应用数学和力学，第9卷第12期（1988年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

热弹性材料的自由能表达式及其与物性系数的关系*

王 洪 纲

（昆明工学院，1987年8月25日收到）

摘　要

本文中，自由能的表达式展开成幂级数，其中，温度增量θ^*取到三阶，应变张量γ_{ij}只取到二阶．由这个表达式可以导出物性系数随温度增量的变化规律．这些规律与参考文献中的实验图线是相符的．不过，自由能表达式中的常数须由实验数据确定．

文中指出，变化的弹性模量E和剪切弹性模量G是彼此独立的，而其它的物性系数则与它们相关．

一、前　　言

当温度发生变化时，热弹性体的物性系数也出现相应的变化．通常，这种对应关系均由实验确定[1,2,3]．在热弹性力学中，物性系数可以由自由能Ψ的表达式及根据构造理论的规则来导出．如果自由能Ψ的表达式是正确的，那么由它导出的物性系数应与实验结果相符．热弹性材料属于简单材料，自由能只取决于运动和温度的现时值[5]．以Ψ表示单位体积的自由能，$\gamma_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$表示应变张量分量，$\theta$表示温度的变化，即$\theta=T-T_0$($T$为温度的现时绝对值，$T_0$为绝对参考温度)，则$\Psi=\Psi(\gamma_{ij},\ \theta)$．

对于各向同性体，以I_1、I_2和I_3表示应变的不变量：

$$I_1=\gamma_{ii},\qquad I_2=\frac{1}{2}(\gamma_{ii}\gamma_{jj}-\gamma_{ij}\gamma_{ji}),\qquad I_3=\det\gamma_{ij}\tag{1.1}$$

以θ^*表示无量纲的温度变化，它等于

$$\theta^*=\frac{T-T_0}{T_0}\tag{1.2}$$

并设$\theta^*<1$．这样，$\Psi(\gamma_{ij},\ \theta)$可写成[4],[6,p.363]

$$\Psi(\gamma_{ij},\ \theta)=a_0+a_1I_1+a_2I_2+a_3I_3+a_4\theta^*+a_5I_1^2+a_6I_1^3+a_7\theta^{*2}+a_8I_1\theta^*+a_9I_1I_2+a_{10}I_1\theta^{*2}$$
$$+a_{11}I_2\theta^*+a_{12}\theta^{*3}+a_{13}I_1^2\theta^*+a_{14}I_1^4+a_{15}I_2^2+a_{16}I_1I_3+\cdots\tag{1.3}$$

为了主要反映温度变化对自由能的影响，并考虑到γ_{ij}是微小量，在以上的表达式中略去γ_{ij}

*国家自然科学基金资助的课题．

的二阶以上各项，可将$\Psi(\gamma_{ij},\ \theta)$写成

$$\Psi(\gamma_{ij},\ \theta)=a_0+a_1\theta^*+a_2\theta^{*2}+a_3\theta^{*3}+a_4I_1+a_5\theta^*I_1+a_6\theta^{*2}I_1+a_7I_1^2+a_8\theta^*I_1^2+a_9I_2+a_{10}\theta^*I_2 \tag{1.4}$$

显然，如果能够确定式中各常数a_0，…，a_{10}，则$\Psi(\gamma_{ij},\ \theta)$完全确定。并可由(1.4)式得到各有关的物性系数。但是这些常数无法从理论上确定，而只有根据一些实验结果间接地确定它们的值。然后再根据（1.4）式得到其它物性系数随温度而变化的表达式。这样，就同时得到各热弹性物性系数之间的关系。

二、弹性模量E和G与波桑比ν的关系

这里所指的关系是它们随温度而变化时，它们之间的关系。

我们由自由能密度$\Psi(\gamma_{ij},\ \theta)$直接可以得到应力应变本构关系[5]，即

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{ij}}=\frac{\partial\Psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\gamma_{ij}}+\frac{\partial\Psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial\gamma_{ij}}+\frac{\partial\Psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial\gamma_{ij}} \tag{2.1}$$

在(1.4)式中不涉及I_3。由(1.1)式知

$$\frac{\partial I_1}{\partial\gamma_{ij}}=\delta_{ij},\qquad \frac{\partial I_2}{\partial\gamma_{ij}}=I_1\delta_{ij}-\gamma_{ij} \tag{2.2}$$

