应用数学和力学，第10卷第1期(1989年1月)　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

n维空间正交张量的典则表示和自由度公式

熊祝华　　郑泉水

（湖南大学、江西工业大学）　（江西工业大学）

（扬桂通推荐，1987年7月11日收到）

摘　要

本文借助于正交张量特征值的特性，采用剖分的方法．利用二维正交张量典则表示，很快就构造出一般n维欧氏空间上的正交张量的典则表示．利用 Cayley-Hamilton 定理，求得了正交张量各主不变量之间的相关方程，从而使得正交张量特征根的求解只需要在一个阶数不大于空间维数n的一半的代数方程上进行．本文还给出了正交张量的独立参数个数——自由度的计算公式．

一、引　言

正交张量首先以转动张量这个特殊情形由 Euler[1](1758)引进，他采用三个所谓 Euler 角的独立标量参数刻划刚体的一般定点转动；Richter[2](1952)首先把Cauchy的极分解引进到近代连续介质有限变形理论，从此，转动张量就成为该理论必不可少的度量；由E．和F．Cosserat[3](1909)兄弟俩提出，并在60年代成熟起来的极性介质变形理论，则更是用转动张量作为直接的、独立的几何度量．所有这些转动张量在远比刚性运动复杂的领域中应用时，都要求具有张量的不变性形式，即转动张量的典则式．Euler 的方法不能满足这一要求．此外正交张量的典则形式在经典与近代物理中也都有着许多应用．

近几十年来，在三维正交张量典则式的构造方面出现了许多文献，郭仲衡[4](1981)对此作了系统的总结；这些工作一般系采用代数的或几何的构造性方法所得，其中利用Cayley-Hamilton 定理所进行的构造是较简单的一种方法[5]．本文通过正交张量特征子空间对空间进行正交剖分，很快就构造出一般n维欧氏空间上正交张量的典则形式．

二、正交张量的特征子空间

下面具体在某个n维欧氏空间$\mathscr{E}_n$上进行讨论，即所讨论的矢量及张量都是$\mathscr{E}_n$上的．记$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$、$\mathbf{ab}$和$|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{aa}}$分别为任意矢量$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$的张量积、内积和$\mathbf{a}$的长度；$\mathbf{B}^T$，$\mathrm{tr}\mathbf{B}$和$\det\mathbf{B}$分别为任意二阶张量$\mathbf{B}$的转置、迹函数和行列式函数．一个二阶张量$\mathbf{Q}$被称作为正交张量，如果$\mathbf{Q}$能满足下述三个互相等价的条件之一

（1）　$|\mathbf{Qa}|=|\mathbf{a}|$；　(2.1)

（2）　$(\mathbf{Qa})(\mathbf{Qb})=\mathbf{ab}$；　(2.2)

（3）　$Q^TQ=QQ^T=I$　　(2.3)

其中**a**，**b**是任意矢量，**I**是单位二阶张量。(2.3)表明一个正交张量Q必须可逆，其逆Q^{-1}等于转置Q^T。

一个复值矢量v^*指的是存在两个矢量**a**和**b**，使得$v^*=a+ib$，其中$i=\sqrt{-1}$为纯虚单位。v^*的共轭为$\bar{v}^*=a-ib$，大小为

$$|v^*|=\sqrt{\bar{v}^*v^*}=\sqrt{a^2+b^2} \tag{2.4}$$

任意给定正交张量Q，记Q的n个主不变量为

$$\mathrm{I}_k=\mathrm{I}_k(Q)\quad(k=1,2,\cdots,n) \tag{2.5}$$

已知道$\mathrm{I}_1=\mathrm{tr}Q$，$\mathrm{I}_n=\det Q$，等等。由(2.3)又得$\det(Q^TQ)=(\det Q)^2=\det I=1$，即

$$\mathrm{I}_n=\det Q=\pm 1 \tag{2.6}$$

对Q的特征方程

$$Q\,r^*=\lambda\,r^* \tag{2.7}$$

特征值λ必须是下述Q的特征值方程的根

$$\lambda^n-\mathrm{I}_1\lambda^{n-1}+\mathrm{I}_2\lambda^{n-2}-\cdots+(-1)^n\mathrm{I}_n=0 \tag{2.8}$$

