

中心分布压力作用下圆底扁球壳 的变形和稳定性*

叶开沅 宋卫平

(兰州大学, 1987年4月6日收到)

摘 要

本文研究圆底扁薄球壳在中心分布压力作用下的轴对称大挠度变形和稳定性。提出了求解圆底扁球壳非线性方程的牛顿-样条函数方法。分别讨论了当几何参数 λ 固定时, 载荷作用半径的变化对壳体失稳的影响, 以及当载荷作用半径固定时, 几何参数 λ 的变化对壳体稳定性的影响。分析了临界载荷曲线与屈曲模式之间的关系。并就 $\nu=0.3$ 的情形给出了数值分析结果。

一、前 言

本文研究圆底扁薄球壳在中心分布压力作用下的轴对称大挠度变形和稳定性。文献[1]~[3]曾经研究过这个问题。[1]考虑的是边缘固定夹紧、简单支承和铰链支承的情况, [2]只考虑了边缘固定夹紧的情况。它们采用的方法都是首先用差分代替微分将非线性微分方程边值问题化为非线性代数方程组, 然后用牛顿法求解这个代数方程从而获得问题的近似解。[3]考虑边缘固定夹紧的情况。它用牛顿过程将非线性微分方程组化为线性微分方程组, 然后用差分法求解了这组线性微分方程, 它同时还用摄动法讨论了非轴对称屈曲。本文用牛顿-样条函数法对边缘固定夹紧和铰链支承的圆底扁球壳的大挠度非线性问题进行了研究。分析了当几何参数固定时载荷作用半径的变化对壳体屈曲性质的影响以及当载荷作用位置固定时球壳几何参数的变化对屈曲性质的影响, 讨论了临界载荷曲线与屈曲模式之间的关系。与前人的方法相比, 牛顿-样条函数法具有公式简单, 运算量小, 收敛范围大、收敛速度快, 精度高和便于编程序计算等显著优点。

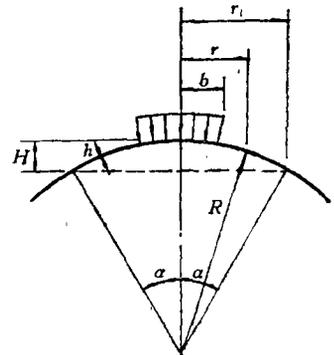


图 1

* 国家自然科学基金资助的课题。

二、基本方程及公式

考虑中心分布压力作用下的圆底扁球壳轴对称非线性方程:

$$\begin{cases} D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - \frac{h}{r} \left(\frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr} + \frac{d\Phi}{dr} \frac{r}{R} \right) = \frac{q}{2} [r - H(r-b)(r - \frac{b^2}{r})] \\ \frac{1}{E} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dw}{dr} \frac{r}{R} \right] = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{E} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dw}{dr} \frac{r}{R} \right] = 0 \quad (2.2)$$

相应的一般边界条件为:

$$r=r_1: w=0, \delta_1 \frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \delta_2 \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (2.3)$$

$$r=0: \frac{dw}{dr} = 0, \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (2.4)$$

式中, $H(r-b)$ 为 Heaviside 函数, 定义如下:

$$H(r-b) = \begin{cases} 1, & r \geq b \\ 0, & r < b \end{cases} \quad (2.5)$$

w 为薄壳挠度, Φ 为应力函数, r 为径向坐标, r_1 为球壳底半径, b 为载荷作用半径, q 为中心分布压力, h 为壳厚, D 为抗弯刚度, R 为球壳半径, E 和 ν 分别为杨氏弹性模量和泊松比, δ_1 和 δ_2 是由边界条件决定的常数^[4], 它们取不同的值就对应各种不同的边界条件.

为讨论方便引进如下无量纲量:

$$x \equiv \frac{r}{r_1}, x_b \equiv \frac{b}{r_1}, \beta(x) \equiv \frac{12(1-\nu^2)}{Er_1} \left(\frac{r_1}{h} \right)^2 \frac{d\Phi}{dr}, \alpha(x) \equiv \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{r_1}{h} \frac{dw}{dr}$$

$$W(x) \equiv \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{w}{h}, p \equiv \frac{\sqrt{[12(1-\nu^2)]^3 r_1^2 b^2 q}}{2Ek^4}, \lambda \equiv \sqrt{12(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{r_1}{Rh}}$$

利用格宁函数法可将非线性微分方程边值问题(2.1)~(2.4)化为如下非线性积分方程组:

$$\begin{cases} \alpha(x) + \int_0^1 G_1(x, \xi) \beta(\xi) [\alpha(\xi) + \lambda^2 \xi] d\xi = -pf(x) \\ \beta(x) - \int_0^1 G_2(x, \xi) \alpha(\xi) \left[\frac{1}{2} \alpha(\xi) + \lambda^2 \xi \right] d\xi = 0 \end{cases} \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.6)$$

$$\beta(x) - \int_0^1 G_2(x, \xi) \alpha(\xi) \left[\frac{1}{2} \alpha(\xi) + \lambda^2 \xi \right] d\xi = 0 \quad (2.7)$$

