应用数学和力学，第9卷第12期（1988年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Melnikov函数和Poincaré映射

徐振源　　李　骊

（无锡轻工业学院）　（北京工业大学）

（1987年7月7日收到）

摘　　要

本文中我们给出了Melnikov函数和Poincaré映射的关系，从而给出了Melnikov方法的新的证明．本文的优点是给出了更明确的解，并把次谐分支的Melnikov函数与稳定流形与不稳定流形横截相交的Melnikov函数统一成为一个公式．

一、引　　言

在文[1]和[2]中建立了一个非线性力学的新的渐近方法．对于以下的方程

$$\ddot{x}+g(x)=\varepsilon f(x,\dot{x}) \tag{1.1}$$

其中

$$g(x)=\sum_{n=1}^{N}K_n x^n$$

得到了渐近解．

本文中我们研究了以下方程

$$\ddot{x}+g(x)=\varepsilon\mu f(x,\dot{x})+\varepsilon\delta h(x,\dot{x},\omega t) \tag{1.2}$$

其中$h(x,\dot{x},\omega t)$是关于t的周期$T(T=2\pi/\omega)$的周期函数，我们也得到了渐近解．

最近混沌理论引起很大的关注，其中Melnikov方法在处理具有同宿或异宿轨线的平面Hamilton小扰动系统的次谐分支和马蹄出现的判断是比较有效的．这方法是Melnikov在[3]中提出，后来由Chow，J．Hale[4]和Holmes[5]等推广加工而成．

我们利用[1,2]中的渐近解也得到了Melnikov方法．我们方法的优点是能给出比较明确的表达式，并且将次谐分支的Melnikov函数与稳定流形与不稳定流形横截相交的Melnikov函数统一成为一个公式．

在第二节中我们给出了渐近解，在第三节中利用Poincaré映射得到了Melnikov方法，在第四节中我们给出了两个例子．

二、渐近解的推导

考虑以下方程

$$\ddot{x}+g(x)=\varepsilon\mu f(x,\ \dot{x})+\varepsilon\delta h(x,\ \dot{x},\ \omega t) \tag{2.1}$$

其中

$$g(x)=\sum_{n=1}^{N}K_n x^n$$

当 $\varepsilon=0$ 时，由$(2.1)_{\varepsilon=0}$积分而得

$$H(x,\dot{x})=\dot{x}^2/2+V(x)=h \tag{2.2}$$

其中

$$V(x)=\int_0^x g(u)du$$

(2.2)可视作$(2.1)_{\varepsilon=0}$的能量积分，其中 $\dot{x}^2/2$ 为动能，$V(x)$ 是势能。

设$(2.1)_{\varepsilon=0}$满足 $x(0)=a_0+b_0$，$\dot{x}(0)=0$ 解为

$$x=a_0\cos\varphi_0+b_0 \tag{2.3}$$

根据能量守恒定律，a_0，b_0 的关系可由下式确定

$$V(-a_0+b_0)=V(a_0+b_0) \tag{2.4}$$

由 (2.2) 得

$$(1/2)a_0^2\sin^2\varphi_0(\dot{\varphi}_0^2)+V(a_0\cos\varphi_0+b_0)=V(a_0+b_0)$$

于是

$$\dot{\varphi}_0(t)=\Phi_0(a_0,\ \varphi_0)$$

式中

$$\Phi_0(a_0,\ \varphi_0)=\pm\sqrt{\frac{2[V(a_0+b_0)-V(a_0\cos\varphi_0+b_0)]}{a_0^2\sin^2\varphi_0}} \tag{2.5}$$

不难验证下式成立：

$$a_0\sin\varphi_0\cdot\Phi_0\cdot\partial\Phi_0/\partial\varphi_0+(a_0\cos\varphi_0)\Phi_0^2=g(a_0\cos\varphi_0+b_0) \tag{2.6}$$

