应用数学和力学，第9卷第12期（1988年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类大阻尼非自治摆系统的周期解与混沌态*

孙 建 华

（南京大学数学系，1987年8月4日收到）

摘 要

本文研究二阶非自治摆型系统

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\varphi(t)\sin x=F(t)$$

的周期解的存在性和唯一性，并研究了

$$\varphi(t)=1-\varepsilon\lambda\cos\omega t,\ F(t)=\beta+\varepsilon\mu(\cos\omega t-\omega\sin\omega t)$$

$\alpha>0$为大阻尼系数时该系统呈现混沌性态的参数区域．所得结果推广了文[1～8]中的相应结论．

一、引 言

在力学及电学中，对微分方程

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\varphi(t)\sin x=F(t) \tag{1.1}$$

的研究最为重要，其中$\alpha>0$，$\varphi(t)$，$F(t)\in C(\mathbf{R})$，且$\varphi(t)\geqslant a>0$．

方程(1.1)的物理模型之一是力学中的参量摆[1]．著名的 Josephson 结模型满足的微分方程也可表示为(1.1)型的方程[2]．另外，在锁相技术中，如考虑带干扰的正弦鉴相特性的基本环路，并取环内参数为非常数，则当采用RC积分滤波器时就得到形如(1.1)的方程[3]．总之，方程(1.1)是出现在应用数学中的最基本、最重要的二阶方程之一．

[4]在$\varphi(t)$，$F(t)$均为常数的情形下，对(1.1)进行了详细的定性分析．[3]在$\varphi(t)\equiv$常数，$F(t)=\beta_1+\beta_2(\alpha\sin\omega t+\omega\cos\omega t)$时，研究了方程(1.1)的周期解．但是，对既带有强迫项又具有变系数的非自治二阶非线性方程(1.1)的研究却很少见到．我们在第二节研究方程(1.1)的周期解的存在性，得到了保证(1.1)存在周期解的充分条件；在第三节中，我们研究周期解的唯一性及其稳定性．

当(1.1)中的$\varphi(t)\equiv1$，$\alpha=\varepsilon\lambda$，$F(t)=\varepsilon\mu\cos\omega t$时，[5～7]用实验和数值计算的方法研究了方程(1.1)的混沌性态．虽然[1]对更复杂的摆系统从数学上严格证明了混沌性态的存在性，但也假设了阻尼系数是小量．我们在第四节中，对大故尼系数$\alpha>0$，同时为简单计，取

* 苏煜城推荐．
本课题由南京大学育苗科学基金资助．

$\varphi(t)=1-\varepsilon\lambda\cos\omega t$，$F(t)=\beta+\varepsilon\mu(\cos\omega t-\omega\sin\omega t)$，严格证明了系统(1.1)的混沌性态的存在性，并得到了系统(1.1)呈现混沌态的参数区域。

二、周期解的存在性

方程(1.1)的等价系统为

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\alpha y-\varphi(t)\sin x+F(t) \tag{2.1}$$

我们假设$\alpha>0$，$\varphi(t)$,$F(t)$为t的连续周期函数,周期均为ω；$0<a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$,$|F(t)|\leqslant M$，$M<a$。

由于系统(2.1)的右端是x的周期为2π的周期函数，所以形如$(x+2k\pi,y)$，$k\in\mathbf{Z}$，的点所描述的系统(2.1)的物理状态是相同的，从而我们可以将上述点列均看为同一点。这样，实际上我们只要在相柱面$\{(x,\ y):|x|\leqslant\pi,\ -\infty<y<\infty\}$上研究系统(2.1)的轨线的拓扑结构。

为研究系统(2.1)的周期解的存在性，我们同时考虑如下四个控制系统：

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\alpha y-a\sin x+M \qquad (x>0,\ y>0) \tag{2.1a}$$

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\alpha y-b\sin x-M \qquad (x>0,\ y<0) \tag{2.1b}$$

