应用数学和力学，第10卷第1期(1989年1月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

二阶非线性无穷边值问题的奇摄动(Ⅰ)*

赵 为 礼

(吉林大学数学系，1986年9月20日收到)

摘　　要

本文讨论了奇异地依赖于小参数 $\varepsilon>0$ 的二阶非线性无穷边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y''=f(x,\ y,\ y') \\ y^{(i)}(0)=\alpha_i,\ y(\infty)=\beta \end{cases}$$

(其中 α_i, β为常数，$i=0,\ 1$) 之解的存在性、唯一性及其渐近估计.

一、引　　言

文[1]～[6]曾以拟线性双曲型方程组Riemann问题间断解的展平为背景，讨论了某些二阶拟线性常微分方程无穷边值问题的奇摄动。本文试图就奇异地依赖于小参数 $\varepsilon>0$ 的二阶非线性无穷边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon y''=f(x,\ y,\ y') & (1.1) \\ y^{(0)}(0)=\alpha_0,\ y(\infty)=\beta & (1.2a) \\ y^{(1)}(0)=\alpha_1,\ y(\infty)=\beta & (1.2b) \end{cases}$$

(其中 α_i, β 为常数，$i=0,1$) 之当退化问题

$$\begin{cases} 0=f(x,\ u,\ u') & (1.3) \\ u(\infty)=\beta & (1.4) \end{cases}$$

具有适当光滑解的情形进行某些探讨. 这对于过渡到比较困难的具有间断退化解的二阶非线性奇摄动无穷边值问题的研究也将会是有益的。

本文第二节给出了摄动问题(1.1)，(1.2a，b)有解的某些充分条件及其渐近估计式；第三节则讨论了这些摄动问题解的唯一性。

二、摄动问题解的存在性与渐近估计

为叙述方便起见，我们以 $H_j(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 表示如下条件:

H_1: $f(x,\ y,\ z)$ 在区域

$$\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,0\leqslant x<\infty,\ |y|<\infty,\ |z|<\infty\}$$

* 戴世强推荐.

上连续可微，并且满足 Nagumo 条件，即

$$|f(x,\ y,\ z)|\leqslant\varphi(|z|)\qquad (x,\ y,\ z)\in\Omega,$$

其中$\varphi(s)$为定义于$0\leqslant s<\infty$上的正值连续函数，使得

$$\int_0^\infty\frac{sds}{\varphi(s)}=\infty;$$

H_2：存在$X>0$，$k>0$，使得当$x\geqslant X$，$-\infty<y$，$z<\infty$时：

$$f_z(x,\ y,\ z)\leqslant -k,$$

H_3：退化问题(1.3)，(1.4)于$0\leqslant x<\infty$上存在解$u=u(x)$；

H_4：存在定义于$X\leqslant x<\infty$上的非负连续函数$h(x)$与$g(x)$，使得

$$|f_z(x,\ u(x),\ u'(x))|\leqslant h(x)\qquad (X\leqslant x<\infty),$$

$$|f_y(x,\ y,\ u'(x))|\leqslant g(x)\qquad (X\leqslant x<\infty,\ |y-u(x)|\leqslant d),$$

其中d为正常数；而积分$\int_X^\infty h(x)dx$与$\int_X^\infty g(x)dx$皆收敛。

仿文[7]，我们称函数$\bar{\omega}(x)\in C^2[0,\ \infty)$为方程(1.1)于$[0,\ \infty)$上的上解，如果它满足不等式

$$\varepsilon\bar{\omega}''(x)\leqslant f(x,\ \bar{\omega}(x),\ \bar{\omega}'(x))\qquad (0\leqslant x<\infty);$$

而若存在函数$\underline{\omega}(x)\in C^2[0,\ \infty)$，使得

$$\varepsilon\underline{\omega}''(x)\geqslant f(x,\ \underline{\omega}(x),\ \underline{\omega}'(x))\qquad (0\leqslant x<\infty),$$

