

解决谐波间耦合动力问题的摄动法

高世桥 卢文达

(上海市应用数学和力学研究所, 1987年10月16日收到)

摘 要

本文针对具有谐波间弱耦合作用的振动问题, 利用摄动展开, 将耦合的问题化成了若干个无耦合的问题, 给出了解决谐波间弱耦合动力问题的摄动方法。

一、前 言

在工程计算中, 谐波间耦合的问题尤其是弱耦合问题是经常存在的。正象文献[5]指出的那样, 诸如旋转壳的鼓包, 裂纹, 加肋等都存在这样的问题^{[1][2][3]}。文[5]给出了解决耦合问题的模态分析方法。本文根据弱耦合问题的特点, 采用了摄动求解的方法。

二、耦合特征值问题的摄动展开

具有谐波间弱耦合作用问题的振动微分方程可写为:

$$[M_{ii}]\{\ddot{a}_i\} + [K_{ii}]\{a_i\} + \varepsilon \sum_{j=0}^N [K'_{ij}]\{a_j\} = \{f_i\} \quad (i=0, 1, \dots, N) \quad (2.1)$$

其中 i 为谐波数, $[M_{ii}]$ 和 $[K_{ii}]$ 分别是完善旋转(无耦合系统)壳第 i 阶谐波的总质量阵和总刚度阵, $\varepsilon[K'_{ij}]$ 是弱耦合附加刚度阵, 且 ε 为一小参量, $\{a_i\}$ 是广义节圆位移列阵, $\{f_i\}$ 是广义节圆外力列阵。

把(2.1)式的 $N+1$ 个方程统写在一起得:

$$\begin{bmatrix} [M_{00}] & & & \\ & [M_{11}] & & \\ & & \dots & \\ & & & [M_{NN}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\ddot{a}_0\} \\ \{\ddot{a}_1\} \\ \vdots \\ \{\ddot{a}_N\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{00}] & & & \\ & [K_{11}] & & \\ & & \dots & \\ & & & [K_{NN}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a_0\} \\ \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_N\} \end{bmatrix} +$$

$$+\varepsilon \begin{bmatrix} [K'_{00}] & [K'_{01}] & \cdots & [K'_{0N}] \\ [K'_{10}] & [K'_{11}] & \cdots & [K'_{1N}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [K'_{N0}] & [K'_{N1}] & \cdots & [K'_{NN}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{a_0\} \\ \{a_1\} \\ \vdots \\ \{a_N\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{f_0\} \\ \{f_1\} \\ \vdots \\ \{f_N\} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

或简写为:

$$[M]\{\ddot{a}\} + [K]\{a\} + \varepsilon[K']\{a\} = \{f\} \quad (2.3)$$

为了说明方便, 无论对于(2.2)式(或(2.3)式)中的质量阵, 刚度阵, 还是以后出现的模态矩阵, 均设第 r 列(行)为图1所示矩阵形式中的第 i 母列(行)中的第 k 子列(行). 第 i 母列对应的是第 i 个谐波.

对应(2.3)式振动问题的特征方程可写为:

$$-\omega_r^2[M]\{\phi_r\} + [K]\{\phi_r\} + \varepsilon[K']\{\phi_r\} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, (N+1)m) \quad (2.4)$$

其中 ω_r 为第 r 阶特征频率, $\{\phi_r\}$ 为第 r 阶振动模态. N 为所取谐波总数, m 为单谐波的自由度数.