设当 $\varepsilon\neq0$ 时 $(2.1)_\varepsilon$ 的形式解为

$$x=a\cos\varphi+b+\varepsilon x_1(a)+\varepsilon^2 x_2(a)+\cdots \tag{2.7}$$

其中 a，b 和 φ 是时间 t 的函数，由以下微分方程决定

$$\begin{cases}\dot{a}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2 A_2(a)+\cdots & (2.8)\\ \dot{\varphi}=\Phi_0(a,\varphi)+\varepsilon\Phi_1(a,\varphi)+\varepsilon^2\Phi_2(a,\varphi)+\cdots & (2.9)\end{cases}$$

式中 $\Phi_n(a,\varphi)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$ 是以2π为周期的函数，$\Phi_0(a,\ \varphi)$由(2.5)确定。

在(2.7)中引进时间差 t_0，即

$$x(t,t_0)=a(t-t_0)\cos\varphi(t-t_0)+b(t-t_0)+\varepsilon x_1(a(t-t_0))+\varepsilon^2 x_2(a(t-t_0))+\cdots \tag{2.10}$$

将上式求导并注意到(2.8)、(2.9)以及由(2.4)所得到的下述关系

$$\dot{b}=F(a,b)\dot{a},\quad \ddot{b}=F(a,b)\ddot{a}+G(a,b)\dot{a}^2$$

其中

$$F(a,b)=\frac{g(-a+b)+g(a+b)}{g(-a+b)-g(a+b)}$$

$$G(a,b)=2\frac{g(-a+b)g'_x(a+b)+g(a+b)g'_x(-a+b)}{[g(-a+b)-g(a+b)]^2}$$

$$+2\frac{g(-a+b)g'_x(a+b)-g(a+b)g'_x(-a+b)}{[g(-a+b)-g(a+b)]^2}F(a,b)$$

于是得

$$\dot{x}=-a\Phi_0\sin\varphi+\varepsilon(A_1\cos\varphi-a\Phi_1\sin\varphi+FA_1)$$
$$+\varepsilon^2(A_2\cos\varphi-a\Phi_2\sin\varphi+FA_2+A_1dx_1/da)+O(\varepsilon^3) \tag{2.11a}$$

$$\ddot{x}=-a\sin\varphi\cdot\Phi_0\cdot\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}-a\cos\varphi\cdot\Phi_0^2-\varepsilon\Big[2a\Phi_0\Phi_1\cos\varphi+\Big(a\Phi_1\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}$$

$$+a\Phi_0\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}+aA_1\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+2A_1\Phi_0\Big)\sin\varphi\Big]-\varepsilon^2\Big[\Big(a\Phi_1^2+2a\Phi_0\Phi_2$$

$$-A_1\frac{dA_1}{da}\Big)\cos\varphi+\Big(a\Phi_2\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}+a\Phi_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}+a\Phi_0\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi}$$

$$+aA_2\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}+aA_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial a}+2A_1\Phi_1+2A_2\Phi_0\Big)\sin\varphi+A_1\frac{dA_1}{da}F$$

$$+A_1^2G\Big]+O(\varepsilon^2) \tag{2.11b}$$

把 $g(x)$ 展成 ε 的幂级数

$$g(x)=g(b+a\cos\varphi)+\varepsilon x_1g'_x(b+a\cos\varphi)+\varepsilon^2\Big[x_2g'_x(b+a\cos\varphi)$$

$$+\frac{1}{2}x_1^2g''_{xx}(b+a\cos\varphi)\Big]+O(\varepsilon^3) \tag{2.12}$$

再把(2.1)右端写成如下形式:

$$\varepsilon\mu f(x,\dot{x})=\varepsilon\mu[f(a\cos\varphi+b,-a\Phi_0\sin\varphi)]+\varepsilon^2\mu[x_1f'_x(b+a\cos\varphi,$$
$$-a\Phi_0\sin\varphi)+(A_1\cos\varphi-a\Phi_1\sin\varphi+FA_1)f'_{\dot{x}}(b+a\cos\varphi,$$
$$-a\Phi_0\sin\varphi)]+O(\varepsilon^3) \tag{2.13}$$

$$\varepsilon\delta h(x,\dot{x},\omega t)=\varepsilon\delta[h(b+a\cos\varphi,-a\Phi_0\sin\varphi,\omega t)]+\varepsilon^2\delta[x_1h'_x(b+a\cos\varphi,$$
$$-a\Phi_0\sin\varphi,\omega t)+(A_1\cos\varphi-a\Phi_1\sin\varphi+FA_1)h'_{\dot{x}}(b$$
$$+a\cos\varphi,-a\Phi_0\sin\varphi,\omega t)]+O(\varepsilon^3) \tag{2.14}$$