则称$\underline{\omega}(x)$为方程(1.1)于$[0,\ \infty)$上的下解。

我们先来讨论边值问题(1.1)，(1.2a)。

引理1　假设条件$H_1\sim H_4$成立。若存在方程(1.1)于$[0,\ \infty)$上的上解$\bar{\omega}_\varepsilon(x)$与下解$\underline{\omega}_\varepsilon(x)$，使得

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant u(x)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad (0\leqslant x<\infty),$$

$$u(x)-\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant d,\ \bar{\omega}_\varepsilon(x)-u(x)\leqslant d\qquad (X\leqslant x<\infty)$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(0)\leqslant\alpha_0\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(0),$$

则边值问题(1.1)，(1.2a)有解$y=y(x,\ \varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\ \varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad (0\leqslant x<\infty)$$

证明　将文[9]定理7.3的证明略加明显变通便不难证明，对任一自然数n，边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(x,\ y,\ y'),\\ y(0)=\alpha_0,\ y(n)=u(n)\end{cases}$$

有解$y=y_n(x,\ \varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y_n(x,\ \varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad (0\leqslant x\leqslant n)\tag{2.1}$$

再根据文[8]引理1可知，$\{y_n'(0,\ \varepsilon)\}$存在收敛子序列$\{y_{n_m}'(0,\ \varepsilon)\}$，记其极限为$\gamma_\varepsilon$。今往证方程(1.1)之满足$y(0,\ \varepsilon)=\alpha_0$，$y'(0,\ \varepsilon)=\gamma_\varepsilon$的解$y=y(x,\ \varepsilon)$即为边值问题(1.1)，(1.2a)的解，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\ \varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad (0\leqslant x<\infty)\tag{2.2}$$

事实上，由(2.1)式，根据解对初值的连续性以及延展定理可知，(2.2)式显然成立。剩下只须证明$y(\infty,\ \varepsilon)=\beta$。用反证法。若不然，则存在$\mu>0$以及$x_m\uparrow\infty(m\to\infty)$，使得

$$|y|(x_m,\ \varepsilon)-\beta|>2\mu\qquad (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

显然可取$n_m\geqslant x_m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$。则由(1.4)式以及$y_n(n,\ \varepsilon)=u(n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$易见，

当 m 充分大时，

$$|y(x_m,\ \varepsilon)-y_{n_m}(n_m,\ \varepsilon)|>\mu \tag{2.3}$$

另一方面，根据条件 $H_1\sim H_3$ 可知，方程 $f(x,\ y,\ z)=0$ 于 $X\leqslant x<\infty$，$|y|<\infty$ 上存在（唯一）连续可微解 $z=\psi(x,\ y)$，从而 $u(x)\in C^2[X,\ \infty)$。于是

$$|u''(x)|\leqslant k^{-1}(|f_x(x,\ u(x),\ u'(x))|+|f_y(x,u(x),u'(x))||u'(x)|)$$
$$(X\leqslant x<\infty)$$

令 $S(x)=\int_X^x|u''(t)|dt$，则 $|u'(x)|\leqslant S(x)+|u'(X)|$ $(X\leqslant x<\infty)$。再根据 H_4 便得

$$S'(x)-k^{-1}g(x)S(x)\leqslant k^{-1}[h(x)+g(x)|u'(X)|]\qquad(X\leqslant x<\infty)$$

从而不难估算出

$$|u'(x)|\leqslant|u'(X)|\exp\left[\frac{1}{k}\int_X^x g(t)dt\right]+\frac{1}{k}\int_X^x h(s)\exp\left[\frac{1}{k}\int_s^x g(t)dt\right]ds$$
$$(X\leqslant x<\infty)$$