令:

$$\omega_r = \omega_r^0 + \varepsilon\omega_r^1 + \dots \quad (2.5)$$

$$\{\phi_r\} = \{\phi_r^0\} + \varepsilon\{\phi_r^1\} + \dots \quad (2.6)$$

把它们代入到(2.4)式中, 并比较方程两端 ε 各次幂的系数可得:

$$\varepsilon^0: -\omega_r^{02}[M]\{\phi_r^0\} + [K]\{\phi_r^0\} = 0 \quad (2.7)$$

$$\varepsilon^1: -\omega_r^{02}[M]\{\phi_r^1\} + [K]\{\phi_r^1\} = 2\omega_r^0\omega_r^1[M]\{\phi_r^0\} - [K']\{\phi_r^0\} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon^2: \dots \dots \dots \quad (r=1, 2, \dots, (N+1)m)$$

三、固有频率的摄动求解

从(2.7)式可以看出, 它对应的是完善壳系统振动的特征值问题. 由于它不存在谐波间的耦合作用, 因此其求解是较容易的.

设对应完善壳第 i 阶谐波的特征值问题为:

$$(-\omega_{ik}^{02}[M_{ii}] + [K_{ii}])\{\phi_{ik}^0\} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, N, k=1, 2, \dots, m) \quad (3.1)$$

则 $\{\phi^0\}$ 的形式可写成:

$$\{\phi^0\} = \{ \{0\}^T \{0\}^T \cdots \{\phi_{ik}^0\}^T \{0\}^T \cdots \{0\}^T \}^T \quad (3.2)$$

将(2.8)式的两端前乘 $\{\phi^0\}^T$, 可得:

$$\begin{aligned} & (-\omega_r^{02}\{\phi_r^0\}^T[M] + \{\phi_r^0\}^T[K])\{\phi_r^1\} \\ & = 2\omega_r^0\omega_r^1\{\phi_r^0\}^T[M]\{\phi_r^0\} - \{\phi_r^0\}^T[K']\{\phi_r^0\} \end{aligned} \quad (r=1, 2, \dots, (N+1)m) \quad (3.3)$$

对(3.3)式两端取转置, 并注意质量阵 $[M]$, 刚度阵 $[K]$ 及 $[K']$ 的对称性可得:

$$\begin{aligned} & \{\phi_r^1\}^T(-\omega_r^{02}[M]\{\phi_r^0\} + [K]\{\phi_r^0\}) \\ & = 2\omega_r^0\omega_r^1\{\phi_r^0\}^T[M]\{\phi_r^0\} - \{\phi_r^0\}^T[K']\{\phi_r^0\} \end{aligned} \quad (r=1, 2, \dots, (N+1)m) \quad (3.4)$$

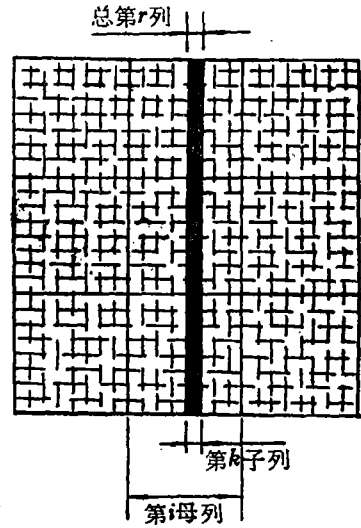


图. 1

再利用(2.7)式的关系即可得到:

$$\omega_r^1 = \frac{\{\phi_r^0\}^T [K'] \{\phi_r^0\}}{2\omega_r^0 \{\phi_r^0\}^T [M] \{\phi_r^0\}} \quad (3.5)$$

再利用(3.2)式的关系, 以及图 1 中矩阵列数标定假设, 可进一步得到:

$$\omega_{i,k}^1 = -\frac{k_k^i}{2k_k^i} \omega_k^0 \quad (i=0, 1, \dots, N, k=1, 2, \dots, m) \quad (3.6)$$

其中: $k_k^i = \{\phi_{i,k}^0\}^T [K_{i,i}] \{\phi_{i,k}^0\}$, $k_k^{i'} = \{\phi_{i,k}^0\}^T [K_{i',i}] \{\phi_{i,k}^0\}$.