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\alpha y-a\sin x-M \qquad (x<0,\ y<0) \tag{2.1c}$$

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\alpha y-b\sin x+M \qquad (x<0,\ y>0) \tag{2.1d}$$

上述控制系统的水平等倾线见图1：

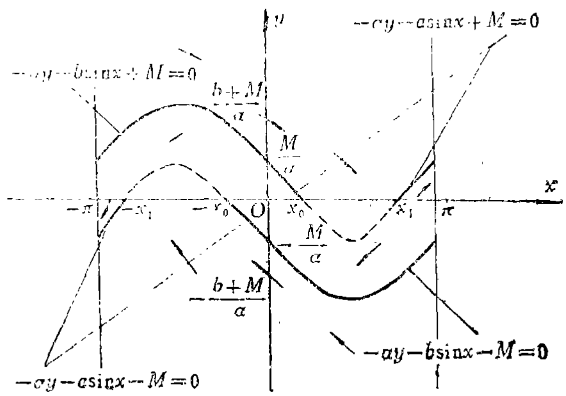

图 1

其中，$x_0=\arcsin(M/a)$，$x_1=\pi-x_0$。

引理1 控制系统(2.1a)～(2.1d)在相柱面$\{(x,\ y):|x|\leqslant\pi,\ -\infty<y<\infty\}$上所确定的方向场关于原点对称，且大小相等，方向相反。

引理2 控制系统(2.1a)和(2.1d)在上半相柱面$\{(x,\ y):|x|\leqslant\pi,\ 0<y<\infty\}$的方向场总在系统(2.1)之上；控制系统(2.1b)和(2.1c)在下半相柱面$\{(x,\ y):|x|\leqslant\pi,\ -\infty<y<0\}$的方向场总在系统(2.1)之下。

引理3 在整个相柱面$\{(x,y):|x|\leqslant\pi,\ -\infty<y<\infty\}$上，系统(2.1)、(2.1a)～(2.1d)均关于参数α构成旋转向量场。当参数α增加时，方向场按顺时针方向旋转。

以上三引理的证明从略。

引理4 对任一$x^*\in(x_0,\ \pi/2)$，只要$\alpha^2>2(b+2M)/(x^*-x_0)$，系统(2.1a)在上半相柱面

过点$B(x_0, y_1=2(b+2M)/\alpha)$的轨线必交$x$轴于点$C(x_2, 0)$，且$x_2\in(x_0, x^*)$。

证明 构作(2.1a)在带域$\{(x, y): x_0<x<x_1, y>0\}$中的控制方程

$$\dot{x}=y,\ \dot{y}=-\alpha y \tag{2.2}$$

显然，对$\alpha^2=2(b+2M)/(x^*-x_0)$，系统(2.2)过点$B$的轨线当$t\to+\infty$时进入奇点$(x^*, 0)$。从而据比较定理和引理3，当$\alpha^2>2(b+2M)/(x^*-x_0)$时(2.1a)过点$B$的轨线必交$x$轴于点$C(x_2, 0)$，且$x_2\in(x_0, x^*)$。证毕。