式中δ_{ij}为Kronecker δ符号。所以

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma_{ij}}=a_4\delta_{ij}+[(a_9+2a_7)+(a_{10}+2a_8)\theta^*]\gamma_{kk}\delta_{ij}-(a_9+a_{10}\theta^*)\gamma_{ij}+(a_5+a_6\theta^*)\theta^*\delta_{ij} \tag{2.3}$$

式中a_4可视为物体上的初始法向应力，它可取为零值。

由(2.3)式得弹性模量E_{ijmn}的一般表达式

$$E_{ijmn}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\gamma_{mn}}=[(a_9+2a_7)+(a_{10}+2a_8)\theta^*]\delta_{mn}\delta_{ij}-(a_9+a_{10}\theta^*)\delta_{mi}\delta_{nj} \tag{2.4}$$

按照习惯，弹性模量E是指单向拉压情况下应力与应变间的比值，即

$$E=E_{1111}=E_{2222}=E_{3333}=2a_7+2a_8\theta^*=E_0+E_1\theta^* \tag{2.5}$$

式中$E_0=2a_7$，$E_1=2a_8$。由此式知，当$\Psi(\gamma_{ij},\ \theta)$写成(1.4)式时，弹性模量$E$是温度变化$\theta^*$的线性函数。实验证明，如果温度变化范围不大，这个函数(2.5)可以反映实际情况（见图1[1]）。

剪切弹性模量G等于

$$G=\frac{1}{2}E_{1212}=\frac{1}{2}E_{2323}=\frac{1}{2}E_{3131}=-\frac{1}{2}a_9-\frac{1}{2}a_{10}\theta^*=G_0+G_1\theta^* \tag{2.6}$$

式中$G_0=-a_9/2$，$G_1=-a_{10}/2$。即G也是θ^*的线性函数（见图1）。

由于常数a_7，a_8，a_9和a_{10}都是独立的，所以弹性模量E和G是互不相关的。

为得到波桑比ν的表达式，取$\sigma_{22}=\sigma_{33}=0$。考虑到各向同性，设$\gamma_{22}=\gamma_{33}$，于是由（2.3）式得

$$\sigma_{11}=[(a_9+2a_7)+(a_{10}+2a_8)\theta^*]2\gamma_{22}+2(a_7+a_8\theta^*)\gamma_{11}+(a_5+a_6\theta^*)\theta^* \tag{2.7a}$$

$$\sigma_{22}=[(a_9+4a_7)+(a_{10}+4a_8)\theta^*]\gamma_{22}+[(a_9+2a_7)+(a_{10}+2a_8)\theta^*]\gamma_{11}+(a_5+a_6\theta^*)\theta^*=0 \tag{2.7b}$$

由以上两式消去$(a_5+a_6\theta^*)\theta^*$项，得

$$\sigma_{11}=(a_9+a_{10}\theta^*)\gamma_{22}-(a_9+a_{10}\theta^*)\gamma_{11} \tag{2.8}$$

根据ν的定义$(\nu=-\gamma_{22}/\gamma_{11})$及$E$的定义，得

$$\nu=-\frac{(a_9+2a_7)+(a_{10}+2a_8)\theta^*}{a_9+a_{10}\theta^*}=-\frac{(1+2a_7/a_9)+(a_{10}/a_9+2a_8/a_9)\theta^*}{1+(a_{10}/a_9)\theta^*} \tag{2.9}$$

将式中分母展开成幂级数，得ν的表达式

$$\nu=-\frac{1}{a_9}\left[(2a_7+a_9)+\frac{2}{a_9}(a_7a_{10}-a_8a_9)\theta^*-\frac{2a_{10}}{a_9^2}(a_7a_{10}-a_8a_9)\theta^{*2}+\cdots\right] \tag{2.10}$$

如果$(a_7a_{10}-a_8a_9)$的值很小，则ν可近似地认为与温度变化无关，而视为常数，即若

$$(E_0G_1-E_1G_0)\to 0 \text{ 或 } \frac{E_0}{E_1}\doteq\frac{G_0}{G_1} \tag{2.11}$$