因此存在 $D>0$，能使 $|u'(x)|\leqslant D$ $(X\leqslant x<\infty)$。

取 $A\geqslant X$ 充分大，$B>A$，使得

$$\int_B^\infty\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(s-A)\right]ds\leqslant\frac{\mu}{8(1+|y'(A,\ \varepsilon)|+|u'(A)|)},$$

$$\int_B^\infty ds\int_A^s h(\tau)\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(s-\tau)\right]d\tau\leqslant\frac{k\mu}{8},$$

$$\int_B^\infty ds\int_A^s g(\tau)\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(s-\tau)\right]d\tau\leqslant\frac{\varepsilon k\mu}{8(dk+D\varepsilon)}.$$

由
$$\varepsilon(y''(x,\ \varepsilon)-u''(x))=M(x,\ \varepsilon)\ (y'(x,\ \varepsilon)-u'(x))$$
$$+N(x,\ \varepsilon)\ (y(x,\ \varepsilon)-u(x))-\varepsilon u''(x),$$

其中
$$M(x,\varepsilon)=\int_0^1 f_z(x,\ y(x,\ \varepsilon),\ u'(x)+\theta(y'(x,\ \varepsilon)-u'(x)))d\theta,$$

$$N(x,\varepsilon)=\int_0^1 f_y(x,\ u(x)+\theta(y(x,\ \varepsilon)-u(x)),\ u'(x))d\theta$$

可知

$$y(x,\ \varepsilon)=u(x)+y(B,\ \varepsilon)-u(B)+(y'(A,\ \varepsilon)-u'(A))\int_B^x\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_A^s M(\tau,\varepsilon)d\tau\right]ds$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_B^x ds\int_A^s[N(\tau,\ \varepsilon)\ (y(\tau,\ \varepsilon)-u(\tau))-\varepsilon u''(\tau)]\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^s M(t,\varepsilon)dt\right]d\tau$$

同理，当 n 充分大时，

$$y_n(x,\ \varepsilon)=u(x)+y_n(B,\ \varepsilon)-u(B)+(y_n'(A,\ \varepsilon)-u'(A))\int_B^x\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_A^s M_n(\tau,\varepsilon)d\tau\right]ds$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_B^x ds\int_A^s[N_n(\tau,\ \varepsilon)(y_n(\tau,\ \varepsilon)-u(\tau))-\varepsilon u''(\tau)]\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^s M_n(t,\varepsilon)dt\right]d\tau$$

其中

$$M_n(x,\varepsilon)=\int_0^1 f_z(x,\ y_n(x,\ \varepsilon),\ u'(x)+\theta(y_n'(x,\ \varepsilon)-u'(x)))d\theta$$

$$N_n(x,\varepsilon)=\int_0^1 f_y(x,\ u(x)+\theta(y_n(x,\ \varepsilon)-u(x)),\ u'(x))d\theta$$

从而，当 m 充分大时，

$$|y(x_m,\varepsilon)-y_{n_m}(n_m,\varepsilon)|\leqslant|u(x_m)-u(n_m)|+|y(B,\varepsilon)-y_{n_m}(B,\varepsilon)|$$

$$+\frac{\mu[|y'(A,\varepsilon)-u'(A)|+|y'_{n_m}(A,\varepsilon)-u'(A)|]}{8(1+|y'(A,\varepsilon)|+|u'(A)|)}+\frac{\mu}{2}$$

于是，根据解对初值的连续性及(1.4)式立见只要 m 充分大，上式便与不等式(2.3)相矛盾。引理证完。

取代 H_2，我们记

$\widetilde{H}_2$：存在 $k>0$，使得 $f_z(x,y,z)\leqslant -k \quad (x,y,z)\in\Omega$

并记 H^+：存在 $r,l,L>0$，使得 $|f_z(x,u(x),u'(x))|\leqslant r \quad (0\leqslant x<\infty)$，

$$l\leqslant f_y(x,y,u'(x))\leqslant L \qquad (0\leqslant x<\infty,\ |y-u(x)|\leqslant d)$$

定理 1 假设条件 H_1，$\widetilde{H}_2$，H_3，H_4，H^+ 成立，则当 $\varepsilon>0$ 充分小时，边值问题(1.1)，(1.2a)有解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)-u(x)|\leqslant|\alpha_0-u(0)|\exp\left[-\frac{l}{2k}x\right]\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_1\varepsilon \qquad (0\leqslant x<\infty) \tag{2.4}$$