将(2.10)、(2.11)、(2.12)、(2.13)、(2.14)代入(2.1)使等式两边 ε 的相同幂次系数相等并考虑到(2.6)得

$$a\frac{\partial}{\partial\varphi}[\Phi_1\Phi_0\sin^2\varphi]=-\mu f_0(a,\varphi)\sin\varphi-A_1\Big(a\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+2\Phi_0\Big)\sin^2\varphi$$
$$+x_1g'_x(b+a\cos\varphi)\sin\varphi-\delta h_0(a,\varphi,\omega t) \tag{2.15a}$$

$$a\frac{\partial}{\partial\varphi}[\Phi_2\Phi_0\sin^2\varphi]=-\mu f_1(a,\varphi)\sin\varphi-A_2\Big(a\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+2\Phi_0\Big)\sin^2\varphi$$
$$+x_2g'_x(b+a\cos\varphi)\sin\varphi-\delta h_1(a,\varphi,\omega t)\sin\varphi \tag{2.15b}$$

....

式中

$$f_0(a,\varphi)=f(b+a\cos\varphi,-a\Phi_0\sin\varphi),\quad h_0(a,\varphi,\omega t)=h(b+a\cos\varphi,-a\Phi_0\sin\varphi,\omega t)$$

$$f_1(a,\varphi)=x_1f_x'(b+a\cos\varphi,-a\Phi_0\sin\varphi)+(A_1\cos\varphi-a\Phi_1\sin\varphi+FA_1)f_{\dot x}'(b+a\cos\varphi,-a\Phi_0\sin\varphi)+\frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{2}x_1^2g_{xx}''(b+a\cos\varphi)+\left(a\Phi_1^2-A_1\frac{dA_1}{da}\right)\cos\varphi+\left(a\Phi_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi}+aA_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial a}+2A_1\Phi_1\right)\sin\varphi\right]-\left[A_1\frac{dA_1}{da}F+A_1^2G\right]$$

$$h_1(a,\varphi,\omega t)=x_1h_x'(b+a\cos\varphi,-a\Phi_0\sin\varphi,\omega t)+(A_1\cos\varphi-a\Phi_1\sin\varphi+FA_1)h_{\dot x}'(b+a\cos\varphi,-a\Phi_0\sin\varphi,\omega t)$$

(2.15)对φ积分

$$a\Phi_1\Phi_0\sin^2\varphi=-\int_0^\varphi\mu f_0(a,\theta)\sin\theta d\theta-A_1\int_0^\varphi\left(a\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+2\Phi_0\right)\sin^2\theta\,d\theta+\frac{x_1[g(b+a)-g(b+a\cos\varphi)]}{a}-\delta\int_0^\varphi h_0(a,\theta,\omega t)\sin\theta d\theta \tag{2.16}$$

在（2.16）中分别令$\varphi=K_1\pi$（K_1为奇数），$\varphi=K_2\pi$（K_2为偶数）得

$$x_1(a)=\frac{a\left\{\int_0^{K_1\pi}\mu f_0(a,\theta)\sin\theta d\theta+A_1\int_0^{K_1\pi}\left(a\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+2\Phi_0\right)\sin^2\theta\,d\theta+\delta\int_0^{K_1\pi}h_0(a,\theta,\omega t)\sin\theta d\theta\right\}}{g(b+a)-g(b-a)} \tag{2.17}$$