在复数域上，上述n次方程总是存在n个根的，对应其中的复根，显然，(2.7)中的r^*只能取复值矢量。

记λ是(2.8)的任意一个（复）根，相应的（复值）特征矢量为r^*。根据(2.2)，我们有

$$(\overline{Qr^*})(Qr^*)=\bar{\lambda}\lambda\bar{r}^*r^*=\bar{r}^*r^* \tag{2.9}$$

因为$|r^*|^2=\bar{r}^*r^*>0$，故

$$|\lambda|=\bar{\lambda}\lambda=1 \tag{2.10}$$

这就证明了Q的特征根的集合$\mathscr{S}$由$+1$，-1和成对的单位共轭复数组成。因为全部特征值之乘积又等于$\mathrm{I}_n=\det Q=\pm 1$，若再把Q的特征值集合中成对的$+1$和成对的$-1$都归算到属于共轭单位复数范畴，便已得到

引理1　当空间$\mathscr{E}_n$维数是奇数，即$n=2m+1$时，任意正交张量Q的特征值集合$\mathscr{S}$由I_n和m对共轭单位复数组成；当$\mathscr{E}_n$的维数是偶数，即$n=2m$时，若$\mathrm{I}_n=1$，则Q的特征值集合$\mathscr{S}$由m对共轭单位复数组成，若$\mathrm{I}_n=-1$，则Q的特征值集合$\mathscr{S}$由$+1$，-1和$m-1$对共轭单位复数组成。

对Q的每一个复特征根λ，记$r^*=a+ib$为Q的相应λ的复值特征矢量，由**a**和**b**张成的一个$\mathscr{E}_n$的二维子空间$L(a,b)$称作为$\mathscr{E}_n$的相应λ的特征子空间。显然，$L(a,b)$中任意矢量在Q作用下仍然是$L(a,b)$中的矢量，$L(a,b)$是Q的一个不变子空间。

三、二维空间正交张量的典则表示

将约定采用符号R^+和R^-分别表示二维空间中行列式为$+1$和-1的正交张量；称R^+为**转动张量**，R^-为**翻转张量**。行列式为$+1$的任意维空间的正交张量则称作为**正常正交张量**。下面推导R^+和R^-的典则式。

因$\det R^+=1$，故可设R^+的特征根为

$$\exp[i\theta]=\cos\theta+i\sin\theta,\ \exp[-i\theta]=\cos\theta-i\sin\theta \tag{3.1}$$

相应的复特征矢量记为$e_1\pm ie_2$。于是，特征方程(2.7)在此时可等价地用

$$\left.\begin{aligned}R^+e_1&=\cos\theta e_1+\sin\theta e_2\\R^+e_2&=-\sin\theta e_1+\cos\theta e_2\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

表示。由$(\mathbf{R}^{+}\mathbf{e}_k)(\mathbf{R}^{+}\mathbf{e}_j)=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_j \quad (k,j=1,2)$，推出

$$(\mathbf{e}_1^2-\mathbf{e}_2^2)\sin\theta=0, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\sin\theta=0 \tag{3.3}$$

当$\sin\theta\neq 0$时，由(3.3)，我们不妨设

$$|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2=0 \tag{3.4}$$

再由(3.2)，便可导出

$$\mathbf{R}^{+}=\cos\theta\mathbf{I}-\sin\theta\boldsymbol{\epsilon} \tag{3.5}$$

其中

$$\mathbf{I}=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2, \quad \boldsymbol{\epsilon}=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 \tag{3.6}$$

$\mathbf{I}$与单位正交标架$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$的选择无关，刚好是单位二阶张量；$\boldsymbol{\epsilon}$与相同旋向的单位正交标架$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$的选择无关，正是置换张量。如果$\sin\theta=0$，则由(3.2)，可以直接规定(3.4)，故此时仍然有(3.5)成立。

