alpha>0$，使

$$a(v,u)\geqslant\alpha\|v\|^2 \qquad (\forall v\in H) \tag{2.20}$$

则双线性形式$a(\cdot,\cdot)$称为强制的。

著名的Korn不等式（参见[10]）断言：设V是Hilbert空间$H\equiv(H^1(\Omega))^3$的一个闭线性子空间，$V\cap V_0=\{\phi\}$，V_0是虚位移集，则存在常数$K(\Omega)>0$，使

$$\int_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(u)dV\geqslant K(\Omega)\|u\|_1^2 \qquad (\forall u\in V) \tag{2.21}$$

式中$\|\cdot\|_1$表示$(H^1(\Omega))^3$的范数$(\|u\|_1^2\equiv\sum\limits_{i=1}^{3}\|u_i\|_1^2)$。

由此易知，第一节中引入的弹性势能泛函是有界线性而且强制的。考虑v在$\partial\Omega$上取常数值的Dirichlet问题，则$V\equiv K\equiv\{v\in(H^1(\Omega))^3:\ v=\text{常数}，于\ \partial\Omega\}$是一个闭凸集。由势能原理及式(2.14)知：势能泛函J在Y上是Gâteaux可微的，它的导算子$J'(u)\in H^*$，且对解$u\in K$，有

$$\langle J'(u),w\rangle=a(u,w)-\langle f,w\rangle\geqslant 0 \qquad (\forall v\in K) \tag{2.22}$$

令$w=v-u$，得弹性力学中的一种不等式问题：

$$u\in K:\ a(u,v-u)-\langle f,v-u\rangle\geqslant 0 \qquad (\forall v\in K) \tag{2.22*}$$

二阶导算子$f''(u)\in\mathcal{L}(H\times H;\ R)$与$u$无关，且

$$\langle J''(u,v),w\rangle=a(v,w) \tag{2.23}$$

如果(2.22)的解$u\in K$存在，则由Taylor展开：

$$J(u+w)-J(u)=\langle J'(u),w\rangle+\frac{1}{2}\langle J''(u,w),w\rangle$$

$$=\langle J'(u),w\rangle+\frac{1}{2}a(w,w)\geqslant\frac{a}{2}\|w\|^2$$

即u是问题(2.22)的解。

当K是以原点为顶点的闭锥时，若u，$v\in K$，则$u+v\in K$。在式(2.22)*中以$u+v$代v，然后令$v=0(\in K)$，再以u代v，就能得到下面的变分原理：

$$u\in K:\ a(u,v)\geqslant\langle f,v\rangle \qquad (\forall v\in K;\ a(u,u)=\langle f,u\rangle) \tag{2.24}$$

当K为以原点为顶点的对顶闭锥时，v与$-v$同属于K，式(2.22)*退化为变分原理：

$$u\in K:\ a(u,v)=\langle f,v\rangle \qquad (\forall v\in K) \tag{2.25}$$

当K为一闭子空间（或$K=H$）时，这些原理即是通常抽象函数在全空间中达到极小的条件：它的一阶导数为0。

但是，当函数不是严格凸时，条件不是充分的。因此，需要分别研究问题的等价性和解的适定性。在数学物理问题中，对应于泛函极值的弱解与相应Euler-Lagrange方程的（强）解具有不同的意义。前者的光滑性一般低于后者，因而必须进行正则性研究。

三、极小问题的等价表示

变分不等式问题本质上是非线的。固体力学问题可以有条件地建立在一个凸框架之中。算子的凸性等价于导算子的单调性，单调性是线性算子正性在非线性算子中的自然推广。在

名称见表1所言，当$f: X\to R$在$D(f)$上是真泛函数，即$f(x)>-w$于$D(f)$，且至少有一点

表1　常用的st-连续性

X_s \ Y_t	Y	Y^*	Y^{**}	备注
X	(强)连续性 (s-)continuity	次连续性 demi-continuity	亚连续性 hemi-continuity	空间自反时，$X^{**}=X$ $Y^{**}=Y$
X^*	全连续性 completely-continuity	弱连续连 w-contiuity		
X^{**}			弱*连续性 w*-continuity	

$x\in D(f)$使$f(x)<+w$，相应于二次连续性，用Fatou引理作连续性定义，即$f(\lim x_n)\leqslant \lim f(x_n)$，$\forall x\in D(f)$，$x_n\to x$，则称$f$具有下次连续性(l. s. c., lower-semi-continuity)；相应于亚连续性，则有下亚连续性。如果对点$x\in X$，有次微分$\partial f(x)(\neq\phi)\subset X^*\equiv Y$，使次梯度不等式

$$f(y)-f(x)\geqslant\langle\phi(x),\ y-x\rangle\qquad(\forall y\in X)\tag{3.2}$$

成立，则称f于点x是次可微的；称任一$\phi(x)\in\partial f(x)$为f在点x的**次梯度**，常记作$Df(x)\equiv\phi(x)$。注意，$\partial f(x)$：$X\to 2^{X^*}$。它在单调算子理论中是极其重要的概念。

映射T：$X\to 2^{X^*}$称为**单调映射**，是指$\forall x$，$y\in D(T)$及$\forall f\in Tx$，$\forall g\in Ty$，不等式

$$\langle f-g,\ x-y\rangle\geqslant 0\tag{3.3}$$

成立。等号仅当$x=y$时成立，则称严格单调的。

由次梯度不等式(3.2)立即得知:∂f是单调映射。$X\times X^*$中的集合$M\equiv\{(x,f),(y,g)$：关于(3.3)成立$\}$称为单调子集。若M不是$X\times X^*$中单调集合的真子集，则M是极大单调集。如果$G(T)$是极大单调集，则T称极大单调映射。如果$(x_n,f_n)\in M$导致$(x,f)\in M$，其中x_n强（弱）收敛于x，f_n弱*（强）收敛于f，则M是次闭的。

当然，亦可用st-可微来系统一描述映射的可微性；变分不等式理论对集值映射和各种拓扑意见自然也有相应的推广。

2. 整体位能的凸性

在空间$E(\Omega)$中，(整体)位能泛函

$$\mathscr{A}(u)\equiv\int_\Omega A(\varepsilon(u))dV\qquad(\forall\varepsilon(u)\in E(\Omega))\tag{3.4}$$

是严格凸的，而且是下亚连续的：如果满足条件：

$$\int_\Omega[\partial^2A(\varepsilon(u))/\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}]\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}dV\geqslant c\int_\Omega\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}dV\tag{3.5}$$

其中$c>0$是一常数，

设$\mathscr{A}$：$E(\Omega)\to R$是（Gâteaux)可微的，即其变分$D\mathscr{A}$：$E(\Omega)\to E^*(\Omega)$存在：

$$\langle D\mathscr{A}(u), v\rangle \equiv \frac{d}{d\lambda}\mathscr{A}(u+\lambda v)|_{\lambda=0} \qquad (\forall u, v\in E(\Omega))$$

我们要证明次梯度不等式1)：

$$\mathscr{A}(u)-\mathscr{A}(v)\geqslant\langle D\mathscr{A}(v), u-v\rangle \qquad (\forall u, v\in E(\Omega)) \tag{3.2}^*$$