ν就近似地等于

$$\nu=\frac{E_0}{2G_0}-1 \tag{2.12}$$

这就是等温下弹性力学的公式。

或者说，当弹性模量E和G随温度变化θ^*作线性变化时，如果斜率的比值E_1/G_1近似地等于初始值的比值E_0/G_0，那么波桑比ν就与θ^*无关，而近似地成为常数（参见图1）。

由E和G的实验结果和(2.5)、(2.6)式得到a_7，a_8，a_9，a_{10}等常数后，ν的变化曲线就可由(2.10)式完全确定。例如图1中，$T=27$℃时ν的计算值（按(2.12)式计算）为0.3598，实验值为0.36；$T=200$℃时ν的计算值（按(2.10)式计算）为0.3042，实验值为0.30；$T=400$℃时计算值为0.27，实验值为0.28。

反之，如果由实验确定E和ν的变化曲线，G值随温度的变化亦可由计算确定。

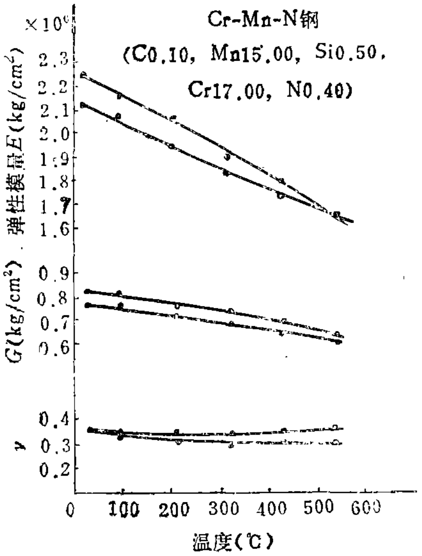


图1[1] Cr-Mn-N钢

三、线热胀系数α的表达式

由本构关系式(2.3)可以导出

$$\gamma_{kk}=\frac{\sigma_{kk}-3(a_5+a_6\theta^*)\theta^*}{2[(a_9+3a_7)+(a_{10}+3a_8)\theta^*]} \tag{3.1}$$

所以本构关系式(2.3)又可写成

$$\gamma_{ij}=\frac{1}{(a_9+a_{10}\theta^*)}\left\{\frac{(a_9+2a_7)+(a_{10}+2a_8)\theta^*}{2[(a_9+3a_7)+(a_{10}+3a_8)\theta^*]}[\sigma_{kk}-3(a_5+a_6\theta^*)\theta^*]\delta_{ij}-\sigma_{ij}+(a_5+a_6\theta^*)\theta^*\delta_{ij}\right\} \tag{3.2}$$

取$\sigma_{kk}=0$及$\sigma_{ij}=0$，代入上式后得到温度变化引起的自由膨胀应变，

$$\gamma_{ij}\Big|_{\sigma_{ij}=0}=-\frac{(a_5+a_6\theta^*)\theta^*\delta_{ij}}{2[(a_9+3a_7)+(a_{10}+3a_8)\theta^*]} \tag{3.3}$$

分母展开成幂级数，得

$$\gamma_{ij}\Big|_{\sigma_{ij}=0}=\frac{1}{2(3a_7+a_9)}\left\{-a_5\theta^*+(a_5\xi-a_6)\theta^{*2}-\xi(a_5\xi-a_6)\theta^{*3}+\cdots\right\}\delta_{ij} \tag{3.4}$$

由此式及线热胀系数 α 的定义，得

$$\alpha=\frac{\partial\gamma_{(j)(j)}}{\partial\theta}=\frac{1}{2T_0(3a_7+a_9)}\{-a_5+2(a_5\xi-a_6)\theta^*-3\xi(a_5\xi-a_6)\theta^{*2}+\cdots\} \tag{3.5}$$

以上两式中系数ξ为

$$\xi=\frac{3a_8+a_{10}}{3a_7+a_9}=\frac{3E_1-4G_1}{3E_0-4G_0} \tag{3.6}$$

在给出E和G的变化曲线后，ξ是一个确定的值。γ的下标$(j)(j)$表示$i=j$。

由(3.5)式知，在$T=T_0$时，α_0为

$$\alpha_0=\frac{-a_5}{2T_0(3a_7+a_9)} \tag{3.7}$$

以 α_1 和 α_2 等分别表示

$$\alpha_1=\frac{a_5\xi-a_6}{T_0(3a_7+a_9)},\qquad \alpha_2=\frac{-3\xi(a_5\xi-a_6)}{2T_0(3a_7+a_9)},\ \cdots \tag{3.8}$$