因$\det\mathbf{R}^{-}=-1$，由引理1，$\mathbf{R}^{-}$的特征根只能是$+1$和-1。记$\mathbf{R}^{-}$的特征方程为

$$\mathbf{R}^{-}\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_1, \quad \mathbf{R}^{-}\mathbf{n}_2=-\mathbf{n}_2, \quad (|\mathbf{n}_1|=|\mathbf{n}_2|=1) \tag{3.7}$$

由$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2=(\mathbf{R}^{-}\mathbf{n}_1)(\mathbf{R}^{-}\mathbf{n}_2)=\mathbf{n}_1(-\mathbf{n}_2)$，又推出$\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2=0$，从而$\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$构成一单位正交标架。由(3.7)易得

$$\mathbf{R}^{-}=\mathbf{n}_1\otimes\mathbf{n}_1-\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2=\mathbf{I}-2\mathbf{n}_2\otimes\mathbf{n}_2 \tag{3.8}$$

式(3.5)和(3.8)分别就是$\mathbf{R}^{+}$和$\mathbf{R}^{-}$的典则表示。式(3.5)形式下$\mathbf{R}^{+}$的几何意义是，$\mathbf{R}^{+}$使得每个矢量沿$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$的旋向转过角度$\theta$；式(3.8)形式下$\mathbf{R}^{-}$的几何意义是，$\mathbf{R}^{-}$使得每个矢量沿$\mathbf{n}_2$方向反射。

四、n维空间正交张量的典则表示

首先对$n=2m+1$维空间$\mathscr{E}_n$上的任意给定正交张量$\mathbf{Q}$进行讨论。根据引理1，此时$\mathrm{I}_n=\det\mathbf{Q}$为$\mathbf{Q}$的一特征根，相应的单位化特征矢量为$\mathbf{e}$，记$L=L(\mathbf{e})$为$\mathbf{e}$张成的一维子空间，$L^c$为$L$的直交补($\mathscr{E}_n$的一个$n-1=2m$维子空间)。于是，可以把$\mathbf{Q}$一般写成

$$\mathbf{Q}=\mathrm{I}_n\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}+\mathbf{a}\otimes\mathbf{e}+\mathbf{e}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{Q}_0 \tag{4.1}$$

其中$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$为L^c上的矢量，$\mathbf{Q}_0$为L^c上的二阶张量。于是，利用$\mathbf{a}\mathbf{e}=\mathbf{b}\mathbf{e}=\mathbf{Q}_0\mathbf{e}=\mathbf{e}\mathbf{Q}_0=0$和$\mathrm{I}_n^2=1$即可得

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=&(1+\mathbf{a}^2)\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}+(\mathrm{I}_n\mathbf{b}+\mathbf{Q}_0^T\mathbf{a})\otimes\mathbf{e}\\&+\mathbf{e}\otimes(\mathrm{I}_n\mathbf{b}+\mathbf{a}\mathbf{Q}_0)+(\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}+\mathbf{Q}_0^T\mathbf{Q}_0)\end{aligned} \tag{4.2}$$

因为$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}=(\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})+(\mathbf{I}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})$，其中$\mathbf{I}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}$构成$L^c$上的单位矢量，故由(4.2)得$\mathbf{a}=\mathbf{b}=0$，以及

$$\mathbf{Q}_0^T\mathbf{Q}_0=\mathbf{I}_{L^c}=\mathbf{I}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{e} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{Q}=\mathrm{I}_n\mathbf{e}\otimes\mathbf{e}+\mathbf{Q}_0 \tag{4.4}$$

可见，$\mathbf{Q}_0$是L^c上的正交张量。再注意到

$$\mathrm{I}_n=\det\mathbf{Q}|_{\mathscr{E}_n}=\det(\mathrm{I}_n\mathbf{e}\otimes\mathbf{e})|_L\cdot\det(\mathbf{Q}_0)|_{L^c}$$