等号仅当$u=v$时成立（严格凸）。

由定义(3.3)，不等式(3.2)*可以改写成下列形式：

$$\int_\Omega[A(\varepsilon(u))-A(\varepsilon(v))]dV$$

$$\geqslant\int_\Omega[\partial A(\varepsilon(v))/\partial\varepsilon_{ij}]\delta\varepsilon_{ij}dV;$$

$$\int_\Omega[A(\varepsilon(v))-A(\varepsilon(u))]dV$$

$$\geqslant-\int_\Omega[\partial A(\varepsilon(u))/\partial\varepsilon_{ij}]\delta\varepsilon_{ij}dV.$$

将上两式相加，由条件(3.3)，存在$w\equiv u+\lambda(u-v)$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，使

$$0\geqslant-\int_\Omega[\partial A(\varepsilon(u)/\partial\varepsilon_{ij}-\partial A(\varepsilon(v))/\partial\varepsilon_{ij}]\delta\varepsilon_{ij}dV$$

$$=-\int_\Omega[\partial^2A(\varepsilon(w))/\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}]\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}dV$$

$$\geqslant-c\int_\Omega\delta\varepsilon_{ij}\delta\varepsilon_{kl}dV \tag{3.6}$$

等号仅当$u=v$时成立。

如果点到$\{u_n\}$弱收敛于v, $u_n\rightharpoonup v$，则$\langle D\mathscr{A}(v),\ u_n-v\rangle=0$，因而由式(3.2)*,

$$\lim\ \inf\mathscr{A}(u_n)\geqslant\mathscr{A}(v) \qquad (\forall v\in E(\Omega)) \tag{3.7}$$

即$\mathscr{A}(v)$是下亚连续的。因此在闭凸集$K\subset E(\Omega)$上某些有界性假定2)下，极小问题解的存在性是Weienstrass定理的直接推论，而且位能泛函的凸性等价于梯度算子$D\mathscr{A}$的单调性。先证必要性，由式(3.2)*有：

$$\mathscr{A}(v)-\mathscr{A}(u)\geqslant\langle D\mathscr{A}(u), v-u\rangle \tag{3.2}^{**}$$

式(3.2)*与(3.2)**相加，得$D\mathscr{A}$的单调性

$$\langle D\mathscr{A}(u)-D\mathscr{A}(v), u-v\rangle\geqslant0 \tag{3.8}$$

再证充分性，令

$$P(\lambda)\equiv\mathscr{A}(v+\lambda(u-v))-\mathscr{A}(v)-\lambda(\mathscr{A}(u)-\mathscr{A}(v))$$
$$(0\leqslant\lambda\leqslant1)$$

为证$\mathscr{A}$的凸性，只需证明$P(\lambda)\leqslant0$即可。易见$P(0)=P(1)=0$，$P(\lambda)$可微。用反证法证，设$P(\lambda)$在点ξ处达到极大值：$P(\xi)>0$，$P'(\xi)=0$，$0<\xi<1$。取$\lambda>\xi$，由$D\mathscr{A}$的单调性，则

1) 由$\mathscr{A}$的凸性应有$\mathscr{A}(v+\lambda(u-v))-\mathscr{A}(v)\leqslant\lambda(\mathscr{A}(u)-\mathscr{A}v))$，不等式两端除以$\lambda$，并令$\lambda\to0$即得式(3.2)*.

2) 例如要求$\mathscr{A}(v)>-\infty$，$\forall v\in K\subset E(\Omega)$；且至少有一点$v\in K$使$\mathscr{A}(v)<+\infty$，此时$\mathscr{A}(v)$即为$K$上的真泛函，$K$是一个凸集，若令凸泛函$\mathscr{A}(v)\equiv\infty$于一切$v\in E(\Omega)-K$，$\mathscr{A}(v)$即扩张为整个$E(\Omega)$上的真凸泛函.

$$P'(\lambda)-P'(\xi)=\langle D\mathscr{A}(v+\lambda(u-v))-D\mathscr{A}(v+\xi(u-v)),u-v\rangle$$
$$=(\lambda-\xi)^{-1}\langle D\mathscr{A}(v+\lambda(u-v))-D\mathscr{A}(v+\xi(u-v)),$$
$$(v+\lambda(u-v)-(v+\xi(u-v))\rangle\geqslant 0.$$

即$P(\lambda)$在$(\xi,1)$中不减，$P(\xi)\leqslant P(1)=0$，与$P(\xi)>$矛盾。$\mathscr{A}$的凸性得证。更详细的论述参见[13]。

3． 等价表示(参见[5])

本节我们将在Banach空间B中给出式(2.13)型极小问题：求

$$u\in K:\ F(u)=\inf F(v)\qquad(\forall v\in K)\tag{$*$}$$

的一些常用的等价表示（形式）。我们要求式中F：$B\to R$是次可微真泛函，K是B中的闭凸集，∂F：$K\to 2^{B^*}$。由次微分不等式(3.2)可见，F在点$x\in D(\partial F)$取极小值的充要条件是：$0\in D(\partial F)$。由于∂F的单调性，可取∂F的一个单值截面DE：$K\to B^*$，设DF亚连续，得问题($*$)的**线性形式**：求

$$u\in K:\ \langle DF(v),v-u\rangle\geqslant 0\qquad(\forall v\in K)\tag{Ⅰ}$$

在形式(Ⅰ)中，以$v_\lambda\equiv(1-\lambda)u+\lambda v(\lambda\in(0,1))$代替$v$，根据$DF$的亚连续，令$\lambda\to 0$，即得问题($*$)的**梯度形式**：求

$$u\in K:\ \langle DF(u),v-u\rangle\geqslant 0\qquad(\forall v\in K)\tag{Ⅱ}$$

根据次梯度不等式(3.2)，由形式(Ⅱ)得问题($*$)的**直接形式**：求

$$u\in K:\ F(u)\leqslant F(v)\qquad(\forall v\in K)\tag{Ⅲ}$$

形式(Ⅲ)与问题($*$)的等价性是显然的。

形式(Ⅰ)告诉我们，问题($*$)的解集是凸的。

当F不能次微分时，一般改用F的满图(epigraph)[1)]来刻划极小元。显然问题($*$)等价于求$[u,F(u)]$使泛函$\tilde{F}([v;\ \lambda])=\lambda$在凸集$\tilde{K}$上达到极小。但凸泛函$\tilde{F}$是$G$-可微的，它在$\tilde{K}$上的梯度显然是一个常数：$D\tilde{F}([v;\ \lambda])=[0;1]$。于是由形式(Ⅱ)，我们有**满图形式**：求

$$\tilde{u}\in\tilde{K}:\ \langle D\tilde{F}(\tilde{u}),\tilde{v}-\tilde{u}\rangle\geqslant 0\qquad(\tilde{v}\in\tilde{K})\tag{Ⅳ}$$