$$A_1(a)=\frac{-\int_0^{K_2\pi}\mu f_0(a,\theta)\sin\theta d\theta-\delta\int_0^{K_2\pi}h_0(a,\theta,\omega t)\sin\theta d\theta}{\int_0^{K_2\pi}\left(a\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+2\Phi_0\right)\sin^2\theta d\theta} \tag{2.18}$$

$$\Phi_1(a,\varphi)=\frac{1}{a\Phi_0\sin^2\varphi}\left\{\int_0^\varphi\left[-\mu f_0(a,\theta)\sin\theta-A_1\left(a\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+2\Phi_0\right)\sin^2\theta\right]d\theta+\int_0^\varphi x_1g_x'(b+a\cos\theta)\sin\theta d\theta-\int_0^\varphi\delta h_0(a,\theta,\omega t)\sin\theta d\theta\right\} \tag{2.19}$$

类似可求得$x_n(a)$，$A_n(a)$，$\Phi_n(a,\varphi)$。在上述各积分中，$t=t(a,\varphi)$，由（2.9）给出。

三、Melnikov方法的证明

我们需要先对$x_1(a)$，$A_1(a)$作出一些估式。为此令

$$a=a_0+\varepsilon a_1+O(\varepsilon^2),\quad b=b_0+\varepsilon b_1+O(\varepsilon^2),\quad \varphi=\varphi_0+\varepsilon\varphi_1+O(\varepsilon^2)$$

代入（2.8）、（2.9）得

$$\dot a_0=0,\quad \dot a_1=A_1(a_0) \tag{3.1}$$

$$\dot\varphi_0=\Phi_0(a_0,\varphi_0),\quad \dot\varphi_1=\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}a_1+\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}\varphi_1+\Phi_1(a_0,\varphi_0) \tag{3.2}$$

引理 1 $A_1(a)=A_1(a_0)+O(\varepsilon)$

证明 由（2.18）可得 $A_1(a)=A_1(a_0)+O(\varepsilon)$，

其中

$$A_1(a_0)=\frac{-\int_0^{K_2\pi}\mu f_0(a_0,\,\theta_0)\sin\theta_0 d\theta_0-\delta\int_0^{K_2\pi}h_0(a_0,\theta_0,\omega t)\sin\theta_0 d\theta_0}{\int_0^{K_2\pi}\left(a_0\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}+2\Phi_0\right)\sin^2\theta_0 d\theta_0} \tag{3.3}$$

引理 2 当 $A_1(a_0)=0$时，$x_1(a)=x_1(a_0)+O(\varepsilon)$，这里 $x_1(a_0)$是依赖于 a_0，b_0 的常数。

证明 由（2.17）并注意 $A_1(a_0)=0$，于是得

$$x_1(a)=x_1(a_0)+O(\varepsilon)$$

其中

$$x_1(a_0)=\frac{a_0\left[\int_0^{K_1\pi}\mu f_0(a_0,\theta_0)\sin\theta_0 d\theta_0+\delta\int_0^{K_1\pi}h_0(a_0,\theta_0,\omega t)\sin\theta_0 d\theta_0\right]}{g(b_0+a_0)-g(b_0-a_0)} \tag{3.4}$$

根据上述两引理，(2.19)化为

$$\begin{aligned}\Phi_1(a,\varphi)=&\frac{1}{a_0\Phi_0\sin^2\varphi_0}\Big\{\int_0^{\varphi_0}\Big[-\mu f_0(a_0,\,\theta_0)\sin\theta_0-A_1(a_0)\Big(a_0\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}\\&+2\Phi_0\Big)\sin^2\theta_0\Big]d\theta_0+\int_0^{\varphi_0}x_1(a_0)g'_x(a_0\cos\theta_0+b_0)\sin\theta_0 d\theta_0\\&-\int_0^{\varphi_0}\delta h_0(a_0,\theta_0,\omega t)\sin\theta_0 d\theta_0\Big\}+O(\varepsilon)\\&\triangleq\Phi_1(a_0,\varphi_0)+O(\varepsilon)\end{aligned} \tag{2.19$'$}$$