即得

$$\det\mathbf{Q}_0|_{L^c}=1 \tag{4.5}$$

因此$\mathbf{Q}_0$是L^c上的正常正交张量。

当空间维数为$n=2m$时，必须对正常正交张量和非正常正交张量分别进行讨论。设$\mathbf{Q}$是一个非正常正交张量，即$\det\mathbf{Q}=-1$。由引理1，$\mathbf{Q}$有$+1$和-1的特征根，相应的特征方程为

$$\mathbf{Q}\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_1,\quad \mathbf{Q}\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_2 \tag{4.6}$$

类似第三节对$\mathbf{R}^-$的讨论，可以证明，$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$是正交的，故不妨认为$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$单位正交。记

$$\mathbf{R}_1^-=\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 \tag{4.7}$$

比较(3.8)和(4.7)，可见$\mathbf{R}_1^-$是由$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$张成的二维子空间$M=M(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$上的翻转张量。记$M^c$为$M$的正交补（为一个$2m-2$维子空间），于是$\mathbf{Q}$可以表示成

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R}_1^-+\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}+\mathbf{b}\otimes\mathbf{b}_1+\mathbf{Q}_1 \tag{4.8}$$

其中$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{b}_1$为M上的矢量，$\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$为M^c上的矢量，$\mathbf{Q}_1$为M^c上的二阶张量，利用$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$，就可证明

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R}_1^-+\mathbf{Q}_1,\quad \mathbf{Q}_1^T\mathbf{Q}_1=\mathbf{I}-(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2) \tag{4.9}$$

由于$\mathbf{I}_{M^c}=\mathbf{I}-(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)$刚好是$M^c$上的单位张量，故$\mathbf{Q}_1$是$M^c$上的正交张量。再由

$$\det\mathbf{Q}|_{\mathscr{E}_n}=\det\mathbf{R}_1^-|_M\cdot\det\mathbf{Q}_1|_{M^c} \tag{4.10}$$

以及

$$\det\mathbf{Q}|_{\mathscr{E}_n}=-1,\quad \det\mathbf{R}_1^-|_M=-1 \tag{4.11}$$

可见$\mathbf{Q}_1$又是M^c上的正常正交张量。

对于$n=2m$维空间$\mathscr{E}_n$上的正常正交张量$\mathbf{Q}$，按照引理1，$\mathbf{Q}$的特征根全部由单位共轭复数对组成，任取$\exp[i\theta]$和$\exp[-i\theta]$为$\mathbf{Q}$的一对单位共轭复特征根，$\mathbf{e}_1\pm i\mathbf{e}_2$为相应的复值特征矢量。(类似第三节中对$\mathbf{R}^+$的讨论，可以证明，不妨设$|\mathbf{e}_1|=|\mathbf{e}_2|=1$，$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2=0$。于是

$$\mathbf{R}_1^+=\cos\theta(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2)-\sin\theta(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1) \tag{4.12}$$

构成了对应$\exp[\pm i\theta]$的$\mathbf{Q}$的特征子空间，即$\mathbf{e}_1$和$\mathbf{e}_2$张成的二维子空间$N=N(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$上的转动张量。类似在前面进行过的讨论，可以证明

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R}_1^++\mathbf{Q}_2 \tag{4.13}$$

其中$\mathbf{Q}_2$是$N(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$的正交补$N^c$上的正常正交张量。

综合上述全部讨论，可归纳成下述n维空间正交张量典则表示的基本定理：

定理1 对任意给定的n维欧氏空间$\mathscr{E}_n$上的正交张量$\mathbf{Q}$，可以将$\mathbf{Q}$分解表示为

（1） 当$n=2m+1$时，

$$\mathbf{Q}=(\det\mathbf{Q})\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\mathbf{R}_1^++\mathbf{R}_2^++\cdots+\mathbf{R}_m^+ \tag{4.14}$$