为简单起见，在Hilbert（或自反Banach）空间$H(B)$中，$H^*(B^*)$是它的对偶空间，$(\cdot,\cdot)$为H中的内积，Riesz同构J：$H\to H^*$，由恒等式$\langle Ju,v\rangle\equiv(u,v)$来定义[2)]，其中$u$，$v\in H$，逆算子记作$J^{-1}$：$H^*\to H$。因此，$\langle DF(u),v\rangle=(J^{-1}DF(u),v)$，$H$到凸集$K$的Riesz投影$P_k$：$H\to K$表示$u=P_kw$是极小问题：求

$$u\in K:\ \|u-w\|\leqslant\|v-w\|\qquad(\forall v\in K,\ w\in H)\tag{3.9}$$

的唯一解（如果它存在），其中$\|\cdot\|\equiv(\cdot,\cdot)^{1/2}$，令

$$\left.\begin{aligned}&w\equiv u-\rho J^{-1}DF(u)\qquad(\rho>0)\\&\Phi(v)\equiv\frac{1}{2}\|v-w\|^2,\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

则$D\Phi(u)=J(u-w)$。由形式(Ⅱ)得

$$\langle D\Phi(u),v-u\rangle=\langle J(u-w),v-u\rangle=(u-w,v-u)$$

1) 对线性空间X上的任何实泛函F，积空间$\tilde{X}\equiv X\times R$的子集$\mathrm{eg}F\equiv\{[v;\ \lambda]\in\tilde{X};\ F(v)\leqslant\lambda\}$称为$F$的满图。交集$\tilde{K}\equiv\mathrm{eg}F\cap(K\times R)=\{[v;\ \lambda]\in\tilde{X};\ v\in K,\ F(v)\leqslant\lambda\}$是凸集。一般记$\tilde{v}\equiv[v;\ \lambda]\in\tilde{K}$，$\tilde{R}\equiv(-\infty,\ +\infty]$，$\tilde{F}\equiv[F,\ 1]$。$F$是下亚连续的，则$\mathrm{eg}F$在$\tilde{X}$中是闭的，反之亦然。

2) 在Hilbert空间中，J是恒等算子，P_k是单调算子。

$$=(u-(u-\rho J^{-1}DF(u)),v-u)$$
$$=\rho(J^{-1}DF(u),v-u)=\rho\langle DF(u),v-u\rangle\geqslant 0 \qquad (\forall v\in K)$$

因此，由形式(Ⅱ)，得问题(∗)的等价形式，**不动点形式**：求

$$u\in K:\ u=P_k[I-\rho J^{-1}DF]u \qquad (\rho>0) \tag{Ⅴ}$$

式中I是恒等算子。

由式(Ⅴ)得到解题的一种迭代方法，称为**梯度投影法**：

$$u_{n+1}=P_k[I-\rho J^{-1}DF]u_n \qquad (n\in N) \tag{3.11}$$

选择$\rho>0$使$P_k[I-\rho J^{-1}DF]$成一压缩算子，则近似解列$\{u_n\}$收敛于真解$u\in K$。

形式Ⅰ，Ⅱ，Ⅳ都是变分不等式。

在固体力学中问题常可归结为某一凸集上求一凸泛函的极小问题(∗)，为能达到极小值，泛函的下半次连续性起着关键作用。

4. 物理方程与界边条件

上面我们看到，变分原理对应的能量泛函是可微的，变分不等式对应的能量泛函多是不可微的，转而退而研究次可微。由式(3.2)知道：次梯度是单调算子。所以变分不等式就和单调算子结下了不解之缘，连物理方程与边界条件均如此，例如在岩体力学中，它们的一种可能和有用的推广为：

i) 物理方程　推广式(2.6)和(2.8)于次微的场合，得：

$$w(\varepsilon(x))+w^c(\sigma(x))=\varepsilon_{ij}(x)\sigma_{ij}(x),\ \text{a.e.于}\Omega \tag{3.12}$$
$$\sigma(x)\in\partial w(\varepsilon(x)),\ \varepsilon(x)\in\partial w^c(\sigma(x)),\ \text{a.e.于}\Omega \tag{3.13}$$

式中能量密度泛函w与余能密度泛函w^c都是凸下次连续真泛函。令

$$\left.\begin{aligned}W(\varepsilon)&\equiv\begin{cases}\int_\Omega w(\varepsilon(x))dV & (w(\varepsilon)\in L_1(\Omega))\\ \infty & (\text{其余情况})\end{cases}\\ W^c(\sigma)&\equiv\begin{cases}\int_\Omega w^c(\sigma(x))dV & (w^c(\sigma)\in L^1(\Omega))\\ \infty & (\text{其余情况})\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

有

$$W(\varepsilon)+W^c(\sigma)=\langle\varepsilon,\sigma\rangle \tag{3.12*}$$
$$\sigma\in\partial W(\varepsilon),\varepsilon\in\partial W^c(\sigma) \qquad (\varepsilon,\sigma\in(L_2(\Omega))^6) \tag{3.13*}$$

式中能量泛函W与余能泛函W^c仍是凸下次连续真泛函。这组本构关系体现了介质的变形特征的多值性与不光滑性，也包括了许塑性条件。

ii) 边界条件　记$p\equiv\{p_i\}$是边界$\partial\Omega$上的应力矢量，$n\equiv\{n_i\}$是$\partial\Omega$的单位外法向矢量，$p_i\equiv\sigma_{ij}n_j$，p可以分解为法向和切向矢量。

$$p_n\equiv p_in_i,\ \ p_t=p-p_n \tag{3.15}$$

位移u亦可作相应分解：$u\equiv u_n+u_t$。类似地有：

$$j(u(x))+j^c(p(x))=u_i(x)p_i(x),\ \text{a.e.于}\partial\Omega \tag{3.16}$$
$$p(x)\in\partial j(u(x)),u(x)\in\partial j^c(p(x)),\ \text{a.e.于}\partial\Omega \tag{3.17}$$

式中能量密度泛函与余能密度泛函j^c都是凸下次连续真泛函。令

$$\Phi(u)\equiv\begin{cases}\int_{\partial\Omega}j(u(x))dS & (j(u)\in L_1(\partial\Omega))\\ \infty & (\text{其余情况})\end{cases}$$

$$\Phi^c(p)\equiv\begin{cases}\int_{\partial\Omega}j^c(p(x))dS & (j^c(p)\in L_1(\partial\Omega))\\ \infty & (\text{其余情况})\end{cases} \tag{3.18}$$

有

$$\Phi(u)+\Phi^c(p)=\langle u,p\rangle \tag{3.16*}$$

$$p\in\partial\Phi(u),u\in\partial\Phi^c(p)\qquad(u,p\in(L_2(\partial\Omega))^3) \tag{3.17*}$$

式中能量泛函Φ与余能泛函Φ^c仍是凸下次连续真泛函。

通常的边界条件(2.17)*相当于取：

$$j_i(u_i)=\begin{cases}0 & (u_i=q_i)\\ \infty & (\text{其余情况})\end{cases} \tag{3.19}$$

Winkler边界：

$$p_n=ku_n\qquad(k>0) \tag{3.20}$$

相当于取：

$$j_n(u_n)=\frac{1}{2}ku_n^2 \tag{3.20*}$$

更多的信息请参见文献[14]。

四、抽象形式的不等式问题

1. 稳定型确定性变分不等式

这类不等式问题是椭圆型方程边值问题的抽象模式。例如，弹性静力问题就是椭圆型的。

下面的定理是很重要的（参见[2]）。

定理4.1 （Lions-Stampacchia定理）设$a(u,v)$是连续强制双线性形式，K是Hilbert空间H中的闭凸集，则变分不等式(2.22)*有唯一解，且H^*到H的算子$f\to u$是连续的。