则有

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_1\theta^*+\alpha_2\theta^{*2}+\cdots \tag{3.9}$$

由(3.6)式可以看出，如果$\xi=0$，即$(3E_1-4G_1)=0$，则α_2，α_3，…等均为零值。α成为θ^*的线性函数。弹性模量E和G的曲线显示[1][3]，在一定的温度范围内这种情况可能出现。图2[3]和图3[1]分别为铬锰钢和铝合金的α变化曲线。由图可以看出，在一定温度范围内α成为直线。

由α的实验曲线和T_0时的α_0值，完全可以确定a_5和a_6值。

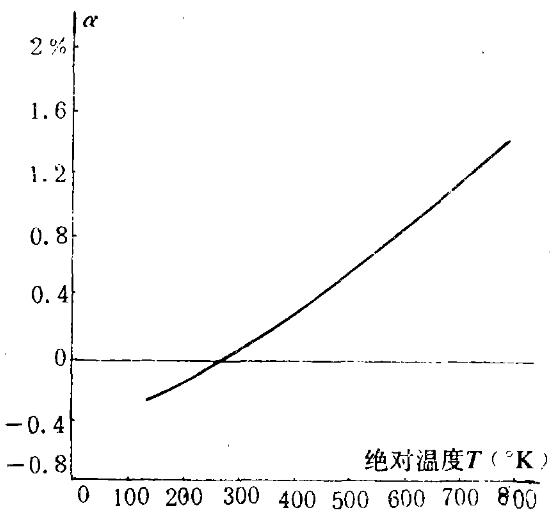


图2[3] 铝合金膨胀系数

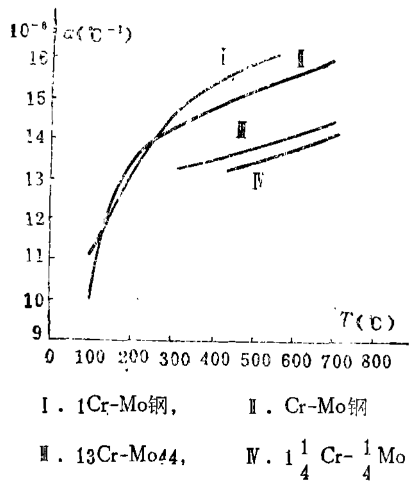


图 3[1]

四、比热c的表达式

以dH表示单位质量的物体得到的微热量，在应变保持不变的情况下，比热c为

$$c=\rho\frac{dH}{dT}\Big|_{\gamma_{ij}=\text{const}} \tag{4.1}$$

式中ρ为密度。

以φ表示熵密度，它和自由能$\Psi(\gamma_{ij},\theta)$之间有以下关系

$$\rho\varphi=-\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}=-\frac{1}{T_0}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta^*} \tag{4.2}$$

由于在可逆过程中$dH=Td\varphi$，所以

$$c=\rho\frac{Td\varphi}{dT}\Big|_{\gamma_{ij}=\text{const}}=\rho T\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi(\gamma_{ij},\theta)=-\frac{T}{T_0^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^{*2}} \tag{4.3}$$

将(1.4)式代入上式得到比热c的表达式

$$c=-\frac{2}{T_0}[a_2+(a_2+3a_3)\theta^*+3a_3\theta^{*2}+a_6(1+\theta^*)\gamma_{kk}] \tag{4.4}$$

此式表明，比热c除了和θ^*有关外，还与初始绝对温度T_0和体积应变γ_{kk}有关。在给定不变的γ_{kk}后，比热c成为θ^*的二次函数。

在自由膨胀的情况（亦即$\sigma_{ij}=0$）下，可以证明比热c仍由(4.3)式定义，因而仍由(4.4)式表达，但式中γ_{kk}是随温度变化θ^*而变的。在(3.4)式中取$\sigma_{ij}=0$得