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant c_2/\varepsilon\exp[-kx/\varepsilon]+c_3\varepsilon \qquad (\varepsilon\leqslant x<\infty) \tag{2.5}$$

其中 $c_i(i=1,2,3)$ 为正常数。

证明 根据条件 H_1，$\widetilde{H}_2$，H_3，按引理 1 所指出的事实易见 $u(x)\in C^2[0,\infty)$。再由 H_4，H^+，仿引理 1 关于 $|u''(x)|$ 的估算可知，存在 $G>0$，使得

$$|u''(x)|\leqslant G \qquad (0\leqslant x<\infty) \tag{2.6}$$

令

$$\overline{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)+|\alpha_0-u(0)|\exp[\lambda x]+G\varepsilon/l \qquad (0\leqslant x<\infty)$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)-|\alpha_0-u(0)|\exp[\lambda x]-G\varepsilon/l \qquad (0\leqslant x<\infty)$$

其中 $\lambda=(-k-\sqrt{k^2+4\varepsilon l})/(2\varepsilon)$。则当 $\varepsilon>0$ 充分小时，

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)<u(x)<\overline{\omega}_\varepsilon(x) \quad (0\leqslant x<\infty),\ \overline{\omega}'(x)\leqslant u'(x)\leqslant\underline{\omega}'_\varepsilon(x) \quad (0\leqslant x<\infty);$$

从而

$$f(x,\overline{\omega}_\varepsilon(x),\overline{\omega}'(x))=\int_0^1 f_z(x,\overline{\omega}_\varepsilon(x),u'(x)+\theta(\overline{\omega}'_\varepsilon(x)-u'(x)))d\theta(\overline{\omega}'_\varepsilon(x)-u'(x))$$
$$+\int_0^1 f_y(x,u(x)+\theta(\overline{\omega}_\varepsilon(x)-u(x)),u'(x))d\theta(\overline{\omega}_\varepsilon(x)-u(x))\geqslant -k(\overline{\omega}'_\varepsilon(x)-u'(x))$$
$$+l(\overline{\omega}_\varepsilon(x)-u(x))-\varepsilon G+\varepsilon u''(x)=\varepsilon\overline{\omega}''_\varepsilon(x) \qquad (0\leqslant x<\infty),$$

$$f(x,\underline{\omega}_\varepsilon(x),\underline{\omega}'_\varepsilon(x))\leqslant -k(\underline{\omega}'_\varepsilon(x)-u'(x))+l(\underline{\omega}_\varepsilon(x)-u(x))$$
$$+\varepsilon G+\varepsilon u''(x)=\varepsilon\underline{\omega}''_\varepsilon(x) \qquad (0\leqslant x<\infty)$$

此外，容易看出当 $\varepsilon>0$ 充分小时，$\underline{\omega}_\varepsilon(x)$，$\overline{\omega}_\varepsilon(x)$ 还满足引理 1 的其余条件。因此当 $\varepsilon>0$ 充分小时，边值问题(1.1)、(1.2a)存在解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\overline{\omega}_\varepsilon(x) \qquad (0\leqslant x<\infty)$$

故(2.4)式成立。

今往证(2.5)式成立。事实上，对于充分小的 $\varepsilon>0$，$v(x,\varepsilon)=y'(x,\varepsilon)-u'(x)$ 显然满足方程

$$\varepsilon v'=p(x,\varepsilon)v+q(x,\varepsilon) \qquad (0\leqslant x<\infty)$$

其中

$$p(x,\varepsilon)=\int_0^1 f_z(x,y(x,\varepsilon),u'(x)+\theta v(x,\varepsilon))d\theta,$$

$$q(x,\varepsilon)=\int_0^1 f_y(x,u(x)+\theta(y(x,\varepsilon)-u(x)),u'(x))d\theta(y(x,\varepsilon)-u(x))-\varepsilon u''(x),$$