证明 我们知道，对Riesz同构J：$H\to H^*$，有

$$\|J\|_{\mathscr{L}(H^*,H)}=\|J^{-1}\|_{\mathscr{L}(H,H^*)}=1。 \tag{4.1}$$

定义算子$A\in\mathscr{L}(H,H^*)$：

$$a(u,v)\equiv\langle Au,v\rangle,\ u,v\in H;\ \|A\|_{\mathscr{L}(H,H^*)}\equiv M \tag{4.2}$$

i） 证连续性与唯一性 设$f_i\in H^*$，$u_i\in K$ $(i=1,2)$是不等式问题(2.22)*的解：

$$a(u_i,v-u_i)\geqslant\langle f_i,v-u_i\rangle\qquad(\forall v\in K) \tag{4.3}$$

在式(4.3)中，对$i=1,2$分别令$v\equiv u_2,u_1$，然后相加，得

$$-a(u_1-u_2,u_1-u_2)\geqslant-\langle f_1-f_2,u_1-u_2\rangle.$$

利用强制性(2.20)，有

$$\alpha\|u_1-u_2\|^2\leqslant\|f_1-f_2\|_{H^*}\cdot\|u_1-u_2\|$$

即得解的连续性：

$$\|u_1-u_2\|\leqslant\alpha^{-1}\|f_1-f_2\|_{H^*} \tag{4.4}$$

令$f_1=f_2$，再由式(4.4)得解的唯一性。

ii） 证$a(u,v)\equiv(u,v)$的特殊情况的存在性，此时问题(2.22)*成为：求

$$u\in K:\ (u,v-u)\geqslant\langle f,v-u\rangle=(J^{-1}f,v-u)\qquad(\forall v\in K)$$

即求

$$u\in K:\ (u-J^{-1}f,v-u)\geqslant 0\qquad(\forall v\in K) \tag{4.5}$$

可见：u是在闭凸集K中按范数$\|\cdot\|$的意义与$J^{-1}f$的距离为极小的元。或说解u是$J^{-1}f$在K上按内积$(\cdot,\cdot)$的投影；因为K是H的闭凸集，根据投影定理知，解u存在且唯一：

$$u=P_kJ^{-1}f \tag{4.6}$$

式中P_k即(Ⅴ)中投影算子。

$$\|u-J^{-1}f\|\leqslant\|v-J^{-1}f\|\qquad(\forall v\in K) \tag{4.5*}$$

iii） 证一般情况下的存在 利用等价表示(Ⅴ)，令

$$\langle\Phi(u),v\rangle\equiv(u,v)-\rho[a(u,v)-\langle f,v\rangle]. \tag{4.7}$$

选ρ，使$0<\rho<2\alpha M^{-2}$，则$\theta\equiv1+M^{-2}\rho^2-2\alpha\rho<1$。对$u_i\in H$作估计，得

$$\begin{aligned}\|\langle\Phi(u_1)-\Phi(u_2),v\rangle\|&=\|(u_1-u_2,v)-\rho a(u_1-u_2,v)\|\\&\leqslant\|(u_1-u_2)-\rho J^{-1}A(u_1-u_2)\|\cdot\|v\|\\&\leqslant\theta\|u_1-u_2\|\cdot\|v\|\end{aligned} \tag{4.8}$$

由(ii)，存在唯一的$w\in K$，使

$$\left.\begin{aligned}&(w,v-w)\geqslant\langle\Phi(u),v-w\rangle\qquad(\forall v\in K)\\&w\equiv P_kJ^{-1}\Phi(u)\equiv Tu\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

式(4.9)定义了H到K的算子$u\to Tu$，由式(4.8)，有

$$\begin{aligned}\|Tu_1-Tu_2\|&=\|P_kJ^{-1}\Phi(u_1)-P_kJ^{-1}\Phi(u_2)\|\\&\leqslant\|\Phi(u_1)-\Phi(u_2)\|\leqslant\theta\|u_1-u_2\|.\end{aligned}$$

因为$\theta<1$，T是压缩的，所以有唯一不动点$u\in K$，使

$$u=Tu,$$

u满足方程(4.9)，

$$\begin{aligned}&(u,v-u)\geqslant\langle\Phi(u),\ v-u\rangle\\&\quad=(u,v-u)-\rho[a(u,v-u)-\langle f,v-u\rangle]\qquad(\forall v\in K)\end{aligned}$$

由于$\rho>0$，所以$u\in K$是不等式(2.22)*的唯一解。

注意：令$F(v)\equiv\langle F,v\rangle$：

$$F(v)\equiv\begin{cases}-\langle f,v\rangle & (v\in K)\\+\infty & (v\overline{\in}K)\end{cases} \tag{4.10}$$

则$F(v)$是真凸下次连续泛函，而且，反过来，对于真凸下次连续泛函F，$\forall\lambda>0$以及线性连续泛函$v\to L(v)$，下面的问题(**)，有唯一解

$$\begin{aligned}&u\in V:\ (u,u)+\lambda F(u)+L(u)\\&\qquad\leqslant(u,v)+\lambda F(v)+L(v)\qquad(\forall v\in H)\end{aligned} \tag{**}$$

如果(**)有唯一解时，不等式问题(2,22)*也有唯一解（参见[2]），这个结果改进了定理4.1。

我们指出：在 Riesz 表示定理的证明中，关键之一是保证泛函的核应是闭子空间。为了

保证闭性，通常要求泛函是连续的。实际上，只须它是下次连续的，核的闭性就能得到保证。表示定理也就成立。对对称双线性势能形式（虽然很特殊，但对固体力学却很重要），有下面的定理，它放宽了对强制性（这是个苛刻的条件）以及区域凸性的要求，且不附加其它条件。

定理4.2 设B^*是自反Banach空间B的对偶空间，$V\subset B$是一闭子集，$a(u,v)$是B上的下次连续对称双线性形式，则对$\forall f\in B^*$，极小问题(2.12)～(2.13)有等价表示：

$$a(v+u,v-u)\geqslant\langle f,v-u\rangle\quad(\forall v\in V)\tag{4.11}$$

而且至少有一个解$u\in V$。

证明 双线性形式$a(\cdot,\cdot)\equiv[\cdot,\cdot]$可看作空间$B$的内积。对应的内积范数记作$|\cdot|$，Riesz同构算子记作$\sigma$，则

$$f(v)\equiv\langle f,v\rangle\equiv a(\sigma f,v)\equiv[\sigma f,v]\quad(\forall v\in B)\tag{4.12}$$