其中积分核和非齐次项函数分别定义如下:

$$G_i(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(u_i \xi + \frac{1}{\xi} \right) x & 0 \leq x < \xi \\ \frac{1}{2} \left(u_i x + \frac{1}{x} \right) \xi & \xi \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (i=1, 2) \quad (2.8)$$

$$u_1 = \frac{\delta_1 - 1}{\delta_1 + 1}, u_2 = \frac{\delta_2 + 1}{\delta_2 - 1} \quad (2.9)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} \left[2 + \frac{\delta_1 - 1}{\delta_1 + 1} (2 - x_1^2) \right] - \frac{x_1^2}{8x} - \frac{1}{2} x \ln x & x_b \leq x \leq 1 \\ -\frac{x^3}{8x_1^2} + \frac{x}{8} \left[2 + \frac{\delta_1 - 1}{\delta_1 + 1} (2 - x_1^2) \right] - \frac{1}{2} x \ln x_b & 0 \leq x < x_b \end{cases} \quad (2.10)$$

它们分别是正方形 $0 \leq x, \xi \leq 1$ 和区间 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数, 由方程(2.7)解出:

$$\beta(x) = \int_0^1 G_2(x, \xi) \alpha(\xi) \left[\frac{1}{2} \alpha(\xi) + \lambda^2 \xi \right] d\xi \quad (2.11)$$

将它代入(2.6)得:

$$\alpha(x) + \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, \xi) G_2(\xi, \eta) [\alpha(\xi) + \lambda^2 \xi] \alpha(\eta) \left[\frac{1}{2} \alpha(\eta) + \lambda^2 \eta \right] d\eta d\xi = -pf(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.12)$$

这样, 关于两个基本未知函数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 的耦合非线性微分方程边值问题被化为只含一个基本未知函数 $\alpha(x)$ 的非线性积分方程, 由这个积分方程求出 $\alpha(x)$ 以后其它所有应力、变形和位移只需要简单的积分或微分运算便可确定。

三、牛顿-样条函数法 (简称NS方法)

在线性赋范空间 $C[0, 1]$ 中引入算子 F :

$$\begin{cases} y = F(\alpha) \\ y(x) = \alpha(x) + pf(x) + \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, \xi) G_2(\xi, \eta) [\alpha(\xi) + \lambda^2 \xi] \alpha(\eta) \\ \quad \cdot \left[\frac{1}{2} \alpha(\eta) + \lambda^2 \eta \right] d\eta d\xi \end{cases} \quad (3.1)$$

这样, 求解非线性积分方程(2.12)就等价于寻求非线性算子方程

$$F(\alpha) = 0 \quad (3.2)$$

的解。为求解(3.2), 我们构造如下牛顿迭代过程:

$$\begin{cases} F'(\alpha_n)(\Delta\alpha_n) = -F(\alpha_n) \\ \Delta\alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

由(3.1)求出 F 的导算子然后代入(3.3)经整理就得到如下的 Fredholm 第二种积分方程序列:

$$\alpha_{n+1}(x) - \int_0^1 G_n(x, \xi) \alpha_{n+1}(\xi) d\xi = F_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (3.4)$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

其中积分核 $G_n(x, \xi)$ 和非齐次项函数 $F_n(x)$ 定义如下:

$$G_n(x, \xi) = -G_1(x, \xi) \int_0^1 G_2(\xi, \eta) \left[\frac{1}{2} \alpha_n^2(\eta) + \alpha_n(\eta) \lambda^2 \eta \right] d\eta \\ - [\alpha_n(\xi) + \lambda^2 \xi] \int_0^1 G_1(x, \eta) G_2(\eta, \xi) [\alpha_n(\eta) + \lambda^2 \eta] d\eta \quad (3.5)$$

$$F_n(x) = -pf(x) + \int_0^1 \int_0^1 G_1(x, \xi) G_2(\xi, \eta) \left[\alpha_n(\xi) \alpha_n^2(\eta) + \frac{1}{2} \lambda^2 \xi \alpha_n^2(\eta) \right. \\ \left. + \alpha_n(\xi) \alpha_n(\eta) \lambda^2 \eta \right] d\eta d\xi \quad (3.6)$$

它们是由上一次近似所确定的分别在正方形 $0 \leq x, \xi \leq 1$ 和区间 $0 \leq x \leq 1$ 上的已知连续函数。根据维尔斯特拉斯定理, G_n 和 F_n 在这两个区域上分别可以用多项式一致地逼近。分别在区

域 $0 \leq x, \xi \leq 1$ 和 $0 \leq x \leq 1$ 上作等距节点分划:

$$(x_i, \xi_j); (x_i); x_i = i/N, \xi_j = j/M \quad (i=0, 1, 2, \dots, N; j=0, 1, 2, \dots, M)$$