现在下半柱面过C点作系统(2.1b)的轨线。该轨线必以下述三种方式之一交直线$x=x_0'$于点$D(x_0', y_2)$：

1）轨线先与$x=x_0$相交，再与$x=x_0'$相交于D点，然后交(2.1b)的水平等倾线于点$P(\xi, \eta)$。（见图2）

2）轨线先与$x=x_0$相交，再交(2.1b)的水平等倾线于点$P(\xi, \eta)$，然后交$x=x_0'$于点D。（见图3）

3）轨线先与(2.1b)的水平等倾线交于$P(\xi,\eta)$点，再与$x=x_0$相交，然后交$x=x_0'$于D。（见图4）

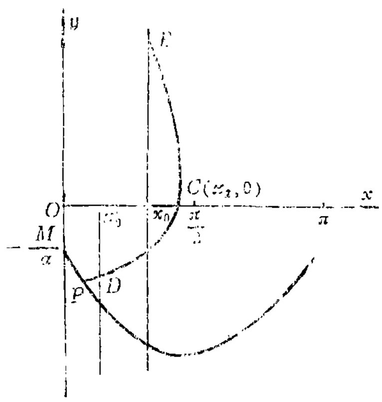

图 2

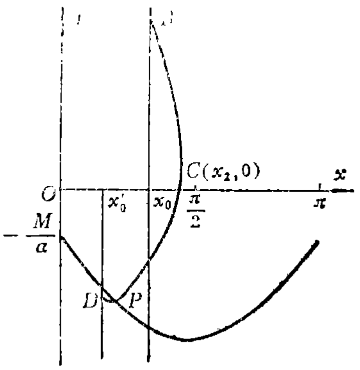

图 3

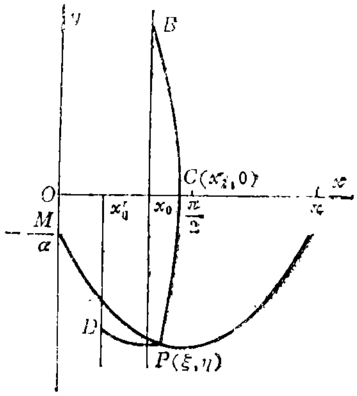

图 4

引理5 除点$B(x_0, y_1)$外，弧$\widehat{BCD}$上所有点的纵坐标y满足$|y|<y_1$。

证明 由于$\widehat{BC}$段从B下降而交x轴于C点，故$\widehat{BC}$上所有点的纵坐标y满足$y<y_1$。在下半柱面，显然，只要就图4的情形证明之。

因为$P(\xi, \eta)$是$\widehat{CD}$与系统(2.1b)的水平等倾线的交点，所以P点是$\widehat{CD}$弧的最低点，从而我们只要证明$\eta^2<y_1^2$即可。

从x_2到ξ积分系统(2.1b)，我们得到

$$\frac{1}{2}\eta^2=\alpha\int_{\xi}^{x_2} y dx+b\cos\xi-b\cos x_2+M(x_2-\xi)$$

因$x_0'<\xi<x_2$，$y<0$，所以

$$\int_{\xi}^{x_2} y dx<0$$

故有

$$\frac{1}{2}\eta^2<b\cos\xi-b\cos x_2+M(x_2-\xi) \tag{2.3}$$

我们再从x_0到x_2积分系统(2.1a)，得到

$$-\frac{1}{2}y_1^2=-a\int_{x_0}^{x_2}ydx+a\cos x_2-a\cos x_0+M(x_2-x_0)$$

因为

$$y^2\frac{d^2y}{dx^2}=(a\sin x-M)\frac{dy}{dx}-a\cos x_2 y$$

其中$x_0<x<x_2<\pi/2$，所以$a\sin x-M>0$。又$dy/dx<0$，$y>0$，从而$d^2y/dx^2<0$。即$\widehat{BC}$在(x_0, x_2)上为凸的。故

$$\int_{x_0}^{x_2}ydx>\frac{1}{2}y_1(x_2-x_0)$$

可得

$$-y_1^2/2<-(a/2)y_1(x_2-x_0)+a\cos x_2-a\cos x_0+M(x_2-x_0) \tag{2.4}$$

从(2.3)式和(2.4)式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\eta^2-\frac{1}{2}y_1^2&<-\frac{a}{2}y_1(x_2-x_0)+a\cos x_2-b\cos x_2\\&\quad+b\cos\xi-a\cos x_0+M(x_2-\xi)+M(x_2-x_0)\\&\leqslant-(a/2)y_1(x_2-x_0)+b\sin(\xi+\theta(x_2-\xi))(x_2-\xi)\\&\quad+2M(x_2-x_0)\qquad(0<\theta<1)\\&\leqslant-(a/2)y_1(x_2-x_0)+(b+2M)(x_2-x_0)\\&=(x_2-x_0)(-(a/2)y_1+b+2M)=0\end{aligned}$$