由式(2.12)，有

$$\begin{aligned}J(v)&=\frac{1}{2}[v-\sigma f,\ v-\sigma f]-\frac{1}{2}[\sigma f,\sigma f]\\&=\frac{1}{2}(|v-\sigma f|^2-|\sigma f|^2).\end{aligned}\tag{4.13}$$

i） 证等价性 显见

$$\begin{aligned}2[J(v)-J(u)]&=[\sigma f-v,\ \sigma f-v]-[\sigma f-u,\sigma f-u]\\&=[(\sigma f-u)-(v-u),(\sigma f-u)-(v-u)]\\&\quad-[\sigma f-u,\ \sigma f-u]\\&=a(v+u,\ v-u)-2\langle f,v-u\rangle\geqslant 0,\\&\qquad(\forall v\in V).\end{aligned}$$

ii） 证解的存在性 研究极小化序列$\{J(u_n)\}$或$\{u_n\}\subset V$。由关系(4.13)，有常数c，使

$$|u_n-\sigma f|^2=2J(u_n)+|\sigma f|^2\leqslant c<\infty,$$

所以$\{u_n-\sigma f\}$是强有界点列。因此，存在弱收敛子列（不妨仍记作$\{u_n-\sigma f\}$），使极限元

$$u-\sigma f=w-\lim_{n\to\infty}(u_n-\sigma f)\tag{4.14}$$

唯一存在。由关系(4.13)，对给定的$\varepsilon>0$，有整数$N>0$，当$n\geqslant N$时，关系

$$|u_n-\sigma f|^2-|u-\sigma f|^2=2[J(u_n)-J(u)]$$

蕴涵

$$||u_n-\sigma f|-|u-\sigma f||\leqslant\varepsilon$$

或

$$\lim_{n\to\infty}|u_n-\sigma f|=|u-\sigma f|\tag{4.15}$$

由式(4.14)～(4.15)，知

$$\begin{aligned}|u_n-u|^2&=|(u_n-\sigma f)-(u-\sigma f)|^2\\&=|u_n-\sigma f|^2-2[u_n-\sigma f,u-\sigma f]+|u-\sigma f|^2\to 0.\end{aligned}$$

所以序列$\{u_n\}$强收敛于u，由V的闭性，$u\in V$。

当然，这里V闭是指对范数$|\cdot|$而言的。如果$a(\cdot,\cdot)$是强制的，则$|\cdot|$与B的范数才是等价的。

对一般集合V，问题(4.11)的解不是唯一的（参见[15]）；当$V\equiv K$时，它是对称双线性情况下定理4.1的推广。这就是说，弹性理论中的许多问题是有解的，对问题(4.11)中等号不成立的f，解是唯一的。

定理4.3　(Lax-Milgram-Babska 定理)　设U，V是两个Hilbert空间，双线性形式$b(\cdot,\cdot)$：$U\times V\to R$满足下列条件：

$$b(u,v)\leqslant\alpha\|u\|_U\|v\|_V\quad(\forall u\in U,\ \forall v\in V,\ \alpha>0)\tag{4.16}$$

$$\inf_{\substack{u\in U\\ \|u\|_U=1}}\ \sup_{\substack{v\in V\\ \|v\|_V\leqslant1}}|b(u,v)|\geqslant\beta>0;\tag{4.17}$$

$$\sup_{u\in U}b(u,v)>0\qquad(v\neq\phi)\tag{4.18}$$

则变分问题：

$$b(u,v)=g(v)\qquad(\forall g\in V^*,\ \forall v\in V)\tag{4.19}$$

存在唯一解u_0连续依赖于数据，即

$$\|u_0\|_U\leqslant\beta^{-1}\|g\|_{V^*}\tag{4.20}$$

证明　对任一固定的$u\in U$，由条件(4.16)，$b(u,v)$定义V上的线性泛函F_u：

$$F_u(v)\equiv b(u,v),$$

$$\|F_u\|_{V^*}\equiv\sup_{v\in V}\frac{|F_u(v)|}{\|v\|_V}\leqslant\alpha\|u\|_U<\infty.$$

由Riesz表示定理，存在唯一元v_F，使$F_u(v)\equiv(v_F,v)_V$，v_F线性依赖于u，记作$v_F\equiv Bu$，B：$U\to V$是线性算子，于是

$$b(u,v)=F_u(v)=(Bu,\ v)_V,$$

$$\|Bu\|_V=\|F_u\|_{V^*}\leqslant\alpha\|u\|_U<\infty,$$

即B是连续的。而且，B还是下有界的，即

$$\|Bu\|_V=\sup_{v\in V}\frac{|b(u,v)|}{\|v\|_V}\geqslant\sup_{\|v\|_V\leqslant1}\|u\|_U\left|b\left(\frac{u}{\|u\|_U},\ v\right)\right|$$

$$\geqslant\|u\|_U\inf_{\|w\|_U=1}\ \sup_{\|v\|_V\leqslant1}|b(w,v)|\geqslant\beta\|u\|_U\tag{4.21}$$

再证$R(B)=V$，由于下有界线性算子B在值域$R(B)$中有连续（右）逆B^{-1}，如令$Bu=v$，则

$$\|v\|_V=\|Bu\|_V\geqslant\beta\|B^{-1}v\|_U,$$

即

$$\|B^{-1}v\|_U\leqslant\beta^{-1}\|v\|_V.$$

因此，易见$R(B)$是闭的。再证明$R(B)$的直交补$R^{\perp}(B)$是空的。
用反证法，设有$\phi\neq v_0\in R(B)$使

$$(Bu,v_0)_V=0$$

但由条件(4.18)，知

$$\sup_{u\in U}(Bu,v_0)_V=\sup_{u\in U}b(u,v_0)>0\ \ (v_0\neq\phi)$$

所以$v_0=\phi$，$R(B)=V$，逆算子B^{-1}存在。

i)　证存在性　由Riesz表示定理，$g(v)\equiv(v_g,v)_V\,(v\in V)$，令$f\equiv v_g$，由条件(4.16)，问题(4.19)成为：

$$b(u,v)=(Bu,v)_V=(f,v)_V\qquad(\forall v\in V)$$

因而存在解$u_0 \equiv B^{-1}f$。而且式(4.20)成立：

$$\|u_0\|_U \leqslant \|B^{-1}\|_{\mathscr{L}(V,U)}\|f\|_V \leqslant \beta^{-1}\|g\|_{V^*}$$

ii） 证唯一性 设$u_* \neq u_0$也是问题(4.19)的解，则

$$0 = \|Bu_* - Bu_0\|_V = \|B(u_* - u_0)\|_V \geqslant \beta\|u_* - u_0\|_U$$

即$u_* = u_0$。

条件(4.17)～(4.18)称为弱强制条件。

当$U=V=H$，弱强制条件换成强制条件，上面的定理就是原来的Lax-Milgram引理(参见[16])。

下面的熟知定理刻划了可微凸泛函与单调算子之间的关系（参见[5]）。

定理4.4 设K是自反 Banach 空间B中的一个凸集，J是K上的Gâteaux可微泛函，$A \equiv \text{grad}J$：$B \to B^*$，则J是凸泛函的充要条件是：A是亚连续单调算子。

定理4.5 设A为空间B上的凸泛函J的梯度算子，J是B中的有界弱闭子集V上下亚连续，$u \in \text{int}(V)$是对$\forall v \in V$的变分直接形式$J(u) \leqslant J(v)$的解，则u也是变分问题

$$\langle A(u), v\rangle = 0 \qquad (\forall v \in B) \tag{4.22}$$

的解。

定理4.6 在前面定理的条件下，如果$V \equiv K$是凸闭集，J的二阶Gâteaux 微商J''存在，且对$\gamma(t)$(当$t \to \infty$时，$\gamma(t) \to \infty$)，有

$$J''(u)(v,v) \equiv \langle J''(u,v), v\rangle \geqslant \gamma(\|v\|_B)\|v\|_B \qquad (\forall v \in B) \tag{4.23}$$