引理 3 假设① $x_0=a_0\cos\varphi_0+b_0$ 的周期为 $T_a=(m/n)T$，其中 m，n 为互质整数，$T=2\pi/\omega$；② t 单调从 0 变到 T_a 时，φ_0 单调地从 0 变到2π；③ 当 $K_2=2n$ 时，$A_1(a_0)=0$，则 $\Phi_1(a_0,\varphi_0)$关于 t 为周期 nT_a 的周期函数。

证明 $\Phi_1(a_0,\varphi_0)$ 当 $\varphi_0=2n\pi$ 时（2.19)$'$ 无定义，但在上述条件下可利用罗必达法则补充定义，此时 $\Phi_1(a_0,0)=\Phi_1(a_0,2n\pi)$。因为 $A_1(a_0)=0$，而其余各项积分均是 nT_a 的周期函数，从而 $\Phi_1(a_0,\varphi_0)$ 为关于 t 的周期 nT_a 的周期函数。

引理 4 在引理 3 的条件下，φ_1 为有界函数。

证明 从（3.2）式取 φ_1 的特解使 $\varphi_1(0)=0$，得

$$\varphi_1=\exp\left[\int_0^t\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}dt\right]\left[\int_0^t\exp\left[-\int_0^t\frac{\partial\Phi_0}{\partial\varphi}dt\right]\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial a}a_1+\Phi_1(a_0,\,\varphi_0)\right)dt\right]$$

由于 $(\partial\Phi_0/\partial a)a_1$ 为有界函数，此外，在引理 3 的条件下，$\Phi_1(a_0,\varphi_0)$ 也为有界函数，所以 φ_1 为有界函数。

我们再对$(2.1)_{\varepsilon=0}$ 作出以下假设：

A_1：当 $\varepsilon=0$ 时$(2.1)_{\varepsilon=0}$ 有双曲鞍点 $P_0(0,0)$，具有一条同宿轨线 $q^0(t)$；

A_2：设 $\Gamma^0=\{q^0(t)\,|\,t\in R\}\cup\{P_0\}$．$\Gamma^0$ 内充满周期轨道 $q^\alpha(t)$，$\alpha\in(-1,0)$。设 $d(x,\Gamma^0)=\inf_{q\in\Gamma^0}|x-q|$．$\lim_{\alpha\to0}\sup_{t\in R}d(q^\alpha(t),\Gamma^0)=0$；

A_3：设 $h_\alpha=H(q^\alpha(t),\dot q^\alpha(t))$，$H$定义见(2.2)，$q^\alpha(t)$的周期为$T_\alpha$，那么$T_\alpha$ 为 h_α 的可微函数，且在 Γ^0 中 $dT_\alpha/dh_\alpha>0$。注意这里 $q^0(t)$ 与 $q^\alpha(t)$ 有统一的表达式$(x,\dot x)=(a_0\cos\varphi_0+b_0,-a_0\Phi_0\sin\varphi_0)$。

如果$(2.1)_{\varepsilon=0}$存在异宿轨道组成的异宿圈，类似可证。

取横截面 $\Sigma^{t_0}=\{(x,\,\dot x,\,\theta)\,|\,\theta=t_0\in[0,\,2\pi/\omega]\}$，考虑 Poincaré 映射$P_\varepsilon^{t_0}$：

$$P_\varepsilon^{t_0}: U \mapsto \Sigma^{t_0} \qquad U \subseteq \Sigma^{t_0}$$

它由（2.1）的轨线所定义，其映射周期为$2\pi/\omega$.