根据微分中值定理，存在 $c>0$，对于每一充分小的 $\varepsilon>0$，恒存在 $x_\varepsilon\in(0,\varepsilon)$，能使 $|v(x_\varepsilon,\varepsilon)|\leqslant c/\varepsilon$。于是，由条件 H_2 以及(2.4)，(2.6)式便得

$$|v(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{c}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-x_\varepsilon)\right]+\frac{L}{\varepsilon}|\alpha_0-u(0)|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]$$

$$\cdot\int_{x_\varepsilon}^{x}\exp\left[-\frac{l}{2k}t\right]dt+(Lc_1+G)\int_{x_\varepsilon}^{x}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]dt\qquad(x_\varepsilon\leqslant x<\infty)$$

由此可见(2.5)式成立。证毕。

取代 H_3，H^+，我们分别记

$\widetilde{H}_3$：退化问题（1.3），（1.4）存在解 $u=u(x)$，并且 $u(x)$ 于 $0\leqslant x<\infty$ 上为上凸（或下凸）函数；

H^0：存在 r，$L>0$，使得 $|f_x(x,u(x),u'(x))|\leqslant r\qquad(0\leqslant x<\infty)$，

$$0\leqslant f_y(x,y,u'(x))\leqslant L\quad(0\leqslant x<\infty,\ |y-u(x)|\leqslant d).$$

定理 2 假设条件 H_1，$\widetilde{H}_2$，$\widetilde{H}_3$，H_4 成立。若

$$f_y(x,y,u'(x))\geqslant 0\quad(0\leqslant x<\infty,\ |y-u(x)|\leqslant d),$$

则当 $\varepsilon>0$ 充分小时，边值问题(1.1)，(1.2a)有解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)-u(x)|\leqslant|\alpha_0-u(0)|\exp[-kx/\varepsilon]+c_1\varepsilon\qquad(0\leqslant x<\infty)\tag{2.7}$$

若还假定 H^0 成立，则

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant\frac{c_2}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_3\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]+c_4\varepsilon\qquad(\varepsilon\leqslant x<\infty)\tag{2.8}$$

其中 $c_i(i=1,2,3,4)$ 为正常数。

证明 根据 $u(x)$ 的凸性以及 $u(x)\in c^2[0,\infty)$，$u(\infty)=\beta$ 易见 $\lim\limits_{x\to\infty}u'(x)=0$。从而

$$\left|\int_0^x\left(\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]-1\right)u''(t)dt\right|\leqslant 2|u'(0)|\qquad(x\geqslant 0).$$

若 $u(x)$ 下凸，则令

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)+|\alpha_0-u(0)|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+\frac{2\varepsilon}{k}|u'(0)|$$

$$+\frac{\varepsilon}{k}\int_0^x\left(\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]-1\right)u''(t)dt\qquad(0\leqslant x<\infty),$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)-|\alpha_0-u(0)|\exp[-kx/\varepsilon]\qquad(0\leqslant x<\infty).$$

于是当 $\varepsilon>0$ 充分小时，$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant u(x)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad(0\leqslant x<\infty)$，

$$\bar{\omega}_\varepsilon'(x)\leqslant u'(x)\leqslant\underline{\omega}_\varepsilon'(x)\qquad(0\leqslant x<\infty);$$

从而 $\quad f(x,\bar{\omega}_\varepsilon(x),\bar{\omega}_\varepsilon'(x))\geqslant-k(\bar{\omega}_\varepsilon'(x)-u'(x))=\varepsilon\bar{\omega}_\varepsilon''(x)\qquad(0\leqslant x<\infty)$，

$$f(x,\underline{\omega}_\varepsilon(x),\underline{\omega}_\varepsilon'(x))\leqslant-k(\underline{\omega}_\varepsilon'(x)-u'(x))+\varepsilon u''(x)=\varepsilon\underline{\omega}_\varepsilon''(x)\qquad(0\leqslant x<\infty).$$