其中单位矢量$\mathbf{e}_1$满足$\mathbf{Q}\mathbf{e}_1=(\det\mathbf{Q})\mathbf{e}_1$，$\mathbf{R}_k^+(k=1, 2, \cdots, m)$是分别对应于$\mathbf{Q}$的各单位共轭复特征值的特征子空间上的转动张量；

（2） 当$n=2m$且$\det\mathbf{Q}=1$时，

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R}_1^++\mathbf{R}_2^++\cdots+\mathbf{R}_m^+ \tag{4.15}$$

若$\det\mathbf{Q}=-1$，

$$\mathbf{Q}=\mathbf{R}_1^-+\mathbf{R}_2^++\cdots+\mathbf{R}_m^+ \tag{4.16}$$

其中$\mathbf{R}_k^+$为对应各单位共轭复特征值对的特征子空间上的转动张量，$\mathbf{R}_1^-$为相应特征值对(1，−1)的特征子空间上的翻转张量。

作为定理1的一个应用，我们给出三维欧氏空间上正交张量$\mathbf{Q}$的典则表示。由(4.14)，

$$\mathbf{Q}=\mathrm{III}\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\cos\theta(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)-\sin\theta(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2) \tag{4.17}$$

其中$\mathrm{III}=\det\mathbf{Q}$，$\mathbf{e}_1$满足$\mathbf{Q}\mathbf{e}_1=\mathrm{III}\,\mathbf{e}_1$，$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$构成一单位正交标架。记$\epsilon$为三维空间的置换张量，于是

$$\left.\begin{aligned}L&=-\epsilon\mathbf{e}_1=-(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2)\\ L^2&=-(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3)\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

可见(4.17)中的$\mathbf{Q}$又可进一步表示成

$$Q = \mathrm{III}\,\mathbf{I} + \sin\theta\mathbf{L} + (\mathrm{III} - \cos\theta)\mathbf{L}^2 \tag{4.19}$$

这正是常见的三维空间正交张量的典则表示。

若采用分量矩阵形式表示(4.14)，(4.15)和(4.16)，则可表示为存在单位正交 架 {$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_n$}，正交张量Q在该标架下的分量矩阵为

$[\mathbf{Q}]=$
(对应(4.14))
$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathrm{I}_n} & & & & \\ & \begin{matrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{matrix} & & & \\ & & \begin{matrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{matrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \begin{matrix}\cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

$[\mathbf{Q}]=$
(对应(4.15))
$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix}\cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$[\mathbf{Q}]=$
(对应(4.16))
$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix}\cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix}\cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

其中 $\cos\theta_1 \pm i\sin\theta_1$，…，$\cos_m \pm i\sin\theta_m$ 为Q的单位共轭复值特征根。上述结果与前人所得结

果相一致(参见[6]，第99～100页)。

五、正交张量的特征根方程

根据定理1，每个具体正交张量Q的典则表示需要计算Q的各个特征根。为此必需简化Q的特征根方程。

我们知道，任意二阶张量，特别地，正交张量Q的主不变量可由迹函数求解如下

$$k\cdot \mathrm{I}_k=\mathrm{I}_{k-1}\mathrm{tr}Q-\mathrm{I}_{k-2}\mathrm{tr}Q^2+\cdots+(-1)^{k-1}\mathrm{tr}Q^k \tag{5.1}$$

其中$k=1, 2, \cdots, n$；$\mathrm{I}_k=\mathrm{I}_k(Q)$为Q的第$k$个主不变量。另一方面，从Q的Cayley-Hamilton 方程

$$Q^n-\mathrm{I}_1Q^{n-1}+\cdots+(-1)^n\mathrm{I}_n I=0 \tag{5.2}$$

利用$Q^{-1}=Q^T$，可获得下列与(5.2)等价的方程

$$\begin{aligned}&Q^{n-k}-\mathrm{I}_1Q^{n-k-1}+\cdots+(-1)^{n-k}\mathrm{I}_{n-k}I+(-1)^{n-k+1}\mathrm{I}_{n-k+1}Q^T\\&+\cdots+(-1)^n\mathrm{I}_n(Q^T)^k=0\qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)\end{aligned} \tag{5.3}$$