其中$0<x_0<\xi<x_2<\pi/2$，$\cos x_2-\cos x_0<0$，$x_2-\xi<x_2-x_0$。从而$\eta^2<y_1^2$。引理 5 证毕。

引理6 在带域$\{(x, y):0<x<x_0, y>0\}$上，只要$y\geqslant(a+b+M)/a$，则系统(2.1)的轨线由外向内通过$V=y^2/2+a(1-\cos x)=C$，其中$C>0$为常数。

证明
$$\begin{aligned}\dot V|_{(2.1)}&=y\dot y+a\sin x\dot x=-ay^2-\varphi(t)\sin x+F(t)y+ay\sin x\\&\leqslant-ay^2+(a+b+M)|y|=|y|(-a|y|+a+b+M)\leqslant0\end{aligned}$$

引理7 在带域$\{(x, y):0<x<x_0', y<0\}$上，只要$|y|>(2b+M)/a$，则系统(2.1)的轨线由外向内通过$V=y^2/2+b(1-\cos x)=C$，其中$C>0$为常数。

证明
$$\begin{aligned}\dot V|_{(2.1)}&=y\dot y+b\sin x\dot x=-ay^2-\varphi(t)y\sin x+F(t)y+by\sin x\\&\leqslant-ay^2+(2b+M)|y|=|y|(-a|y|+2b+M)\leqslant0\end{aligned}$$

定理1 对任一$x^*\in(x_0, \pi/2)$，只要$a^2>2(b+2M)/(x^*-x_0)$，则系统(2.1)在区域Ω中存在周期为ω的周期解：$x=x(t)$，$y=y(t)$，并且$|x(t)|\leqslant L_1$，$|y(t)|\leqslant L_2$。

其中 $x_0=\arcsin(M/a)$，$L_1=x_2<\pi/2$，$L_2=((2(b+2M)/a)^2+2a(1-\cos x_0))^{1/2}$

证明 过点$B(x_0,y_1)\equiv2(b+2M)/a)$作系统(2.1a)的轨线。据引理4，所作轨线与$x$轴相交于$C(x_2, 0)$，且$x_0<x_2<x^*<\pi/2$。再过点$C(x_2, 0)$在上半柱面作系统(2.1b)的轨线交直线$x=x_0'$于点$D(x_0', y_2)$。由引理5，$|y_2|<y_1$。在直线$x=x_0'$上自$D$点向下方取一点$E(x_0', -y_1)$。过$B(x_0, y_1)$点作曲线

$$V=y^2/2+a(1-\cos x)=y_1^2/2+a(1-\cos x_0)\equiv C_1$$

此曲线交正y轴于点$A(0, y_A)$，其中y_A满足

$$y_A^2/2=y_1^2/2+a(1-\cos x_0)$$

注意到，该曲线上任一点的纵坐标y满足

$$y>y_1=\frac{2(b+2M)}{a}>\frac{a+b+M}{a}$$

过E点作曲线

$$V=y^2/2+b(1-\cos x)=y_1^2/2+b(1-\cos x_0')\equiv C_2$$

此曲线交负y轴于点$F(0,\ y_F)$，其中y_F满足

$$y_F^2/2=y_1^2/2+b(1-\cos x_0')$$

同时注意到，该曲线上任一点的纵坐标y满足

$$|y|>y_1=\frac{2(b+2M)}{a}>\frac{2b+M}{a}$$

可以证明，$|y_F|<y_A$。事实上，

$$y_F^2/2-y_A^2/2=b(1-\cos x_0')-a(1-\cos x_0)$$

其中$x_0'=\arcsin(M/b)$，$x_0=\arcsin(M/a)$，$a<b$，$M/b<M/a<1$。所以，

$$\frac{1}{2}y_F^2-\frac{1}{2}y_A^2=b\left(1-\frac{\sqrt{b^2-M^2}}{b}\right)-a\left(1-\frac{\sqrt{a^2-M^2}}{a}\right)$$