则变分不等式

$$\langle A(u), v-u\rangle \geqslant 0 \qquad (\forall v \in B) \tag{4.24}$$

有解$u \in K$。如果$u \in \text{int}(K)$，则u是问题(4.22)的解。

关系(4.23)也是一种强制的条件。

变分极小问题的解u是σf在K上的投影，对 Hilbert 空间H来说，可以视为定义了H^*上的元f到$K \subset H$上的元u的一个映射。只有当K是个子空间，J是二次泛函时，这个映射才是线性的。所以说：一般变分问题与变分不等式问题本质上都是非线性的。

2. 发展型确定性变分不等式

热弹性问题、弹性动力等抛物型和双曲型单边约束问题属于这类不等式问题。例如

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + Bu - f = 0 \text{于} Q \equiv \Omega \times (0,\infty) \\ &u \geqslant 0, \ Cu \geqslant 0 \text{于} \partial Q \equiv \partial\Omega \times [0,\infty) \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

其中算子B与C的形式因问题而异。

在 Hilbert 空间H的框架中来讨论。对偶积、内积及由此诱导出来的$L_2(H)$范数均用粗体记号表示

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \equiv \int_0^T \langle\cdot,\cdot\rangle dt, \quad [\cdot,\cdot] \equiv \int_0^T [\cdot,\cdot] dt,$$

$$|\cdot| \equiv \int_0^T \|\cdot\| dt.$$

这里$T = \infty$。

令

$$\mathrm{a}(u,\phi)\equiv\mathrm{b}(u,\phi)-\langle u,\phi'\rangle,\quad \mathrm{b}(u,\phi)\equiv\langle Bu,\phi\rangle$$

是强制双线性形式，$\phi'\equiv\partial\phi/\partial t$按分布导数理解，而且$\Phi\subset\mathrm{H}$，

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{H}\equiv\{v\in L_2(H(\Omega)),\ v'\in L_2(H^*(\Omega)),\ v(x,0)=0\}\\&\Phi\equiv\{\phi\in L_2(H(\Omega)),\ \phi'\in L_2(L_2(\Omega)),\ \phi(x,0)=0\}\\&\mathrm{K}\equiv\{v\in H:\ v|_Q\geqslant 0\ (\mathrm{a\cdot e.})\}\end{aligned}\right\}\tag{4.26}$$

此时，问题(4.25)等价于求

$$u\in\mathrm{K}:\ \mathrm{a}(u,\phi-u)\geqslant\langle f,\phi-u\rangle\qquad(\forall\phi\in\mathrm{K}\cap\Phi)\tag{4.25*}$$

粗略地说，此时变分不等式问题(4.25)*存在唯一解$u\in\mathrm{K}$。存在性证明可用椭圆化方法，唯一性证明，由于$u\in\mathrm{K}$，不一定$u\in\Phi$，因而须在Φ中构造一个近似解序列来实现。

3. 随机性变分不等式

出人意料的是，无论是稳定型还是发展型的某些随机方程仍然可以化为上述变分不等式问题。下面试以发展型为例作简略介绍。

随机力学（几何）的问题可以用Ito微分方程

$$dy=g(y)ds+\sigma(y)dw(s),\ y(t)=x\qquad(s>t)\tag{4.27}$$

来描述，方程的解记作$y_{xt}(s)$。

从$x\in\Omega$于时间t出发，用τ_{xt}记$s>t$而使$y_{xt}(s)\in\Omega$的最小值，考虑停止时间$\theta\leqslant\inf(\tau_{xt},T)\equiv\tau_{xt}\wedge T$，对给定的$\theta$，下式称为**性能泛函**：

$$J_{xt}(\theta)\equiv E\left[\int_t^\theta f(y_{xt}(s),s)ds+\psi(y_{xt}(\theta),\theta)\chi_{\theta<\tau_{xt}\wedge}\right]\tag{4.28}$$

式中$f(x,t)$与$\psi(x,\theta)\in c(\bar{\Omega}\times(t,T))$，$\chi_{\lambda<\mu}$是$\lambda<\mu$的集合的**特征函数**。

最优性能泛函

$$u(x,t)\equiv\inf J_{xt}(\theta)\qquad(\theta\leqslant\tau_{xt}\wedge T)\tag{4.29}$$

可以表示成下列方程的解（参见[9]）：

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{\partial u}{\partial t}+Bu-f\leqslant 0,\ u-\psi\leqslant 0\\&\left(-\frac{\partial u}{\partial t}+Bu-f\right)(u-\psi)=0\ \text{于}\ Q\equiv\Omega\times(0,T)\end{aligned}\right\}\tag{4.30}$$

式中算子A及定解条件分别为：

$$\left.\begin{aligned}&Au\equiv-a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-g_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\\&u(x,t)=0\ \text{于}\ \partial\Omega,\ u(x,T)=0\ \text{于}\ \Omega\end{aligned}\right\}\tag{4.31}$$

相重指标要求和。为简单且与前一小节一致，我们改变时间方向，并考虑A的散度形式，则式(4.31)中

$$Au\equiv-\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+g_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\tag{4.31*}$$

式(4.30)中$\partial u/\partial t$前应取“+”号，相应地公式编号改为(4.30)*。

令

$$\mathcal{V}=\{v\in L_2(0,T;\ v):\ v(x)\leqslant\psi(x,\theta),\ \text{a.e.于}\Omega,\ v'\in L_2(0,T;\ v')\} \tag{4.32}$$

则问题(4.30)*在(4.31)之定解条件下等价于变分不等式问题，求

$$u(t)\in\mathcal{K}:\ \mathbf{a}(u,v-u)+\frac{1}{2}|v(0)|^2\geqslant\langle f,v-u\rangle \quad (v\in\mathcal{K}) \tag{4.33}$$

这里

$$\mathbf{b}(u,v)=\int_0^T\int_\Omega\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+g_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}v\right]dxdt \tag{4.34}$$

这方面的主要结果是：变分不等式(4.33)的（弱）解中存在一个最大解。

发展型变分不等式问题的解的正则性至今仍未解决。不但如此，我们知道，变分不等式弱解的存在性是较易证明的，但正则性是对一些极为特殊的问题彻底研究过；特别是在高维情况下进展不大（参见[9,18]）。

五、固体力学中的不等式问题

不等式问题吸引人们注意的根本原因是它对实际问题有广泛的应用。这里提到的一些问题仅是举例性。

1. 障碍问题（参见[17]）

在障碍物χ：$\bar{\Omega}\to R$上，沿闭曲线Γ上张起一块薄膜。自然，薄膜接触障碍物的区域事先不知道的。问题是要求u，使得

$$\left.\begin{array}{l}-\Delta u=f,\ u>\chi;\\ u\geqslant\chi\text{于}\Omega,\ u=0\text{于}\Gamma\end{array}\right\} \tag{5.1}$$

由第二节易知，薄膜的能量泛函

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dV-\int_\Omega fv\,dV \tag{5.2}$$

u，v 是薄膜的可能位移，f 是作用力。令

$$\left.\begin{array}{l}K=\{v\in H_0^1(\Omega):\ v\geqslant\chi\text{于}\Omega\text{上a.e.}\}\\ a(u,v)=\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dV\\ f(v)=\int_\Omega fv\,dV,\ f\in L_2(\Omega)\end{array}\right. \tag{5.3}$$