四、振型的摄动求解

(2.7)式完善壳特征值问题的振型矩阵可表示成:

$$[\Phi^0] = \begin{bmatrix} [\Phi_0^0] & & & & \\ & [\Phi_1^0] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [\Phi_i^0] & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & [\Phi_N^0] \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

其中 $[\Phi_i^0]$ 为完善壳第*i*阶谐波的振型矩阵, 可依据(3.1)式确定, 其形式为:

$$[\Phi_i^0] = [\{\phi_{i,1}^0\} \ \{\phi_{i,2}^0\} \ \dots \ \{\phi_{i,m}^0\}].$$

仿造(4.1)式, 对于具有谐波间弱耦合作用的问题, 其特征值问题(2.4)式的特征向量矩阵的一阶近似可表为:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} [\Phi_0^0] + \varepsilon[\Phi_{0,0}^1] & \varepsilon[\Phi_{0,1}^1] & \dots & \varepsilon[\Phi_{0,i}^1] & \dots & \varepsilon[\Phi_{0,N}^1] \\ \varepsilon[\Phi_{1,0}^1] & [\Phi_1^0] + \varepsilon[\Phi_{1,1}^1] & \dots & \varepsilon[\Phi_{1,i}^1] & \dots & \varepsilon[\Phi_{1,N}^1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon[\Phi_{i,0}^1] & \varepsilon[\Phi_{i,1}^1] & \dots & [\Phi_i^0] + \varepsilon[\Phi_{i,i}^1] & \dots & \varepsilon[\Phi_{i,N}^1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \varepsilon[\Phi_{N,0}^1] & \varepsilon[\Phi_{N,1}^1] & \dots & \varepsilon[\Phi_{N,i}^1] & \dots & [\Phi_N^0] + \varepsilon[\Phi_{N,N}^1] \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

它同样符合图 1 的形式.

由于(4.2)式的矩阵是(2.4)式特征值问题的特征矩阵, 故存在下列的正交条件:

$$\{\phi_r\}^T [M] \{\phi_s\} = 0 \quad \text{当 } r \neq s \text{ 时} \quad (4.3)$$

$$\{\phi_r\}^T ([K] + \varepsilon[K^1]) \{\phi_s\} = 0 \quad \text{当 } r \neq s \text{ 时} \quad (4.4)$$

其中 $\{\phi_r\}$ 和 $\{\phi_s\}$ 分别为矩阵 $[\Phi]$ 的第*r*列和第*s*列构成的列阵.

将 $\{\phi_r\}$ 及 $\{\phi_s\}$ 按小参数 ε 展开的形式代入到(4.3)式和(4.4)式中并取一阶近似可得:

$$(\{\phi_r^0\}^T + \varepsilon\{\phi_r^1\}^T) [M] \cdot (\{\phi_s^0\} + \varepsilon\{\phi_s^1\}) = 0 \quad r \neq s \text{ 时} \quad (4.5)$$

$$(\{\phi_r^0\}^T + \varepsilon\{\phi_r^1\}^T) [K] (\{\phi_s^0\} + \varepsilon\{\phi_s^1\}) + \varepsilon\{\phi_r^0\}^T [K'] \{\phi_s^0\} = 0 \quad r \neq s \text{ 时} \quad (4.6)$$

令:

$$\{\phi_r^1\} = \sum_{q=1}^R C_{rq} \{\phi_q^0\} \quad \text{且 } C_{rr} = 0 \quad (4.7)$$

把它代入到(4.5)式和(4.6)式的正交条件中, 并取其一阶近似可得:

$$\begin{cases} C_{rs}m_s + C_{sr}m_r = 0 \\ C_{rs}k_s + C_{sr}k_r + k'_{rs} = 0 \end{cases} \quad (r, s=1, 2, \dots, R) \quad (4.8)$$

其中 $R=(N+1)m_j$, $m_r = \{\phi_r^0\}^T [M] \{\phi_r^0\}$; $k_r = \{\phi_r^0\}^T [K] \{\phi_r^0\}$; $k'_{rs} = \{\phi_r^0\}^T [K'] \{\phi_s^0\}$.