$$=b-\sqrt{b^2-M^2}-(a-\sqrt{a^2-M^2})$$

$$=\frac{M^2}{b+\sqrt{b^2-M^2}}-\frac{M^2}{a+\sqrt{a^2-M^2}}<0$$

由引理1，关于原点作曲线 $ABCDEF$ 的对称曲线$A'B'C'D'E'F'$，则得闭曲线Γ：$ABCDEFA'B'C'E'F'A$。

系统(2.1)的轨线与Γ相交时，随t增加必进入Γ内部。事实上，在$\widehat{AB}$上，由引理6；在$\widehat{BCD}$上，由引理2；在DE上，由$dx/dt=y<0$；在$\widehat{EF}$上，由引理7；在FA'上，由$dx/dt=y<0$。在$A'B'C'D'E'F'A$上，由引理1。

我们取$x^{**}=(\pi/2)-\varepsilon$，$\varepsilon>0$充分小，则可在$\Gamma$外类似地作一条与$\Gamma$有同样性质的、包含$\Gamma$在内的闭曲线$\Gamma_1$，在这条闭曲线$\Gamma_1$上系统(2.1)的轨线都是由外进入$\Gamma_1$内的。因此，在$\Gamma$外及$\Gamma_1$内的相柱面上被一族类似于$\Gamma$且与$\Gamma$具有同样性质的闭曲线所充满。如记曲线$\Gamma$所围的区域为$\Omega$，曲线$\Gamma_1$所围的区域为$\Omega_1$，则区域$\Omega$就是系统(2.1)的过区域$\Omega_1$内任一点的轨线的最终有界域。

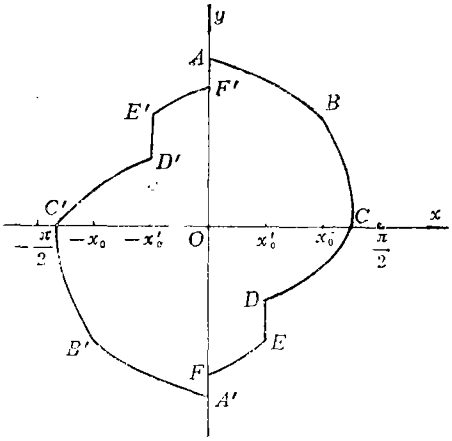

图 5

另外，系统(2.1)的一切解显然在$0<t<\infty$上存在。据 Massera 定理，系统(2.1)在Ω内存在周期为ω的周期解。

由Γ的作法知，$|x(t)|\leqslant L_1=x_2<\pi/2$，$|y(t)|\leqslant L_2=((2(b+2M)/a)^2+2a(1-\cos x_0))^{1/2}$。证毕。

三、周期解的唯一性

为了给出系统(2.1)在Ω内存在唯一周期解的条件，我们需要下面的定义和定理[9]。

考虑系统

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ y),\ \dot{y}=g(t,\ x,\ y) \tag{3.1}$$

定义 如果系统(3.1)的每对解$(x_1(t),\ y_1(t))$和$(x_2(t),\ y_2(t))$，当$t\to\infty$时，有$x_1(t)-x_2(t)\to 0$及$y_1(t)-y_2(t)\to 0$，则称系统(3.1)是非常稳定的。

定理 如果系统(3.1)是非常稳定的，且(3.1)存在一个有界解，则(3.1)就存在唯一的周期解，且(3.1)的所有其他解当$t\to\infty$时都逼近于该周期解。

从上可见，为了给出系统(2.1)在Ω中存在唯一周期解的条件，只要给出系统(2.1)在Ω中是非常稳定的条件。我们得到如下的结果。

定理2 设系统(2.1)满足定理1的条件，则当$\alpha>(b+1)(b-ad)/2ad$时，系统(2.1)在Ω中存在唯一的周期为ω的周期解，并且为渐近稳定的，其中$d=\cos x^*$。