此外，$\underline{\omega}_\varepsilon(x)$，$\bar{\omega}_\varepsilon(x)$ 显然还满足引理 1 的其余条件。若 $u(x)$ 上凸，则令

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)+|\alpha_0-u(0)|\exp[-kx/\varepsilon]\qquad(0\leqslant x<\infty),$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)-|\alpha_0-u(0)|\exp[-kx/\varepsilon]-2\varepsilon k^{-1}|u'(0)|$$

$$+\frac{\varepsilon}{k}\int_0^x\left(\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]-1\right)u''(t)dt\qquad(0\leqslant x<\infty)$$

仿上易见此二函数也满足引理 1 所要求的全部条件，于是根据引理 1，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，

边值问题(1.1)，(1.2a)有解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且(2.7)式成立。

根据(2.7)式，并仿(2.5)式的证明可见，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant\frac{c}{\varepsilon}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-x_\varepsilon)\right]+\frac{L}{\varepsilon}|\alpha_0-u(0)|\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]$$

$$\cdot\int_{x_\varepsilon}^{x}\exp\left[-\frac{k}{2\varepsilon}x\right]dt+(Lc_1+G)\int_{x_\varepsilon}^{x}\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]dt\qquad(x_\varepsilon\leqslant x<\infty),$$

其中 x_ε 为 $(0,\varepsilon)$ 内某数；$G>0$ 为根据 H^0, $\tilde{\mathrm{H}}_2$ 所估出的 $|u''(x)|$ 于 $0\leqslant x<\infty$ 上的上界。据此式成立知(2.8)式成立。证毕。

推论 1 假设条件 H_1, $\tilde{\mathrm{H}}_2$, H_3, H_4 成立，并且

$$f_y(x,y,u'(x))\geqslant0\qquad(0\leqslant x<\infty,\ |y-u(x)|\leqslant d)$$

若于 $0\leqslant x<\infty$ 上 $u(x)$ 不减，$f_x(x,u(x),u'(x))\geqslant0$，或者 $u(x)$ 不增，$f_x(x,u(x),u'(x))\leqslant0$，则当 $\varepsilon>0$ 充分小时，边值问题(1.1)、(1.2a)存在解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且(2.7)式成立；若还假定 H^0 成立，则此解也满足(2.8)式。

下面我们来讨论边值问题(1.1)、(1.2b)。

引理 2 假设条件 $\mathrm{H}_1\sim\mathrm{H}_4$ 成立。若存在方程(1.1)于 $[0,\infty)$ 上的上解 $\bar{\omega}_\varepsilon(x)$ 与下解 $\underline{\omega}_\varepsilon(x)$，使得

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant u(x)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad(0\leqslant x<\infty),$$
$$u(x)-\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant d,\ \bar{\omega}_\varepsilon(x)-u(x)\leqslant d\qquad(X\leqslant x<\infty),$$
$$\bar{\omega}_\varepsilon'(0)\leqslant\alpha_1\leqslant\underline{\omega}_\varepsilon'(0),$$

则边值问题(1.1)，(1.2b)有解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad(0\leqslant x<\infty)$$

证明 根据文[10]定理 5 (通过适当的变数变换)不难证明，对任一自然数 n，边值问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''=f(x,y,y'),\\ y'(0)=\alpha_1,\quad y(n)=u(n)\end{cases}$$

存在解 $y=y_n(x,\varepsilon)$，并且

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y_n(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad(0\leqslant x\leqslant n)$$

于是 $\{y_n(0,\varepsilon)\}$ 存在收敛子序列，记其极限为 η_ε。仿引理 1 便不难证明，方程(1.1)之满足 $y(0,\varepsilon)=\eta_\varepsilon$，$y'(0,\varepsilon)=\alpha_1$ 的解 $y=y(x,\varepsilon)$ 就是边值问题(1.1)，(1.2b)之满足不等式

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)\leqslant y(x,\varepsilon)\leqslant\bar{\omega}_\varepsilon(x)\qquad(0\leqslant x<\infty)$$