下面，我们将导出这一映射的具体表达式．为了便于比较，先引入 Melnikov 函数

$$M^{m/n}(t_0) = -\int_0^{2n\pi} \mu f_0(a_0, \theta_0) a_0 \sin\theta_0 d\theta_0 - \int_0^{2n\pi} \delta h_0(a_0, \theta_0, \omega t) a_0 \sin\theta_0 d\theta_0 \tag{3.5}$$

注意t从 0 单调增至T_a时，$\varphi_0=\theta_0$从 0 单调增至2π．设$q^a(t)$为$(2.1)_{\varepsilon=0}$的周期轨道，其周期为$T_a=(m/n)T$，这里$T=2\pi/\omega$，m，n互质．于是，当t从 0 单调增至$nT_a=mT$时φ_0从 0 单调增至$2n\pi$．在此情况下，(2.18) 化为

$$A_1^{(m/n)}(a_0) = \frac{M^{m/n}(t_0)}{a_0\int_0^{2n\pi}\left(a_0\dfrac{\partial\Phi_0}{\partial a_0}+2\Phi_0\right)\sin^2\theta_0 d\theta_0} \tag{3.6}$$

现在我们来推导$(P_\varepsilon^{t_0})^m$的表达式．由（2.10)、(2.11）得

$$\begin{aligned} x(t_0) &= b_0(0)+\varepsilon b_1(0)+a_0(0)\cos\varphi_0(0)+\varepsilon a_1(0)\cos\varphi_0(0) \\ &\quad + a_0(0)(-\sin\varphi_0(0))\varepsilon\varphi_1(0)+\varepsilon x_1(a_0)+O(\varepsilon)^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0) &= -a_0\sin\varphi_0\cdot\dot{\varphi}_0+\dot{a}_0\cos\varphi_0+\varepsilon[F(a_0,b_0)A_1(a_0)-a_0\sin\varphi_0\cdot\varphi_1 \\ &\quad -a_0\sin\varphi_0\cdot\dot{\varphi}_1-a_0\cos\varphi_0\cdot\varphi_1-\dot{a}_0\sin\varphi_0\cdot\varphi_1-a_1\sin\varphi_0\cdot\dot{\varphi}_0 \\ &\quad +\dot{a}_1\cos\varphi_0+x_1'(a_0)\dot{a}_0]+O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} x(t_0+nT_a) &= x(t_0+mT)=b_0(mT)+a_0(mT)\cos\varphi_0(mT)+\varepsilon[a_1(mT)\cos\varphi_0(mT) \\ &\quad +b_1(mT)+a_0(mT)(-\sin\varphi_0(mT))\varphi_1(mT)+x_1(a_0(mT))]+O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0+nT_a) &= \dot{x}(t_0+mT)=-a_0(mT)\sin\varphi_0(mT)\dot{\varphi}_0(mT)+\dot{a}_0(mT)\cos\varphi_0(mT) \\ &\quad +\varepsilon[F(a_0(mT),b_0(mT))A_1(a_0(mT))-a_0(mT)\sin\varphi_0(mT)\cdot\varphi_1(mT) \\ &\quad -a_0(mT)\sin\varphi_0(mT)\cdot\dot{\varphi}_1(mT)-a_0(mT)\cos\varphi_0(mT)\cdot\varphi_1(mT) \\ &\quad -\dot{a}_0(mT)\sin\varphi_0(mT)\varphi_1(mT)-a_1(mT)\sin\varphi_0(mT)\dot{\varphi}_0(mT) \\ &\quad +\dot{a}_1(mT)\cos\varphi_0(mT)+x_1'(a_0(mT))\dot{a}_0(mT)]+O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.10}$$

上面已指出，$q^a(t)$的周期为T_a．故$a_0(mT)=a_0(nT_a)=a_0(0)$，$\dot{a}_0(mT)=\dot{a}_0(0)$，$\varphi_0(mT)=\varphi_0(0)$，$\dot{\varphi}_0(mT)=\dot{\varphi}_0(0)$，$b_0(mT)=b_0(0)$，由(3.9)、(3.7)、(3.10)、(3.8)可得$(P_\varepsilon^{t_0})^m$的表达式

$$\begin{aligned} x(t_0+mT)-x(t_0) &= \varepsilon\{[a_1(mT)-a_1(0)]\cos\varphi_0(0)+b_1(mT)-b_1(0)\}+O(\varepsilon^2) \\ \dot{x}(t_0+mT)-\dot{x}(t_0) &= \varepsilon\{-[a_1(mT)-a_1(0)]\sin\varphi_0(0)\cdot\dot{\varphi}_0(0) \\ &\quad +[\dot{a}_1(mT)-\dot{a}_1(0)]\cos\varphi_0(0)\}+O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{3.11}$$