证明 设$(x_1(t),\ y_1(t))$和$(x_2(t),\ y_2(t))$为系统(2.1)的两个解，且$(x_i(0),y_i(0))\in\Omega$ $(i=1,2)$，则由定理1及其证明可知，必存在t_0，当$t>t_0$时，$|x_i(t)|\leqslant L_1$，$|y_i(t)|\leqslant L_2(i=1,\ 2)$。从而有

$$\dot{x}_1=y_1,\ \dot{y}_1=-\alpha y_1-\varphi(t)\sin x_1+F(t) \tag{3.2}$$

及

$$\dot{x}_2=y_2,\ \dot{y}_2=-\alpha y_2-\varphi(t)\sin x_2+F(t) \tag{3.3}$$

令$u=x_1(t)-x_2(t)$，$v=y_1(t)-y_2(t)$，从方程组(3.2)和(3.3)可得

$$\begin{aligned}\dot{u}&=v\\ \dot{v}&=-\alpha v+\varphi(t)(\sin x_2-\sin x_1)=-\alpha v+\varphi(t)\cos\xi(t)(x_2-x_1)\\ &=-\alpha v-\varphi(t)\cdot\cos\xi(t)\cdot u=-bu-\alpha v+(b-\varphi(t)\cos\xi(t))u\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中$\xi(t)=x_1(t)+\theta(x_2(t)-x_1(t))$，$|\xi|<x^*<\pi/2$，注意到，如记$d=\cos x^*$，则$\cos\xi(t)\geqslant d$。

考虑常系数线性方程组

$$\dot{u}=v,\ \dot{v}=-bu-\alpha v \tag{3.5}$$

取李雅普诺夫函数

$$V=a_{11}u^2+2a_{12}uv+a_{22}v^2$$

其中

$$a_{11}=\frac{\alpha^2+b^2+b}{2\alpha b},\ a_{12}=\frac{1}{2b},\ a_{22}=\frac{b+1}{2\alpha b} \tag{3.6}$$

不难算出

$$\dot{V}|_{(3.5)}=-(u^2+v^2)$$

及

$$\begin{aligned}\dot{V}|_{(3.4)}&=-(u^2+v^2)+2a_{12}(b-\varphi(t)\cos\xi(t))u^2+2a_{22}(b-\varphi(t)\cos\xi(t))uv\\ &\leqslant-(u^2+v^2)+2a_{12}(b-ad)(u^2+v^2)+a_{22}(b-ad)(u^2+v^2)\\ &=(-1+2a_{12}(b-ad)+a_{22}(b-ad))(u^2+v^2)\end{aligned}$$

令$K=-1+2a_{12}(b-ad)+a_{22}(b-ad)$，将(3.6)代入，可知，如果$K<0$，系统(3.4)在$\Omega$中为全局稳定的，即当

$$\alpha>\frac{(b+1)(b-ad)}{2ad} \tag{3.7}$$

时，系统(3.4)在Ω中为全局稳定的。也就是说，当(3.7)式成立时，系统(2.1)在Ω中的周期解是唯一的。证毕。

总之，我们证明了

定理3 对任一$x^*\in(x_0,\ \pi/2)$，记$d=\cos x^*$，只要

$$a^2>\max\left(\frac{2(b+2M)}{x^*-x_0},\quad\frac{(b+1)^2(b-ad)^2}{4a^2d^2}\right)$$

则系统(2.1)在区域Ω中存在唯一的周期为ω的渐近稳定周期解$x=x(t)$，$y=y(t)$，并且

$$|x(t)|\leqslant L_1,\quad |y(t)|\leqslant L_2$$

其中

$$x_0=\arcsin\frac{M}{a},\quad L_1=x_2<\frac{\pi}{2},\quad L_2=\left(\left(\frac{2(b+2M)}{a}\right)^2+2a(1-\cos x_0)\right)^{1/2}$$