的解。引理证完。

定理 3 假设条件 H_1, $\tilde{\mathrm{H}}_2$, H_3, H_4, H^+ 成立，则当 $\varepsilon>0$ 充分小时，边值问题(1.1)、(1.2b)有解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)-u(x)|\leqslant c_1\varepsilon\qquad(0\leqslant x<\infty)\tag{2.9}$$

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant|\alpha_1-u'(0)|\exp[-kx/\varepsilon]+c_2\varepsilon\qquad(0\leqslant x<\infty)\tag{2.10}$$

其中 c_1, c_2 为正常数。

证明 令

$$\bar{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)-\frac{1}{\lambda}|\alpha_1-u'(0)|\exp[\lambda x]+\frac{G\varepsilon}{l}\qquad(0\leqslant x<\infty),$$

$$\underline{\omega}_\varepsilon(x)=u(x)+\frac{1}{\lambda}|\alpha_1-u'(0)|\exp[\lambda x]-\frac{G\varepsilon}{l}\qquad(0\leqslant x<\infty),$$

其中 $\lambda=(-k-\sqrt{k^2+4\varepsilon l})/\varepsilon 2$；$G$为正常数，使得$|u''(x)|\leqslant G$ $(0\leqslant x<\infty)$。根据引理2，仿定理1的证明便知，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，边值问题（1.1）、（1.2b）存在解$y=y(x,\varepsilon)$，并且(2.9)式成立。

将(2.5)式的证明稍加变通易见，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant|\alpha_1-u'(0)|\exp[-kx/\varepsilon]$$
$$+(Lc_1+G)\int_0^x \exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}(x-t)\right]dt \qquad (0\leqslant x<\infty)$$

因此(2.10)式成立。证毕。

适当变通定理2与定理3的证明便不难得到如下的

定理 4 假设条件 H_1，$\bar{H}_2$，$\bar{H}_3$，H_4 成立。若

$$f_y(x,y,u'(x))\geqslant 0 \qquad (0\leqslant x<\infty,|y-u(x)|\leqslant d),$$

则当 $\varepsilon>0$ 充分小时，边值问题(1.1)、(1.2b)有解 $y=y(x,\varepsilon)$，并且

$$|y(x,\varepsilon)-u(x)|\leqslant c_1\varepsilon \qquad (0\leqslant x<\infty);$$

若还假定 H^0 成立，则

$$|y'(x,\varepsilon)-u'(x)|\leqslant|\alpha_1-u'(0)|\exp\left[-\frac{k}{\varepsilon}x\right]+c_2\varepsilon \qquad (0\leqslant x<\infty),$$

其中 c_1，c_2 为正常数。

推论 2 在推论1的假设条件下，定理4的结论成立。

三、摄动问题解的唯一性

仍以Ω表示上节条件 H_1 中所述的区域。

定理 5 设$f(x,y,z)$于区域Ω上连续，当(x,y_1,z)，$(x,y_2,z)\in\Omega$，并且$y_1<y_2$时，

$$f(x,y_1,z)<f(x,y_2,z),$$

则边值问题(1.1)、(1.2a)至多只有一个解。

证明 用反证法。设 $y=y_1(x,\varepsilon)$，$y=y_2(x,\varepsilon)$ 都是边值问题（1.1)、(1.2a) 的解，$y_1(x,\varepsilon)\not\equiv y_2(x,\varepsilon)$。为确定计，无妨设于$(0,\infty)$内某点处，$y_1<y_2$。则容易看出，存在 $x_0\in(0,\infty)$，使得函数 $y_2(x,\varepsilon)-y_1(x,\varepsilon)$于 x_0 处取正的极大值。于是

$$\begin{aligned}\varepsilon[y_2''(x_0,\varepsilon)-y_1''(x_0,\varepsilon)]&=f(x_0,y_2(x_0,\varepsilon),y_2'(x_0,\varepsilon))\\&-f(x_0,y_1(x_0,\varepsilon),y_2'(x_0,\varepsilon))+f(x_0,y_1(x_0,\varepsilon),y_2'(x_0,\varepsilon))\\&-f(x_0,y_1(x_0,\varepsilon),y_1'(x_0,\varepsilon))>0\end{aligned} \tag{3.1}$$