再利用$\mathrm{tr}Q^T=\mathrm{tr}Q$，由(5.3)求迹函数得

$$\begin{aligned}&\{\mathrm{tr}Q^{n-k}-\mathrm{I}_1\mathrm{tr}Q^{n-k-1}+\cdots+(-1)^{n-k-1}\mathrm{I}_{n-k-1}\mathrm{tr}Q\}+\{(-1)^{n-k}\mathrm{I}_{n-k}\mathrm{tr}I\}\\&+\{(-1)^{n-k+1}\mathrm{I}_{n-k+1}\mathrm{tr}Q+\cdots+(-1)^n\mathrm{I}_n\mathrm{tr}Q^k\}=0\end{aligned} \tag{5.4}$$

由(5.1)，可见(5.4)中第一个大括号项等于

$$(-1)^{n-k-1}(n-k)\mathrm{I}_{n-k} \tag{5.5}$$

而第二个大括号项等于$(-1)^{n-k}n\mathrm{I}_{n-k}$，故(5.4)可写成

$$k\mathrm{I}_{n-k}=\mathrm{I}_{n-k+1}\mathrm{tr}Q-\cdots+(-1)^{k-1}\mathrm{I}_n\mathrm{tr}Q^k \tag{5.6}$$

特别地

$$\begin{aligned}&\mathrm{I}_{n-1}=\mathrm{I}_n\mathrm{tr}Q=\mathrm{I}_1\mathrm{I}_n\\&2\mathrm{I}_{n-2}=\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{tr}Q-\mathrm{I}_n\mathrm{tr}Q^2=\mathrm{I}_n(\mathrm{I}_1\mathrm{tr}Q-\mathrm{tr}Q^2)=2\mathrm{I}_2\mathrm{I}_n\\&3\mathrm{I}_{n-3}=\mathrm{I}_{n-2}\mathrm{tr}Q-\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{tr}Q^2+\mathrm{I}_n\mathrm{tr}Q^3=\mathrm{I}_n(\mathrm{I}_2\mathrm{tr}Q-\mathrm{I}_1\mathrm{tr}Q^2+\mathrm{tr}Q^3)\\&\qquad=3\mathrm{I}_3\mathrm{I}_n\end{aligned}$$

等等，其中利用了(5.1)。于是得到

定理2 任意正交张量Q的各主不变量满足

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{I}_n^2=1\\&\mathrm{I}_{n-1}=\mathrm{I}_1\mathrm{I}_n,\quad 或\quad \mathrm{I}_1=\mathrm{I}_{n-1}\mathrm{I}_n\\&\mathrm{I}_{n-2}=\mathrm{I}_2\mathrm{I}_n,\quad 或\quad \mathrm{I}_2=\mathrm{I}_{n-2}\mathrm{I}_n\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&\mathrm{I}_{n-m}=\mathrm{I}_m\mathrm{I}_n,\quad 或\quad \mathrm{I}_m=\mathrm{I}_{n-m}\mathrm{I}_n\end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

其中m对应$n=2m$和$n=2m+1$。

下面给出(5.7)的两个应用。

二维空间任意给定正交张量Q的两个主不变量Ⅰ和Ⅱ满足

$$\mathrm{II}^2=1,\qquad \mathrm{I}=\mathrm{I}\,\mathrm{II} \tag{5.8}$$

故当$\mathrm{II}=-1$时，由(5.8)推出$\mathrm{I}=0$，Q的特征方程为$\lambda^2-\mathrm{I}\lambda+\mathrm{II}=\lambda^2-1=0$，故有$+1$和$-1$两个特征根。当$\mathrm{II}=1$时，两个特征根为

$$\exp[\pm i\theta]=\frac{\mathrm{I}}{2}\pm i\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{I}}{2}\right)^2} \tag{5.9}$$