则问题(5.1)等价于$J(v)$在K的极小问题(*)，等价于不等式问题(2.22)*。由定理4.1，存在唯一解$u\in K$。

在非线性问题中，特别是障碍问题中，尽管数据给得非常光滑，而解并不是光滑的。

2. 广义弹性力学问题(参见[19])

为简化书写，记$\partial(\quad)/\partial x_i\equiv\partial_i(\quad)\equiv(\quad)_{,i}$。考虑非线性弹性静力学问题：

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij,j}+f_i=0\text{于}\Omega\\&\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\text{于}\Omega\\&\sigma\in\partial W(\varepsilon)\text{于}\Omega,u_i=\hat{u}_i\text{于}\partial_1\Omega,\\&p_i=\hat{p}_i\text{于}\partial_2\Omega,-p\in\partial_j(u)\text{于}\partial_3\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

式中符号和条件见第二节，∂ 是次微分，$\partial\Omega\equiv\partial_1\Omega+\partial_2\Omega+\partial_3\Omega$，$\partial_1\Omega\cap\partial_2\Omega\cap\partial_3\Omega=\phi$。设

$$K\equiv\{v\in(H^1(\Omega))^3;\ v=\hat{u}\text{于}\partial_1\Omega\}\tag{5.5}$$

弹性体的能量泛函为

$$J(v)\equiv W(\varepsilon(v))+\Phi(v)-\langle f,v\rangle-\int_{\partial_2\Omega}p_iv_idS\tag{5.6}$$

问题(5.4)对应的变分极小问题，求

$$u\in K;\ J(u)=\inf J(v)\qquad(\forall v\in K)\tag{5.7}$$

等价于变分不等式：求

$$\begin{aligned}&u\in K;\ W(\varepsilon(v))-W(\varepsilon(u))+\Phi(v)-\Phi(u)\\&\qquad\geqslant\langle f,v-u\rangle+\int_{\partial_2\Omega}p_iv_idS\qquad(\forall v\in K)\end{aligned}\tag{5.8}$$

当 $\mathrm{meas}\partial_1\Omega>0$时，由类似于式(3.7)下的理由，上述问题的解存在，解集是一个凸集；当W严格凸时，存在唯一解。

相应于问题(5.4)的动力学问题，以及(5.4)中$\mathrm{meas}\partial_1\Omega=0$的情况，据至今没有解决。

3. von Kármán板

我们在板中设置右手直角坐标系O-$x_1x_2x_3$，板平面$\Omega\subset R^2$上的点$x\equiv(x_1,x_2,0)$，$\partial\Omega$是正规的。点 $x\in\Omega$的水平位移记作$u\equiv(u_1,u_2)$，垂直位移记作ω，由[20]，von Kármán 板的方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\kappa\Delta\Delta\omega-h(\sigma_{\alpha\beta}\omega_{,\beta})_{,\alpha}=f\text{ 于}\Omega\\&\sigma_{\alpha\beta,\alpha}=0\text{于}\Omega\\&\sigma_{\alpha\beta}=C_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\varepsilon_{\gamma\delta}(u)+\frac{1}{2}\omega_{,\gamma}\omega_{,\delta}\right)\text{于}\Omega\\&\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta}+u_{\beta,\alpha})\text{于 }\Omega\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

边界条件为：

$$\left.\begin{aligned}&u_1=u_2=\omega=0\text{ 于 }\partial\Omega\\&M\in\partial_j(\partial\omega/\partial n)\end{aligned}\right\}\tag{5.10}$$

式中希腊指标取值1, 2, h是板厚，$\Delta\Delta$是双调和算子，$\kappa\equiv Eh^3/12(1-\nu^2)$ 是板的弯曲刚度，E是弹性模量，ν是 Poisson 比，$f\equiv(0,0;f_3(x))$是中面分布荷载（密度），$C\equiv\{C_{\alpha\beta\gamma\delta}\}$是弹性张量，$n\equiv(n_1,n_2)$是$\partial\Omega$的单位外法线矢量，$M$是弯矩，

$$M(\omega)\equiv-\kappa[\nu\Delta\omega+(1-\nu)n_\alpha n_\beta\omega_{,\alpha\beta}]\qquad(\alpha,\beta=1,2)\tag{5.11}$$

记：

$$a(\omega,z)\equiv\kappa\int_{\Omega}[(1-\nu)\omega_{,\alpha\beta}z_{,\alpha\beta}+\nu\Delta\omega\Delta z]dS\qquad\left(0<\nu<\frac{1}{2}\right)\tag{5.12}$$

$$\left.\begin{aligned}&R(h,\kappa)\equiv\int_{\Omega}C_{\alpha\beta\gamma\delta}h_{\alpha\beta}k_{\gamma\delta}dV\qquad(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta=1,\ 2,)\\&P(\omega,z)\equiv\{\omega_{,\alpha}z_{,\beta}\}\end{aligned}\right\}\tag{5.13}$$

$$\left.\begin{aligned}&K\equiv\{z\in H^2(\Omega)\cap\overset{0}{H}{}^1(\Omega):\ \partial z/\partial n\geqslant0\text{于}\partial\Omega\}\\&\overset{0}{H}{}^l(\Omega)\equiv\{f\in H^l(\Omega):\ \gamma_i\equiv\partial^i f/\partial n^i|_{\partial\Omega}=0,\ 0\leqslant i\leqslant l-1\}\end{aligned}\right\}\tag{5.14}$$

这里$\nu\in(\overset{0}{H}{}^1(\Omega))^2$，$f_3\in L_2(\Omega)$；由于$\partial z/\partial n\in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$，所以$R(h,\kappa)$是$(L_2(\Omega))^4$中的连续对称强制双线性形式。由Sobolev嵌入定理，$H^2(\Omega)\hookrightarrow W^{1,4}(\Omega)$是紧嵌入。$P$：$(H^2(\Omega))^2\to(L_2(\Omega))^4$是全连续算子。于是，问题(5.9)～(5.10)等价于变分不等式，求

$$\left.\begin{aligned}&\omega\in K:\ a(\omega,z-\omega)+hR\left(\varepsilon(u)+\frac{1}{2}P(\omega),P(\omega,z-\omega)\right)\\&\qquad\geqslant\langle f_3,z-\omega\rangle\qquad(\forall z\in K)\\&u\in(\overset{0}{H}{}^1(\Omega))^2:\ R\left(\varepsilon(u)+\frac{1}{2}P(\omega),\varepsilon(v-u)\right)=0,\\&\qquad\qquad\qquad\qquad(\forall v\in(\overset{0}{H}{}^1(\Omega))^2)\end{aligned}\right\}\tag{5.15}$$

在一定条件下，用本文介绍的方法可证，问题是可解的。

将上述理论推广到一般的壳体理论有很大的困难。因为当壳体中面的Gauss曲率为负时，方程是双曲型的，一般情况下方程是混合型的，边界上的奇情会向域内传播，所以是一个引人入胜的领域。

