应用数学和力学，第10卷第1期(1989年1月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

变壁厚轴对称圆环壳的复变量方程及其一般解*

王 慎 行

(中国天津化学工程公司，1987年9月6日收到)

摘 要

本文导出了变壁厚轴对称圆环壳的复变量方程，并给出了它的一般解。

一、微 分 方 程

对于变壁厚轴对称圆环壳，令r_1表示其中面的截面半径，R表示其总体半径(图1)；φ和θ表示中面上的经向坐标和环向坐标，z表示中面外法线方向的坐标；u和w表示中面上一点的经向位移和法向位移(图2)。

中面应变与位移的关系式为

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{r_1}\left(\frac{du}{d\varphi}+w\right) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u\cos\varphi+w\sin\varphi}{r_1(k+\sin\varphi)} \tag{1.2}$$

式中

$$k=\frac{R}{r_1} \tag{1.3}$$

中面上经线切线的变形转角（图2）为

$$\psi=\frac{1}{r_1}\left(u-\frac{dw}{d\varphi}\right) \tag{1.4}$$

中面上主曲率的改变为

$$K_\varphi=\frac{1}{r_1}\frac{d\psi}{d\varphi} \tag{1.5}$$

$$K_\theta=\frac{\cos\varphi}{r_1(k+\sin\varphi)}\psi \tag{1.6}$$

令N_φ和N_θ分别表示经向力和环向力；Q_φ表示横剪力，M_φ和M_θ表示经向弯矩和环向弯

* 潘立宙推荐。

矩；q_φ和q_z分别表示φ方向和z方向的载荷强度（图3）。于是平衡方程为

$$\frac{d}{d\varphi}[N_\varphi(k+\sin\varphi)]-N_\theta\cos\varphi+Q_\varphi(k+\sin\varphi)$$
$$+r_1q_\varphi(k+\sin\varphi)=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{d\varphi}[Q_\varphi(k+\sin\varphi)]-N_\varphi(k+\sin\varphi)-N_\theta\cos\varphi$$
$$+r_1q_z(k+\sin\varphi)=0 \tag{1.8}$$

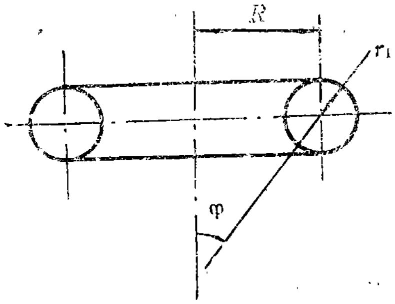

图　1

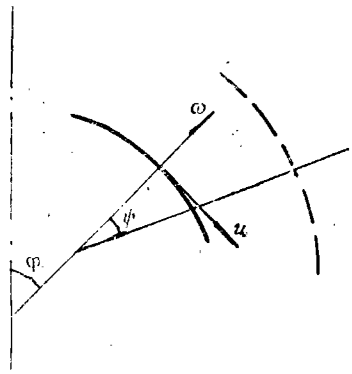

图　2

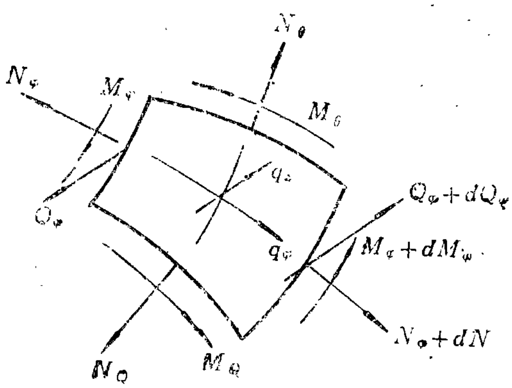

图　3

$$\frac{d}{d\varphi}[M_\varphi(k+\sin\varphi)]-M_\theta\cos\varphi-r_1Q_\varphi(k+\sin\varphi)=0 \tag{1.9}$$

应力-应变关系为

$$N_\varphi=C(\varepsilon_\varphi+\nu\,\varepsilon_\theta) \tag{1.10}$$
$$N_\theta=C(\varepsilon_\theta+\nu\,\varepsilon_\varphi) \tag{1.11}$$
$$M_\varphi=D(K_\varphi+\nu\,K_\theta) \tag{1.12}$$
$$M_\theta=D(K_\theta+\nu\,K_\varphi) \tag{1.13}$$

其中

$$C=\frac{Eh}{1-\nu^2} \tag{1.14}$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.15}$$

而E为弹性模量，ν为泊桑比，h为壳体的厚度。

上述基本关系式可以简化为两个联立的二阶微分方程。

由式(1.8)和(1.9)可得

$$\frac{d}{d\varphi}[(N_\varphi\sin\varphi-Q_\varphi\cos\varphi)(k+\sin\varphi)]=r_1(q_z\cos\varphi-q_\varphi\sin\varphi)(k+\sin\varphi) \tag{1.16}$$