这显然与 x_0 是 $y_2(x,\varepsilon)-y_1(x,\varepsilon)$的极大值点相矛盾。证毕。

定理 6 在定理5的假设条件下，边值问题(1.1)，(1.2b)至多只有一个解。

证明 用反证法。设 $y=y_1(x,\varepsilon)$，$y=y_2(x,\varepsilon)$ 都是边值问题（1.1)、(1.2b) 的解，$y_1(x,\varepsilon)\not\equiv y_2(x,\varepsilon)$。为确定计，无妨设于某点 $a\in[0,\infty)$，$y_1(a,\varepsilon)<y_2(a,\varepsilon)$。则不难看出存在 $b\in(a,\infty)$，能使函数 $y_2(x,\varepsilon)-y_1(x,\varepsilon)$ 于 $[0,b]$ 上的最大值点 $x_0<b$。

若 $x_0>0$，则仿定理5的证明即可；若 $x_0=0$，侧存在 $\{\eta_k\}\subset(0,b]$，$\eta_k\downarrow x_0(k\to\infty)$，使得

$$y_2'(\eta_k,\varepsilon)-y_1'(\eta_k,\varepsilon)\leqslant 0 \qquad (k=1,2,\cdots).$$

再由 $y_2'(x_0,\varepsilon)-y_1'(x_0,\varepsilon)=0$ 易见

$$y_2''(x_0,\varepsilon)-y_1''(x_0,\varepsilon)\leqslant 0 \tag{3.2}$$

另一方面，仿(3,1)式的证明可得$y_2''(x_0,\varepsilon)-y_1''(x_0,\varepsilon)>0$。这与(3.2)式相矛盾。定理证完。

参 考 文 献

[1] 伍卓群，一类常微分方程边值问题的奇摄动——(Ⅰ)方程式的情形，吉林大学自然科学学报，2 (1963), 91—104.

[2] 周钦德，一类常微分方程奇摄动问题解的渐近展开，吉林大学自然科学学报，4 (1979), 1—19.

[3] 周钦德，一类奇摄动边值问题解的渐近展开，吉林大学自然科学学报，4 (1980), 12—26.

[4] 周钦德，一类奇摄动边值问题近似常数解的渐近展开，吉林大学自然科学学报，2 (1981), 12—22.

[5] 周钦德，某类奇摄动边值问题解的渐近展开，吉林大学自然科学学报，3 (1981), 37—50.

[6] 赵为礼，一类常微分方程无穷边值问题的奇摄动，吉林大学自然科学学报，3 (1981), 27—36.

[7] Schrader, K. W., Existence theorems for second order boundary value problems, *J. Diff. Eqs.*, 5 (1969), 572—584.

[8] Nagumo, M., Uber die Differentialgleichung $y''=f(x,y,y')$, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 19 Ser 3, 10 (1937), 861—866.

[9] Jackson, L. K., Subfunctions and second-order ordinary differential inequalities, *Adv. Math.*, 2 (1968), 307—363.

[10] Klaasen, G. A., Differential inequalities and existence theorems for second and third order boundary value problems, *J. Diff. Eqs.*, 10 (1971), 529—537.

Singular Perturbation of boundary Value Problems for Second Order Nonlinear Ordinary Differential Equations on Infinite Interval (Ⅰ)

Zhao Wei-li

(*Department of Mathematics, Jilin University, Changchun*)

Abstract

In this paper, existence, uniqueness and asymptotic estimations of solutions of the boundary value problems on infinite interval for the second order nonlinear equation depending singularly on a small parameter

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon y''=f(x,y,y')\\ y^{(i)}(0)=\alpha_i,\ \ y(\infty)=\beta\end{array}\right\}$$

are examined, where α_i, β are constants, and $i=0, 1$.