由(4.8)式可解得:

$$\begin{cases} C_{rs} = \frac{m_r k'_{rs}}{m_s k_r - m_r k_s} & (r \neq s) \\ C_{rr} = 0 \end{cases} \quad (s, r=1, 2, \dots, R) \quad (4.9)$$

当 r, s 取为同一母列(i 列)中的不同子列(k 列和 p 列)时, (4.9)式可以化为:

$$\begin{cases} C_{kp}^i = \frac{m_k^i k'_{kp}^i}{m_p^i k_k^i - m_k^i k_p^i} & (k \neq p) \\ C_{kk}^i = 0 \end{cases} \quad (i=0, 1, \dots, N; k, p=1, 2, \dots, m) \quad (4.10)$$

其中 $m_k^i = \{\phi_{ik}^0\}^T [M_{ii}] \{\phi_{ik}^0\}$; $k_k^i = \{\phi_{ik}^0\}^T [K_{ii}] \{\phi_{ik}^0\}$; $k'_{kp}^i = \{\phi_{ik}^0\}^T [K'_{ii}] \{\phi_{ip}^0\}$.

当 r, s 取为不同母列(i 列和 j 列)中的某两子列(k 列和 p 列)时, (4.9)式可化成:

$$\begin{cases} C_{kp}^{ij} = \frac{m_k^i k'_{kp}^{ij}}{m_p^j k_k^i - m_k^i k_p^j} & (i \neq j) \\ C_{kk}^{ij} = 0 \end{cases} \quad (i, j=0, 1, \dots, N; k, p=1, 2, \dots, m) \quad (4.11)$$

其中 $k'_{kp}^{ij} = \{\phi_{ik}^0\}^T [K'_{ij}] \{\phi_{ip}^0\}$.

利用(4.10)式和(4.7)式可求得:

$$\{\phi_{ik}^1\} = \sum_{i=1}^m C_{ki}^i \{\phi_{ii}^0\} \quad (i=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, m) \quad (4.12)$$

利用(4.11)式和(4.7)式可求得:

$$\{\phi_{ijk}^1\} = \sum_{i=1}^m C_{ki}^{ij} \{\phi_{ii}^0\} \quad (i, j=0, 1, \dots, N; k=1, 2, \dots, m) \quad (4.13)$$

其中 $\{\phi_{ijk}^1\}$ 为 $[\Phi_{ij}^1]$ 的第 k 列构成的列向量.

五、响应的一阶近似

根据(2.4)式特征值问题确定出的振动模态, 就可利用模态叠加法确定出(2.3)式振动问题的响应, 因模态(振型)的一阶近似可把响应的一阶近似写为:

$$\{\alpha\} = \sum_{r=1}^R \beta_r \{\phi_r\} \quad (5.1)$$

式中的 β_r 为模态坐标, $\{\phi_r\}$ 为(2.4)式确定的振型(模态)的一阶近似, 由(2.6)式取一阶

近似可得,

$$\{\phi_r\} = \{\phi_r^0\} + \varepsilon \{\phi_r^1\} \tag{5.2}$$

再利用(4.7)式, 可得:

$$\{\phi_r\} = \sum_{q=1}^R C'_{r,q} \{\phi_q^0\} \tag{5.3}$$

其中 $C'_{r,r}=1$, $C'_{r,q}=\varepsilon C_{r,q}$ ($r \neq q$).