四、混　沌　态

本节考虑系统

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+(1-\varepsilon\lambda\cos\omega t)\sin x=\beta+\varepsilon\mu(\cos\omega t-\omega\sin\omega t) \tag{4.1}$$

其中$\alpha>0$，$0<\beta<1$，$|\varepsilon|\ll1$，λ，μ均为参数。

此方程等价于

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\alpha y-\sin x+\beta+\varepsilon[\lambda\cos\omega t\sin x+\mu(\cos\omega t-\omega\sin\omega t)] \tag{4.2}$$

系统(4.2)为下述系统(4.3)的扰动系统

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-\alpha y-\sin x+\beta \tag{4.3}$$

该系统有奇点：

$$A_k((2k-1)\pi-x_0,\ 0),\quad B_k(2k\pi+x_0,\ 0),\quad k\in\mathbf{Z},\ \text{其中}x_0=\arcsin\beta.$$

对奇点A_k，在系统(4.3)中令

$$x=u+(2k-1)\pi-x_0,\quad y=v$$

并取线性部分，则有

$$\dot{u}=v,\quad \dot{v}=-\alpha v+u\cos x_0$$

该线性系统的特征方程为

$$\lambda^2+\alpha\lambda-\cos x_0=0$$

特征根为

$$\lambda_1=-\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{\alpha^2}{4}+(1-\beta^2)^{1/2}\right)^{1/2},\quad \lambda_2=-\frac{\alpha}{2}-\left(\frac{\alpha^2}{4}+(1-\beta^2)^{1/2}\right)^{1/2} \tag{4.4}$$

所以，A_k为鞍点。

同理可证，B_k为指标+1的奇点。

据系统的周期性，我们仅需在x的任一长度为2π的区间上研究。所以，我们在相柱面$I\times\mathbf{R}$上研究我们的问题，其中$I=[A_0,\ A_1]$。注意到，此时鞍点A_0和A_1在相柱面上等同为一点。不难看出，在相柱面上的方向场是连续的。

如所熟知[4]，对系统(4.3)，存在$\alpha=\alpha(\beta)$，使得在带域$\{(x,\ y):x\in[A_0,\ A_1],\ -\infty<y<\infty\}$上存在鞍点$A_0$到鞍点$A_1$的连线。从而在相柱面$I\times\mathbf{R}$上存在同宿轨线：$x=\bar{x}(t)$，$y=\bar{y}(t)$。

我们在系统(4.1)中取$\alpha=\alpha(\beta)$，并构作如下非Hamiltonian情形的Melnikov函数[1][8]：

$$M(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{y}(t)[\lambda\cos\omega(t+t_0)\sin\bar{x}(t)+\mu(\cos\omega(t+t_0)$$

$$
\begin{aligned}
&-\omega\sin\omega(t+t_0))]\exp[\alpha(t+t_0)]dt \\
&=\lambda\exp[\alpha t_0]\cos\omega t_0\int_{-\infty}^{\infty}\bar{y}(t)\exp[\alpha t]\sin\bar{x}(t)\cos\omega t dt \\
&\quad-\lambda\exp[\alpha t_0]\sin\omega t_0\int_{-\infty}^{\infty}\bar{y}(t)\exp[\alpha t]\sin\bar{x}(t)\sin\omega t dt \\
&\quad+\mu\exp[\alpha t_0]\cos\omega t_0\int_{-\infty}^{\infty}\bar{y}(t)\exp[\alpha t](\cos\omega t-\omega\sin\omega t)dt \\
&\quad-\mu\exp[\alpha t_0]\sin\omega t_0\int_{-\infty}^{\infty}\bar{y}(t)\exp[\alpha t](\sin\omega t-\omega\cos\omega t)dt \\
&\equiv\exp[\alpha t_0](\lambda I_1\cos\omega t_0-\lambda I_2\cos\omega t_0+\mu I_3\cos\omega t_0-\mu I_4\sin\omega t_0)
\end{aligned}
$$