三维空间任意给定正交张量Q的三个主不变量Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ满足

$$\mathrm{III}^2=1,\quad \mathrm{I}=\mathrm{II}\,\mathrm{III}\quad 或\quad \mathrm{II}=\mathrm{I}\,\mathrm{III} \tag{5.10}$$

于是，Q的特征根方程可写成

$$\lambda^3-\mathrm{I}\lambda^2+\mathrm{II}\lambda-\mathrm{III}=(\lambda-\mathrm{III})[\lambda^2-(\mathrm{I}-\mathrm{III})\lambda+1]=0 \tag{5.11}$$

故(4.19)中的$\cos\theta$由

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{2} \tag{5.12}$$

计算（当然，该结果也可由(4.19)两边求迹数直接获得）。

一般地，对$n=2m+1$，由(5.7)，正交张量Q的特征根方程可写成

$$\begin{aligned}&\{\lambda^{2m+1}-\mathrm{I}_1\lambda^{2m}+\cdots+(-1)^m\mathrm{I}_m\lambda^{m+1}\}\\&\quad-\mathrm{I}_n\{(-1)^m\mathrm{I}_m\lambda^m+\cdots+(-1)\mathrm{I}_1\lambda+1\}=0\end{aligned} \tag{5.13}$$

删去因子$(\lambda-\mathrm{I}_n)$后，(5.13)成为

$$(\lambda^{2m+1})-a_1(\lambda^{2m-1}+\lambda)+\cdots+(-1)^m a_m\lambda^m=0 \tag{5.14}$$

易求得推算a_1，a_2，…，a_m的方程为

$$\left.\begin{aligned}&a_1+\mathrm{I}_n=\mathrm{I}_1\\&a_2+\mathrm{I}_n a_1=\mathrm{I}_2\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&a_m+\mathrm{I}_n a_{m-1}=\mathrm{I}_m\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

对$n=2m$，$\det Q=1$的情形，特征根方程为

$$(\lambda^{2m}+1)-\mathrm{I}_1(\lambda^{2m-1}+\lambda)+\cdots+(-1)^m\mathrm{I}_m\lambda^m=0 \tag{5.16}$$

对$n=2m$，$\det Q=-1$的情形，特征根方程为

$$(\lambda^{2m}-1)-\mathrm{I}_1(\lambda^{2m-1}-\lambda)+\cdots+(-1)^{m+1}\mathrm{I}_{m-1}(\lambda^{m+1}-\lambda^{m-1})=0 \tag{5.17}$$

消去因子(λ^2-1)后，(5.17)将化成

$$(\lambda^{2m-2}+1)-b_1(\lambda^{2m-3}+\lambda)+\cdots+(-1)^{m-1}b_{m-1}\lambda^{m-1}=0 \tag{5.18}$$

其中，系数b_1，…，b_{m-1}的计算公式为

$$\left.\begin{aligned}&b_1=\mathrm{I}_1 &&b_2=1+\mathrm{I}_2\\&b_3=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_3 &&b_4=1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_4\\&b_5=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_3+\mathrm{I}_5 &&b_6=1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_4+\mathrm{I}_6\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots &&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

总之，实际特征根的计算只需要在形如(5.14)（或(5.18)）的方程上进行，因为$\bar{\lambda}\lambda=1$，其中$\bar{\lambda}$为λ的复共轭，故(5.14)可化成

$$(\cos\theta)^m-a_1(\cos\theta)^{m-1}+\cdots+(-1)^m a_m=0 \tag{5.20}$$

其中

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(\lambda+\bar{\lambda}),\quad 或\quad \lambda=\exp[\pm i\theta] \tag{5.21}$$

这是一个方程阶数不大于空间维数的一半值的代数方程。

六、自由度公式

下面根据定理1确定正交张量所能具有的独立参数个数，即正交张量的自由度。对于式

(4.20)～(4.22)中的 θ_1，θ_2，…，θ_m，它们显然可以独立地变化而不影响对应的Q为正交张量；再考虑到exp[$i\theta_1$]，exp[$-i\theta_1$]，…，exp[$-i\theta_m$]为Q的特征值，这又证明了在Q的各主不变量之间不可能存在比(5.7)更多的关系，形如(5.14)的方程已经是求解Q的特征值的最简单的方程了。因此，要确定正交张量Q的自由度，对(4.14)～(4.16)三种情况都归结为确定m个互相正交的二维子空间所需要的独立参数个数问题。