将式(1.16)积分，则得

$$(N_\varphi\sin\varphi-Q_\varphi\cos\varphi)(k+\sin\varphi)=r_1\int_{\varphi_1}^{\varphi}(q_z\cos\varphi-q_\varphi\sin\varphi)(k+\sin\varphi)\,d\varphi+\frac{P}{2\pi r_1} \tag{1.17}$$

式中，φ_1为某一参考角，而P为$\varphi=\varphi_1$处轴向力的合力。

令

$$U=\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}Q_\varphi \tag{1.18}$$

$$G_\varphi=r_1\int_{\varphi_1}^{\varphi}(q_z\cos\varphi-q_\varphi\sin\varphi)(k+\sin\varphi)\,d\varphi+\frac{P}{2\pi r_1} \tag{1.19}$$

则

$$N_\varphi=\frac{\cos\varphi}{k+\sin\varphi}U+\frac{G_\varphi}{(k+\sin\varphi)\sin\varphi} \tag{1.20}$$

$$N_\theta=\frac{dU}{d\varphi}+\frac{r_1(k+\sin\varphi)}{\sin\varphi}q_z-\frac{G_\varphi}{\sin^2\varphi} \tag{1.21}$$

由式(1.1)，(1.2)，(1.10)，(1.11)，(1.20)和(1.21)可得

$$\varepsilon_\varphi=\frac{1}{Eh}\left[\frac{\cos\varphi}{k+\sin\varphi}U-\nu\frac{dU}{d\varphi}+\left(\frac{\sin\varphi}{k+\sin\varphi}+\nu\right)\frac{G_\varphi}{\sin^2\varphi}-\frac{\nu r_1(k+\sin\varphi)}{\sin\varphi}q_z\right] \tag{1.22}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{1}{Eh}\left[\frac{dU}{d\varphi}-\frac{\nu\cos\varphi}{k+\sin\varphi}U-\left(1+\frac{\nu\sin\varphi}{k+\sin\varphi}\right)\frac{G_\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{r_1(k+\sin\varphi)}{\sin\varphi}q_z\right] \tag{1.23}$$

而由式(1.1)，(1.2)和(1.4)，

$$\psi=\varepsilon_\varphi\cot\varphi-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}[(k+\sin\varphi)\varepsilon_\theta] \tag{1.24}$$

将式(1.22)和(1.23)代入式(1.24)得

$$\psi=\frac{\cot\varphi}{Eh}\left[\frac{\cos\varphi}{k+\sin\varphi}U-\nu\frac{dU}{d\varphi}+\left(\frac{\sin\varphi}{k+\sin\varphi}+\nu\right)\frac{G_\varphi}{\sin^2\varphi}\right.$$

$$-\frac{\nu r_1(k+\sin\varphi)}{\sin\varphi}q_z\Big]-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{d}{d\varphi}\Big\{\frac{k+\sin\varphi}{Eh}\Big[\frac{dU}{d\varphi}-\frac{\nu\cos\varphi}{k+\sin\varphi}U$$

$$-\left(1+\frac{\nu\sin\varphi}{k+\sin\varphi}\right)\frac{G_\varphi}{\sin^2\varphi}+\frac{r_1(k+\sin\varphi)}{\sin\varphi}q_z\Big]\Big\} \tag{1.25}$$

令

$$V=Eh^2\psi \tag{1.26}$$

$$L(\cdots)=h\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}\frac{d^2}{d\varphi^2}(\cdots)+\left(h\cot\varphi-\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}\frac{dh}{d\varphi}\right)\frac{d}{d\varphi}(\cdots)$$

$$+\left[\nu h+\nu\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi-\frac{h\cos^2\varphi}{\sin\varphi(k+\sin\varphi)}\right](\cdots) \tag{1.27}$$

则可将式(1.25)写为

$$L(U)+V=F \tag{1.28}$$

式中

$$F=r_1h\left(\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}\right)\Big\{\Big[\frac{1}{h}\frac{dh}{d\varphi}\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}+\frac{2k\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\Big]q_z$$

$$-\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}\frac{dq_z}{d\varphi}-\frac{k+(1-\nu)\sin\varphi}{\sin\varphi}q_\varphi\Big\}$$

$$-\frac{G_\varphi}{\sin^2\varphi}\left[\frac{2k^2+3k\sin\varphi}{\sin^2\varphi(k+\sin\varphi)}\cos\varphi+\frac{k+(1+\nu)\sin\varphi}{h\sin\varphi}\frac{dh}{d\varphi}\right] \tag{1.29}$$