4. 弹粘塑性理论（参见[10,21]）

塑性变形的同时，通常伴随着粘性和弹性变形：介质在某一极限前表现为弹性，在一极限后表现出粘性和塑性。记$\partial u/\partial t\equiv\dot{u}$，…，物理方程可以写成：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{ij}(\dot{u})=C_{ijnk}\dot{\sigma}_{nk}+\lambda_{ij}(\lambda\in\partial W(\sigma))\\&W(\tau)\equiv\frac{1}{4\mu}[\tau_{ij}-(P_k\tau)_{ij}]^2\quad(\mu>0)\\&K\equiv\{\sigma:\ \sigma_{ij}=\sigma_{ji},\ \mathscr{F}(\sigma)\leqslant0\}\end{aligned}\right\}\tag{5.16}$$

式中$\mathscr{F}(\sigma)$是凸下次连续真泛函，$\sigma\to P_k(\sigma)$是正交投影。提醒一下，本文中K都是凸闭集。

动力问题的一种提法是：

$$\left.\begin{aligned}&\partial^2u_i/\partial t^2=\sigma_{ij,j}+f_i\text{于}\Omega\times(0,T)\\&\dot{u}_i=\hat{v}_i\text{于}\partial_1\Omega\times(0,T)\\&p_i=\hat{p}_i\text{于}\partial_2\Omega\times(0,T)\\&\dot{u}(0)=\hat{u},\ \sigma(0)=\hat{\sigma}\text{于}\Omega\end{aligned}\right\}\tag{5.17}$$

选σ^0与v^0满足式(5.17)中定解条件，用$\sigma-\sigma^0$与$v-v^0$分别代入式(5.16)～(5.17)，则问题(5.16)～(5.17)即化为齐次边值问题；f_i将变成$f_i-(v_i^0)'+\sigma_{ij,j}^0$，$\varepsilon_{ij}(v)$变成$\varepsilon_{ij}(v)+\varepsilon_{ij}(v^0)+C_{ijnk}\sigma_{nk}^0$，$W(\sigma)$变成$W(\sigma+\sigma^0)$。

令$g_{ij}\equiv\varepsilon_{ij}(u^0)+C_{ijhk}\sigma_{hk}^0$；$h_i\equiv f_i-(v_i^0)'+\sigma_{ij,j}^0$，且

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{T}\equiv\{\tau:\ \tau_{ij}=\tau_{ji},\ \tau\in(L_2(\Omega))^6,\ \tau_{ij}n_j=0\text{于}\partial_2\Omega\}\\&V\equiv\{v:\ v\in(L_2(\Omega))^3;\ v_{i,j}\in L_2(\Omega),\ v_i=0\text{于}\partial_1\Omega\}\end{aligned}\right\}\tag{5.18}$$

$$a(\sigma,\tau)\equiv\int_\Omega C_{ijhk}\sigma_{hk}\tau_{ij}dV\tag{5.19}$$

则问题(5.16)～(5.17)等价于变分问题：求

$$\left.\begin{aligned}&\sigma\in\mathscr{T}:\ a(\sigma,\tau)+\langle Dw(\sigma+\sigma^0),\ \tau\rangle+\int_\Omega v_i\tau_{ij,j}dV\\&\qquad\qquad=\langle g,\tau\rangle\quad(\tau\in\mathscr{T})\\&v\in V:\ \langle v',\ z\rangle+\int_\Omega\sigma_{ij}z_{i,j}dV=\langle h,z\rangle\qquad(\forall z\in V)\end{aligned}\right\}\tag{5.20}$$

当 $g,g'\in(L_2(0,T;\ (L_2(\Omega))^6)$，$h,h'\in L_2(0,T;\ (L_2(\Omega))^3)$时，$\sigma^0$ 又与时间无关时，可证问题(5.20)存在唯一正则解(σ,v)。

变分不等式有不同形式的推广和广泛的应用，有大量尚未解决的问题和不适定的问题（参见[22]）等待人们去解决，它的旺盛生命力就在于这种迫切的需要。

参 考 文 献

[1] Stampacchia, G., Formes bilineaires coercitives surles ensembles convexes, *C. R. Acad. Sc. Paris*. **258** (1964), 4413—4416.

[2] Lions, J. L. and G. Stampacchia, Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 490—519.

[3] Lions, J. L., 关于变分不等式及其应用的若干问题（郭友中译），数学进展，**12**, 2 (1983), 1—29.

[4] Kinderlehrer, D. and G. Stampacchia, 《变分不等式及其应用引论》(郭友中等译)，科学出版社.

[5] Pascali, D. and S. Sburian, *Nonlinear Mappings of Monotone Type*, Editura Academiei (1978).

[6] Dinca, G., *Operatori Monotoni in Teoria Plasticitatii*, Editura Academiei (1972).

[7] Lions, J. L. and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applicantions*, Springer-Verlag, (1972).

[8] Lions, J. L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer-Verlag (197?).

[9] Bensoussan, A. and J. L. Lions, *Applications of Variational Inequalities in Stochastic Control*, North-Holland Publishing Company (1982).

[10] Duvaut, G. and J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag (1979).

[11] Lions, J.L., *Perturbations Singulieres Dans les Problémes aux Limites et en Control Optimal*, Springer-Verlag (1973).

[12] 郭友中，弹性理论中的互补变分原理，科学通报，2? (198?), 1425—1428; *Kexue Tongbao*, **29**, 10 (1984), 1297—1302.

[13] Rockafellar, R. T., *Convex Analysis*, Princeton University Press (1970).

[14] Panagiotopoulos, P.D., Subdifferentials and optimal control in unilateral elasticity, *Mech. Res. Comm.*, 3 (1976), 91—96.

[15] 郭友中，星域上的变分不等式，科学通报，4 (1984), 20?—203; *Kexue Tongbao*, **4**, 1 (1984),

117—118.

[16] Lax, P. D. and A. N. Milgram, Parabolic equations, *Ann. of Math. Studies*, **33** (1954), 167—190.

[17] Brezis, H. and G. Stampacchia, Sur les regularite de la solution d'inequations elliptiques, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 135—180.

[18] Brezis, H., Problémes unileraux, *J. Math. Pure and Appl.*, **51** (1972), 1—168.

[19] Hunlich, R. and J. Naumaun, On general boundary value problems and duality in linear elastisity, Ⅰ, Ⅱ, *Appl. Matematiky*, **23** (1987), 209—229; **25** (1980), 11—32.

[20] Ciarlet, P. G., A justification of the von Kármán equations, *Arch. Rech. Ann.*, **73** (1980), 349—398.

[21] 郭友中, Variational inequality in micro-elasto-visco-plasticity, *Proceedings of ICNM* (1985).

[22] Schatzman, M., Le systeme differentiel $\partial^2/u\partial t^2+\partial\phi(u)=f$ avec conditions initiales, *C. R. A cad. Sc. Paris*, **284**A (1973), 603—606.

[23] Lions, J.L.,《偏微分方程的边界问题》(李大潜译) 上海科学技术出版社 (1980).

[24] Ciarlet, P. C.,《有限元法的数值分析》(蒋尔雄等译), 上海科学技术出版社 (1980).

[25] Mosco, U.,《变分不等式近似解引论》(王烈衡等译), 上海科学技术出版社 (1985).

The Problem of Inequality in Solid Mechanics

Guo You-zhong

(*Institute of Mathematical Sciences, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper the problem of inequality in solid mechanics, the contents of which consist of some main concepts, methods and results of the stationary and evolutionary as well as determinate and random problems in variational principle and variational inequality, is studied in detail.