将(5.3)式代入(5.1)式中可得:

$$\{\alpha\} = \sum_{r=1}^R \left(\beta_r \sum_{q=1}^R C'_{r,q} \{\phi_q^0\} \right) \tag{5.4}$$

利用(4.12)式和(4.13)式的关系, 还可进一步得到:

$$\{\alpha_i\} = \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \beta_{jk} C'_{k,i} \{\phi_{j,i}^0\} \tag{5.5}$$

其中 $C'_{k,i}$ 由下式确定:

$$C'_{k,i} = \begin{cases} \varepsilon C_{k,i} & i \neq j \text{ 时} \\ \varepsilon C_{k,i} & i = j \quad k \neq l \text{ 时} \\ 1 & i = j \quad k = l \text{ 时} \end{cases} \tag{5.6}$$

(5.5)式即为第*i*阶谐波广义节圆位移响应的一阶近似。

六、计算实例

利用这种方法, 本文对如图 2 所示的具有非轴对称几何缺陷双曲冷却塔旋转壳的固有频率和阵风响应因子 $G_{N\varphi}^{(4)}$ 进行了计算。系统的振动方程由文献[1]给出, 形式如(2.1)式。塔壳几何尺寸及缺陷的形式等如图 2 所示, 壳厚按指数变化, 其最大最小厚度及指数分别为: $h_{\text{mix}}=0.5\text{m}$, $h_{\text{min}}=0.14\text{m}$, $\eta=2.0$ 。材料参数为: $E=2700000\text{T/m}^2$, $\nu=0.167$, $\rho=2.45\text{T/m}^3$ 。计算结果列于表1和表2中, 可以看出, 本文的结果与文[5]模态分析法的结果是基本一致的, 表明凸缺陷的存在降低了固有频率, 增大了动力响应因子。

表 1 完善壳和缺陷壳的低阶固有频率(Hz)

完善壳		0.5243	0.6292	0.7672	0.8420	0.8531
缺陷壳	文[5]结果	0.4935	0.6216	0.7542	0.8404	0.8498
	本文结果	0.4898	0.5480	0.7118	0.7935	0.8321

表 2 子午向薄膜力阵风响应因子 $G_{N\varphi}$

完善壳		1.967
缺陷壳	文[5]结果	2.032
	本文结果	2.112

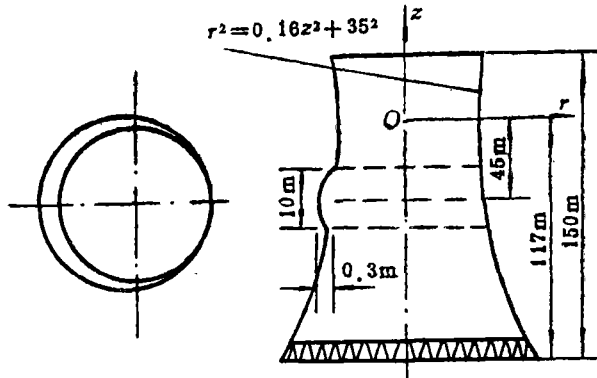


图 2

参 考 文 献

- [1] 卢文达、高世桥, 旋转壳局部几何缺陷对其系统固有频率的影响, 第二届全国计算力学会议论文177号, 上海(1986)。
- [2] 钱源耀, 具有分布裂纹的双曲冷却塔的自由振动和阵风响应分析, 第三届华东地区固体力学学术讨论会论文, 安徽九华山(1986)。
- [3] 李龙元、卢文达, 加肋双曲冷却塔动力响应的渐近分析, 应用数学和力学, 8, 7(1987)。
- [4] 卢文达、林宝庆, 轴对称几何缺陷双曲冷却塔旋转壳阵风响应的影响, 上海工业大学学报, 3(1984)。
- [5] 高世桥、卢文达, 具有非轴对称缺陷双曲冷却塔的动力有限元解, 第一届全国工业冷却塔年会论文, 西安(1987)。

Perturbation Method to Solve the Couple Problem among Harmonic Waves

Gao Shi-qiao Loo Wen-da

(Shanghai Institute of Appl. Math. and Mech., Shanghai)

Abstract

In this paper, in terms of the characteristics of weak coupling problems between different harmonic waves, a perturbation method was presented to solve the coupling problem among harmonic waves.