另一方面，由(1.5)、(1.6)、(1.9)、(1.12)和(1.13)

$$\frac{d}{d\varphi}\Big[D\left(\frac{d\psi}{d\varphi}+\frac{\nu\cos\varphi}{k+\sin\varphi}\psi\right)(k+\sin\varphi)-D\Big(\frac{\cos\varphi}{k+\sin\varphi}\psi$$

$$+\nu\frac{d\psi}{d\varphi}\Big)\cos\varphi-r_1^2(k+\sin\varphi)Q_\varphi=0 \tag{1.30}$$

将式(1.17)和(1.26)代入式(1.30)得

$$h\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}\frac{d^2V}{d\varphi^2}+\left(h\cot\varphi-\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}\frac{dh}{d\varphi}\right)\frac{dV}{d\varphi}$$

$$-\Big[\frac{2(k+\sin\varphi)}{\sin\varphi}\frac{d^2h}{d\varphi^2}+(2-3\nu)\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi+\nu h$$

$$+\frac{h\cos^2\varphi}{(k+\sin\varphi)\sin\varphi}\Big]V-12(1-\nu^2)r_1^2U=0 \tag{1.31}$$

令

$$f=\frac{k+\sin\varphi}{\sin\varphi}\frac{d^2h}{d\varphi^2}+(1-\nu)\frac{dh}{d\varphi}\cot\varphi+\nu h \tag{1.32}$$

并注意式(1.27)，则可将式(1.31)写为

$$L(V)-2fV-12(1-\nu^2)r_1^2U=0 \tag{1.33}$$

如此，关于变量U和V，我们得到了两个联立的二阶微分方程。如果f为一常量，这两个微分方程还可进一步化为一个复变量微分方程。

设

$$f=\text{const} \tag{1.34}$$

则由式(1.32)得

$$h=h_0+a(k+\sin\varphi)^{\nu} \tag{1.35}$$

式中h_0和a为常数。将式(1.35)代入式(1.32)可以求得

$$f=\nu h_0 \tag{1.36}$$

现在令

$$S=U+AV \tag{1.37}$$

式中，A为待定的复常数，则

$$L(S)=L(U)+AL(V) \tag{1.38}$$

将式(1.28)和(1.33)代入式(1.38)，并且注意式(1.36)，可得

$$L(S)=12(1-\nu^2)r_1^2AU+(2\nu h_0A-1)V+F \tag{1.39}$$

设

$$12(1-\nu^2)r_1^2A=-B \tag{1.40}$$

$$2\nu h_0A-1=-AB \tag{1.41}$$

其中B为复常数，则可将式(1.39)写为

$$L(S)+BS=F \tag{1.42}$$

由式(1.40)和(1.41)可以求得

$$A=\frac{\nu h_0}{12(1-\nu^2)r_1^2}(1+i\lambda) \tag{1.43}$$

$$B=-\nu h_0(1+i\lambda) \tag{1.44}$$

其中

$$\lambda=\sqrt{12(1-\nu^2)\left(\frac{r_1}{\nu h_0}\right)^2-1} \tag{1.45}$$

将式(1.27)和(1.4)代入式(1.42)

$$\frac{d^2S}{d\varphi^2}+\left(\frac{\cos\varphi}{k+\sin\varphi}-\frac{1}{h}\frac{dh}{d\varphi}\right)\frac{dS}{d\varphi}+\left[\frac{\nu\sin\varphi}{k+\sin\varphi}+\frac{\nu\cos\varphi}{h(k+\sin\varphi)}\frac{dh}{d\varphi}\right.$$
$$\left.-\frac{\cos^2\varphi}{(k+\sin\varphi)^2}-(1+i\lambda)\frac{\nu h_0\sin\varphi}{h(k+\sin\varphi)}\right]S=F \tag{1.46}$$

令

$$S=T\sqrt{\frac{h}{k+\sin\varphi}} \tag{1.47}$$

并注意式(1.35)，则可将式(1.46)写为

$$\frac{d^2T}{d\varphi^2}+J(\varphi)T=F_1 \tag{1.48}$$

式中

$$J(\varphi)=\frac{\sin\varphi}{2(k+\sin\varphi)}\left[1+\nu-\frac{\nu h_0(1+2i\lambda)}{h_0+a(k+\sin\varphi)^{\nu}}\right]$$
$$-\frac{3}{4}\left(\frac{\cos\varphi}{k+\sin\varphi}\right)^2\left\{1+\left[\frac{\nu a(k+\sin\varphi)^{\nu}}{h_0+a(k+\sin\varphi)^{\nu}}\right]^2\right.$$
$$\left.-\frac{2\nu^2a(k+\sin\varphi)^{\nu}}{h_0+a(k+\sin\varphi)^{\nu}}\right\} \tag{1.49}$$