我们知道，任意两个非共向矢量**a**，**b**确定一个二维子空间 Σ(**a**，**b**)。采用外积 $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}-\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})/2$便可完全确定$\Sigma$(**a**，**b**)，任意两个矢量$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{b}_1$属于$\Sigma$(**a**，**b**)，当且仅当存在常数 C，使得 $\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{b}_1=C\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ 即 $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ 构成Σ(**a**，**b**)的一个定向基，它可以相差任意一个非零因子。因为$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$共有$C_n^2=n(n-1)/2$个独立参数，故确定$\Sigma$(**a**，**b**)需要$C_n^2-1$个独立变数，依次递推，便可求得确定$m$个互相正交的二维子空间所需要的独立参数个数。再由(4.14)，(4.15)，(4.16)就可获得如下结论

定理3 n维空间正交张量Q的自由度D为

(a) 当$n=2m+1$时

$$D=m+\left[\binom{2m-1}{2}-1\right]\left[\binom{2m-1}{2}-1\right]\cdots\left[\binom{3}{2}-1\right]/m!$$

$$=m+\frac{(m+1)}{2^m m!}(2m)!; \tag{6.1}$$

(b) 当$n=2m$ 且 $\det Q=1$时

$$D=m+\left[\binom{2m}{2}-1\right]\left[\binom{2m-2}{2}-1\right]\cdots\left[\binom{4}{2}-1\right]/(m-1)!$$

$$=\begin{cases} m+\dfrac{(2m+1)!}{3\cdot 2^m m!}, & (\text{若}m>1) \\ 1, & (\text{若}m=1) \end{cases} \tag{6.2}$$

(c) 当$n=2m$ 且 $\det Q=-1$时

$$D=\begin{cases} m-1+\dfrac{(2m+1)!}{3\cdot 2^m\cdot m!}, & (\text{若}m>1) \\ 0, & (\text{若}m=1) \end{cases} \tag{6.3}$$

参 考 文 献

[1] Euler, L., Du mourement de rotation des corps solids autour d'un axe variable, *Mem. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres de Berlin*, 14 (1758), 154—193.

[2] Richter, H., Zur elstaizitätsheorie endlicher verformungen, *Math. Nachr.* 8 (1952), 65—73; English transl., Continuum mechanics III, Foundations of elasticity theory, C. Truesdell, ed. (1965).

[3] Cosserat, E. and F., *Theorie des Corps Deformable*, Hermann, Paris (1909).

[4] Guo, Z. H., Representations of orthogonal tensors, *SM Archives*, 6 (1981), 451—466.

[5] 郑泉水，正交张量典则表示一个新证明，江西工学院学报，4 (1984)，1—3.

[6] 郭仲衡，《张量（理论和应用）》，科学出版社 (1988).

Canonical Representations and Degree of Freedom Formulae of Orthogonal Tensors in n-Dimensional Euclidean Space

Xiong Zhu-hua

(*Hunan University, Changsha; Jiangxi Polytechnic University, Nanchang*)

Zheng Quan-shui

(*Jiangxi Polytechnic University, Nanchang*)

Abstract

In this paper, with the help of the eigenvalue properties of orthogonal tensors in n-dimensional Euclidean space and the representations of the orthogonal tensors in 2-dimensional space, the canonical representations of orthogonal tensors in n-dimensional Euclidean space are easily gotten. The paper also gives all the constraint relationships among the principal invariants of arbitrarily given orthogonal tensor by use of Cayley-Hamilton theorem; these results make it possible to solve all the eigenvalues of any orthogonal tensor based on a quite reduced equation of m-th order, where m is the integer part of $n/2$. Finally, the formulae of the degree of freedom of orthogonal tensors are given.