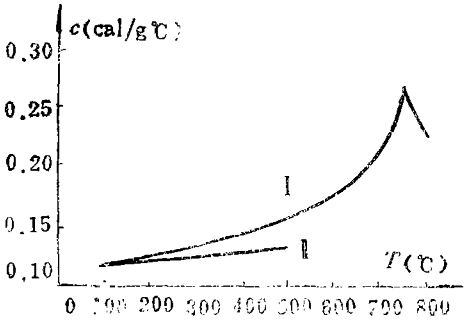
$$\gamma_{kk}=\frac{3}{2(3a_7+a_9)}\{-a_5\theta^*+(a_5\xi-a_6)\theta^{*2}-\xi(a_5\xi-a_6)\theta^{*3}+\cdots\}$$

所以比热c等于

$$c=-\frac{2}{T_0}\left\{a_2+\left[a_2+3\left(a_3-\frac{a_5a_6}{2(3a_7+a_9)}\right)\right]\theta^*+3\left[a_3-\frac{a_5a_6}{2(3a_7+a_9)}\right]\theta^{*2}+\cdots\right\} \tag{4.5}$$

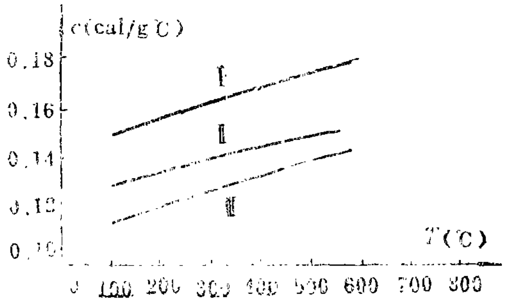
如果

$$\left[a_3-\frac{a_5a_6}{2(3a_7+a_9)}\right]\longrightarrow 0 \tag{4.6}$$



Ⅰ. 钢，Ⅱ. 15Mo3钢

图 4[1]



Ⅰ. 10CrMo910，Ⅱ. 13CrMo44钢，Ⅲ. 10CrSiMoV7I钢

图 5[1]

比热 c 将有一个简单的表示式

$$c=-2T_0^{-1}a_2(1+\theta^*) \tag{4.7}$$

对于不同的材料，a_2有不同的数值，c 的曲线成为一族直线。如果(3.15)式不成立，那么c成为θ^*的二次以上曲线。图4[1]和图5[1]表示了这两种情况。

由实验得到 c 的曲线后，可由实验数据得到a_2和a_3。

五、结 论

综上所述，可以看出：

1．自由能$\Psi(\gamma_{ij},\theta)$的表达式(1.4)是符合实际的；

2．自由能$\Psi(\gamma_{ij}, \theta)$表达式中可取$a_0=0$。并且除了系数 a_1 外，其余a_2，a_3，…，a_{10}均可由实验数据确定；

3．各物性系数中除了 E和G是独立的外，当考虑温度变化对物性系数的影响时 ν，α 和 c 是与 E和G相关的。并且它们相互之间也是相关的。

参 考 文 献

[1] 竹内洋一郎，《热应力》(中译本)，郭廷玮等译，科学出版社 (1977).

[2] 村松篤良，高温状态下的弹性系数(日文)，日本机械学会誌，**68**，562 (1965)，1623—1628.

[3] Goldsmith, A., T. E. Waterman and H. J. Hirschhorn, *Handbook of Thermo-Physical Properties of Solid Materials*, 2, Pergamon Press (1962).

[4] Dillon, O.W., A nonlinear thermoelasticity theory, *J. Mech. Phys. Solids*, **10** (1962).

[5] Parkus, H., *Thermoelasticity*, Springer-Verlag (1976).

[6] Oden, J. T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill Inc. (1972).

The Expression of Free Energy for Thermoelastic Material and Its Relation to the Variable Material Coefficients

Wang Hong-gang

(*Kunming Institute of Technology, Kunming*)

Abstract

The expression of free energy is expanded in a power series, in which there aren't any terms of order higher than third in the temperature increments θ^* and second in the strains γ_{ij} in this paper. The regular patterns of the material coefficients changing with temperature increments can be derived from this expression. These regulations accord with the experimental graph in references but the constants in the expression of free energy must be determined by experimental data.

It is pointed out that the variable modulus of elasticity E and shearing modulus of elasticity G are independent of each other, but the rest of the coefficients are related to them.