而

$$F_1=F\sqrt{\frac{k+\sin\varphi}{h_0+a(k+\sin\varphi)^\nu}} \tag{1.50}$$

令

$$\beta=\frac{\pi(\varphi-\varphi_1)}{2(\varphi_2-\varphi_1)} \tag{1.51}$$

式中φ_1和φ_2为φ的边界值，则方程(1.48)可以变换为

$$\frac{d^2T}{d\beta^2}+J_1(\beta)T=F^*(\beta) \tag{1.52}$$

式中

$$J_1(\beta)=\frac{4}{\pi^2}(\varphi_2-\varphi_1)^2J(\varphi(\beta)) \tag{1.53}$$

而

$$F^*(\beta)=\frac{4}{\pi^2}(\varphi_2-\varphi_1)^2F_1(\varphi(\beta)) \tag{1.54}$$

二、微分方程的解

让我们求解方程(1.52)。

1. 齐次解

与方程(1.52)相应的齐次方程为

$$\frac{d^2T}{d\beta^2}+J_1T=0 \tag{2.1}$$

视J_1为β的周期等于π的偶函数，则方程(2.1)的解为[1]

$$T=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t_n\exp[i(2n+\mu)\beta] \tag{2.2}$$

为了求出特征指数μ和系数t_n，可将J_1在β的变化区间$[0,\pi/2]$上展成富氏余弦级数

$$J_1=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos 2k\beta \tag{2.3}$$

系数a_k可用某一方法确定。例如，如果要求：

i) 当$0\leqslant k\leqslant 1$时

$$\sin\varphi_j+k\neq 0 \qquad (j=1,2) \tag{2.4}$$

ii) 下列不等式在区间$[\varphi_1,\varphi_2]$上处处成立

$$h_0+a(k+\sin\varphi)^\nu\neq 0 \tag{2.5}$$

则系数a_k可用数值积分法计算。

特征指数μ可用下列公式确定：

$$\sin^2\left(\frac{\mu\pi}{2}\right)=\Delta(0)\sin^2\left(\frac{\sqrt{a_0}\,\pi}{2}\right) \tag{2.6}$$

式中

$$\Delta(0)=1+\frac{\pi\cot\left(\frac{\sqrt{a_0}\pi}{2}\right)}{4\sqrt{a_0}}\left(\frac{a_1^2}{1^2-a_0}+\frac{a_2^2}{2^2-a_0}\right.$$

$$\left.+\frac{a_3^2}{3^2-a_0}+\cdots+\frac{a_k^2}{k^2-a_0}+\cdots\right) \tag{2.7}$$

由式(2.6)可以求得

$$\mu_1=\mu_0,\quad \mu_2=-\mu_0 \tag{2.8}$$

式中

$$\mu_0=\frac{2}{\pi}\arc\sin\left[\sqrt{\Delta(0)}\sin\frac{\sqrt{a_0}\pi}{2}\right] \tag{2.9}$$

系数t_n由下列方程组确定：

$$-(\mu_j+2n)^2t_n^{(j)}+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kt_{n-k}^{(j)}=0$$

$$(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots;\ a_{-k}=a_k;\ j=1,2) \tag{2.10}$$

由于μ_0不是整数，所以方程(2.1)的两个线性独立解为

$$T_1=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t_n^{(1)}\exp[i(2n+\mu_0)\beta] \tag{2.11}$$

$$T_2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t_n^{(2)}\exp[i(2n-\mu_0)\beta] \tag{2.12}$$

2. 特解

假设$F^*(\beta)$可在区间$0,\pi/2$上展开为富氏余弦级数，并将J_1和F^*写成如下形式：

$$J_1=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\exp[2ik\beta],\qquad a_{-k}=a_k \tag{2.13}$$

$$F^*=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n^*\exp[2in\beta],\qquad f_{-n}^*=f_n^* \tag{2.14}$$

设方程(1.52)的特解为

$$T^{(p)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t_n^*\exp[2in\beta] \tag{2.15}$$

将式(2.13)、(2.14)和(2.15)代入式(1.52)可得

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}(2n)^2t_n^*\exp[2in\beta]+\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\exp[2ik\beta]\sum_{n=-\infty}^{\infty}t_n^*\exp[2in\beta]$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f_n^*\exp[2in\beta] \tag{2.16}$$

因此，系数t_n^*由下列方程组确定：

$$-(2n)^2 t_n^* + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k t_{n-k}^* = f_n^* \qquad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots) \tag{2.17}$$

参 考 文 献

[1] 王竹溪、郭敦仁，《特殊函数概论》，科学出版社（1965），703—708.

Equation of Axisymmetrical Ring Shells with Variable wall Thickness in Complex Quantity and Its General Solution

Wang Shen-xing

(China Tianjin Chemical Engineering Corporation, Tianjin)

Abstract

The purpose of this paper is to derive the equation of axisymmetrical ring shells with variable wall thickness in complex quantity and to give its general solution.