即

$$
M(t_0)=\exp[\alpha t_0][(\lambda I_1+\mu I_3)\cos\omega t_0-(\lambda I_2+\mu I_4)\sin\omega t_0] \tag{4.5}
$$

可以证明，I_1，I_2，I_3，I_4均是绝对收敛的反常积分且积分值有限，为此，只要证明积分

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\exp[\alpha t]\bar{y}(t)dt \tag{4.6}
$$

收敛即可。

事实上，由常微分方程的基本理论知，存在$T_1>0$充分大，使得

$$
t>T_1\text{时，}\bar{y}(t)=a_1\exp[\lambda_2 t]+o(\exp[\lambda_2 t])
$$
$$
t<-T_1\text{时，}\bar{y}(t)=a_2\exp[\lambda_1 t]+o(\exp[\lambda_1 t])
$$

其中a_1，a_2为常数。

从(4.4)式显见，$\alpha+\lambda_2<0$，$\alpha+\lambda_1>0$，所以

$$
\int_{T_1}^{\infty}\exp[(\alpha+\lambda_2)t]dt<\infty,\quad\int_{-\infty}^{-T_1}\exp[(\alpha+\lambda_1)t]dt<\infty
$$

故反常积分(4.6)收敛，显然有界。

从(4.5)式可见，$M(t_0)$为振动型的。所以对任意的λ，μ及$\alpha=\alpha(\beta)$，只要$\lambda I_1+\mu I_3$，$\lambda I_2+\mu I_4$不同时为零，则$M(t_0)$存在单零点。从而，我们有

定理4 假设在系统(4.1)中，$0<\beta<1$，$\alpha=\alpha(\beta)$，则对任意的参数λ,μ，只要$\lambda I_1+\mu I_3$，$\lambda I_2+\mu I_4$不同时为零，该系统存在混沌运动。

对更一般的大阻尼非自治系统的混沌性质，我们将另文讨论。

罗定军老师仔细审阅了初稿，作者谨表谢意。

参考文献

[1] Sun Jian-hua, Chaotic motions of the pendulum systems, *J. Nanjing University, Math. Biquarterly*, **4**, 1 (1987), 43—50.

[2] 钱敏等，Josephson 结的 *I-V* 曲线的理论分析，物理学报，**36**，2 (1987)，149—156.

[3] 王荣良，调频输入正弦锁相环路的研究，工程数学学报，**3**，2 (1986)，142—144.

[4] Sansone, G. and R. Conti, *Nonlinear Differential Equation*, Pergamon Press (1964).

[5] Beasley, M. R. and B. A. Huberman, Chaos in Josephson junctions, *Comm. Sol.*

Sta. Phys., **10** (1982), 155—162.

[6] Ben-Jacob, E., et al., Intermittent chaos in Josephson junctions, *Phys. Rev. Lett.*, **49** (1982), 1599—1602.

[7] Cirillo, M. and N. F. Pederson, On bifurcations and transition to chaos in a Josephson junctions, *Phys. Lett.*, **90A** (1982), 150—152.

[8] Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).

[9] Lasalle, J. L. and S. Lefschetz, *Stability by Lyapunov's Direct Method with Application*, New York, Academic Press (1961).

Periodic Solution and Chaotic Behavior of a Class of Nonautonomic Pendulum Systems with Large Damping

Sun Jian-hua

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper, the existence and uniqueness of the periodic solution is studied for a class of second order nonautonomic pendulum systems

$$\ddot{x}+a\dot{x}+\varphi(t)\sin x=F(t)$$

and the parameter regions for which the system in chaos is investigated when

$$\varphi(t)=1-\varepsilon\lambda\cos\omega t,\ \ F(t)=\beta+\varepsilon\mu(\cos\omega t-\omega\sin\omega t)$$

and the damping coefficent $a>0$ is large. The results obtained generalize the corresponding conclusions of papers [1~8].