如果，$M^{m/n}(t_0)=0$但$\partial M^{m/n}(t_0)/\partial t_0\neq 0$，则由(3.1)与(3.6)可知，对于该$t_0$，有$\dot{a}_1(mT)=\dot{a}_1(0)$，$a_1(mT)=a_1(0)$，注意由（2.4）可得$b_1=b_1(a_0,b_0)$以及$a_0(mT)=a_0(0)$，从而也有$b_1(mT)=b_1(0)$．如是，由(3.11)，可知对充分小的$\varepsilon$，Poincaré 映射$(P_\varepsilon^{t_0})^m$在$\Sigma^{t_0}$上有不动点．于是，我们证明了

定理 1 若$M^{m/n}(t_0)$有简单零点，且与ε无关，并且$dT_a/dh_a\neq 0$，则对于$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，(2.1)有一个周期为$mT$的次谐轨道．

当$T_a=\infty$，此时同宿轨道$q^0(t)$表达式仍为$(x,\dot{x})=(a_0\cos\varphi_0+b_0,\ -a_0\Phi_0\sin\varphi_0)$，稍作修改，类似可得

定理 2 若$M(t_0)$有简单零点且与ε无关，对充分小$\varepsilon>0$，$W^u(P_\varepsilon^{t_0})$和$W^s(P_\varepsilon^{t_0})$必横截相交；反之若$M(t_0)$总不为零，则$W^u(P_\varepsilon^{t_0})\cap W^s(P_\varepsilon^{t_0})=\phi$．

四、例　子

例 1　$\ddot{x}+x-x^3=-\varepsilon r\dot{x}+\varepsilon\delta\cos\omega t$　(4.1)

当 $\varepsilon=0$ 时

$$\frac{d\varphi_0}{dt}=\Phi_0(a_0,\varphi_0)=-\sqrt{1-\frac{1}{2}a_0^2(1+\cos^2\varphi_0)}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}a_0^2}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d(\pi/2+\varphi)}{\sqrt{1-\left[\frac{1}{2}a_0^2\Big/\left(1-\frac{1}{2}a_0^2\right)\right]\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)}}$$

令　$$k^2=\frac{a_0^2/2}{1-a_0^2/2}$$

则　$$\varphi_0=\pi/2-am(\sqrt{(1-a_0^2/2)}\,t)\qquad(4.2)$$

从而

$$x_k=a_0\cos\varphi_0(t)=a_0\sin\left(am\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}a_0^2\right)}t\right)=\sqrt{\frac{2k^2}{1+k^2}}\,\mathrm{sn}\left(\frac{t}{\sqrt{1+k^2}},k\right)$$

代入(3.5)，得相应的 Melnikov 函数为

$$\begin{aligned}M^{m/n}(t_0)&=-a_0\int_0^{2n\pi}-r(a_0\sin\varphi_0)\dot{\varphi}_0\sin\varphi_0\,d\varphi_0-\delta\int_0^{2n\pi}a_0\cos\omega(t+t_0)\sin\varphi_0 d\varphi_0\\&=\int_0^{mT}-r(\dot{x}_k)^2dt+\delta\int_0^{mT}\cos\omega(t+t_0)\dot{x}_k dt\end{aligned}$$

这与文[6]的$M^{m/n}(t_0)$表达式一致。注意这个例子给出了$\varphi_0(t)$的明确的表达式(4.2)。

例 2　$\ddot{x}+2x+3x^2+x^3=\varepsilon(-\mu\dot{x}+\delta\cos\omega t)$　(4.3)

设$(4.3)_{\varepsilon=0}$的解为

$$x=a_0\cos\varphi_0(t)+b_0\qquad(4.4)$$

由能量关系和鞍点得

$$a_0+b_0=-1,\ \ 2b_0+a_0^2+3b_0^2+a_0^2b_0+b_0^3=0$$

解得

$$a_0=-1/\sqrt{2},\ \ b_0=-1+1/\sqrt{2}$$

于是 (4.4) 成为

$$x=-(1/\sqrt{2})\cos\varphi_0(t)+(-1+1/\sqrt{2})$$

于是

$$\frac{d\varphi_0}{dt}=\frac{1}{2}\sqrt{(\cos\varphi_0-3)(\cos\varphi_0-1)}\ ,$$

$$t=\pm\int\frac{\sqrt{2}\,dx}{(x+1)\sqrt{(\sqrt{2}+x+1)(\sqrt{2}-1-x)}}$$

$$\dot{x}=\pm(\sqrt{2}/2)(x+1)\sqrt{(\sqrt{2}+1+x)(\sqrt{2}-1-x)}$$

Melnikov 函数为

$$\begin{aligned}M(t_0)&=-\int_{-\pi}^{\pi}a_0\mu f_0(a_0,\theta_0)\sin\theta_0 d\theta_0-\int_{-\pi}^{\pi}\delta h_0(a_0,\theta_0,\omega t)a_0\sin\theta_0 d\theta_0\\&=\int_{-\pi}^{\pi}\mu\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_0\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_0\right)d\theta_0\end{aligned}$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\delta\cos\omega(t+t_0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_0\right)d\theta_0 \tag{4.5}$$

(4.5) 右边第一项

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_0\right]^2\dot{\theta}_0 d\theta_0=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}^2 dt=\frac{4}{3}$$

(4.5) 右边第二项

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\omega(t+t_0)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta_0\right)\dot{\theta}_0(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\dot{x}\cos\omega(t+t_0)dt$$

$$=2\int_{-1}^{\sqrt{2}-1}\sin\left(\omega\mathrm{ch}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{x+1}\right)\sin\omega t_0\,dx \tag{4.6}$$

令 $\mathrm{ch}^{-1}(\sqrt{2}/(x+1))=v,\quad x=\sqrt{2}/\mathrm{ch}v-1$

(4.6) 成为

$$2\sqrt{2}\int_0^{\infty}\mathrm{sech}v\,\mathrm{th}v\,\sin\omega v\,\sin\omega t_0\,dv$$

最后我们得

$$M(t_0)=-4\mu/3+\sqrt{2}\,\delta\pi\omega\,\mathrm{sech}(\pi\omega/2)\sin\omega t_0$$

关于次谐轨道的稳定性的讨论，我们将另文给出。

参 考 文 献

[1] Li Li, The periodic solution of a class of strongly nonlinear system, *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics*, Science Press (1985).

[2] 徐兆，非线性力学中一种新的渐近方法，力学学报，17 (1985).

[3] Melnikov, V. K., On the stability of the center for time periodic perturbations, *Trais Moscow Math. Soc.*, 12 (1963), 1—57.

[4] Chow, S. N., J. K. Hale and J. Mallet-Paret, An example of bifurcation to homoclinic orbits, *J. Diff. Eqs.*, 37 (1980), 357—373.

[5] Holmes, P. J., Averaging and chaotic motions in forced oscillations, *SIAM J. Appl. Math.*, 38 (1980).

[6] 刘曾荣、姚伟国、朱照宣，软弹簧系统在周期扰动下通向混沌的道路，应用数学和力学，7, 2 (1986), 103—108.

Melnikov Function and Poincaré Map

Xu Zhen-yuan

(*Wuxi Institute of Light Industry, Wuxi*)

Li Li

(*Beijing University of Technology, Beijing*)

Abstract

In this paper we give the relationship between Melnikov function and Poincaré map, and a new proof for Melnikov's method. The advantage of our paper is to give a more explicit solution and to make Melnikov function for the subharmonics bifurcation and Melnikov function which the stable manifolds and unstable manifolds intersect transversely into a formula.