对函数 $G_n(x, \xi)$ 和 $F_n(x)$ 作如下逼近:

$$\bar{G}_n(x, \xi) = \sum_{i,j} G_{n,i,j} \Phi_i^N(x) \Phi_j^M(\xi) \quad (3.7)$$

$$\bar{F}_n(x) = \sum_i F_{n,i} \Phi_i^N(x) \quad (3.8)$$

式中: $G_{n,i,j}$ 和 $F_{n,i}$ 分别是 $G_n(x, \xi)$ 和 $F_n(x)$ 在节点 (x_i, ξ_j) 和 (x_i) 上的函数值, $\Phi_i^N(x)$ 和 $\Phi_j^M(\xi)$ 是不低于三次的多结点基样条函数^[5], 上标 M 和 N 表示节点数目. 代替(3.4)考虑如下积分方程:

$$a_{n+1}(x) - \int_0^1 \bar{G}_n(x, \xi) a_{n+1}(\xi) d\xi = \bar{F}_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1, n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

这是具退化核的Fredholm第二种积分方程, 它的解是我们所熟悉的:

$$a_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^N C_i^{(n+1)} \Phi_i^N(x) \quad (3.10)$$

$$\text{其中: } C_i^{(n+1)} = a_{n+1}(x_i) \quad i=0, 1, 2, \dots, N \quad (3.11)$$

这些系数由如下线代数方程组确定:

$$C_i^{(n+1)} - \sum_{k=0}^N C_k^{(n+1)} a_{ik}^{(n)} = F_{n,i} \quad (i=0, 1, 2, \dots, N; n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

$$\text{这里: } a_{ik}^{(n)} = \sum_{j=0}^M G_{n,i,j} b_{jk} \quad (i, k=0, 1, \dots, N) \quad (3.13)$$

$$b_{jk} = \int_0^1 \Phi_j^M(\xi) \Phi_k^N(\xi) d\xi \quad (j=0, 1, \dots, M; k=0, 1, \dots, N) \quad (3.14)$$

(3.14)的积分容易由简单形式给出, 而且根据多结点基样条函数的紧凑性可知, b_{jk} 只有为数不多的一些需要计算, 其余都等于零. 相应地, 在(3.13)中参予求和的也只有为数不多几项. 从(3.12)解出 $(C^{(n+1)})$ 以后代入(3.10)便得方程(3.4)的一个近似解. 逐次求解(3.12), 如果节点分划充分密而且迭代过程收敛, 我们就能得到满足精度要求的解.

在利用NS方法的过程中要解决如下几个问题: 迭代什么时候收敛? 怎样选取初始近似? 怎样确定临界点及屈曲后解答? 对第一个问题我们采用如下数值收敛准则:

$$\delta_n \equiv \max_i \{ |a_{n+1}(x_i) - a_n(x_i)| \} < 10^{-4} \quad (3.15)$$

计算试验表明, 用 10^{-8} 代替 10^{-4} 所得结果没有大的差别. 由于本文方法具有良好的平方收敛, 因而在计算过程中大多数情况都只需要迭代四或五次就能得到满足(3.15)的解. 虽然NS方法收敛很快, 但与大多数迭代法一样, 它要求所选初始近似 a_0 充分靠近所要求的解 a ,

否则迭代可能发散或飘移到其它的解。本文按如下方法选取初始近似：对固定的 λ 和 δ_1, δ_2 (即给定的球壳几何和边界条件)，给 p 一个充分小的值，这时壳体只有微小变形，其线性解 (在方程 (2.12) 中略去非线性项而得，即 $\alpha(x) = -pf(x)$) 与方程的精确解很接近，因此以它作为初始近似 (记为 $\alpha_0(x, p)$) 进行 NS 迭代过程便能得到对应于这个 p 值的所要求的非线性解 (记为 $\alpha(x, p)$)，由它可以算出与这个 p 值相对应的应力、变形和位移。接下来给 p 一个适当的增量 Δp ，对应于 $p + \Delta p$ 的初始近似解就取为：

$$\alpha_0(x, p + \Delta p) = \alpha(x, p) \quad (3.16)$$

以此开始 NS 迭代就能得到对应于 $p + \Delta p$ 的所要求的非线性解 $\alpha(x, p + \Delta p)$ 。逐步增加载荷并按上述方法选取初始近似进行迭代，我们就能够求得对应于任意载荷 p 的所要求的解答。如果所得对应于 p 的解 $\alpha(x, p)$ 与对应于 $p + \Delta p$ 的解 $\alpha(x, p + \Delta p)$ 之间出现剧烈变化 (比如中心挠度出现剧烈跳跃)，这表明解答已从屈曲前状态飘移到了屈曲后状态，临界点就在 p 与 $p + \Delta p$ 之间，逐步缩小 Δp 我们就能确定出上临界载荷及相应的解。当解答从屈曲前状态飘移到屈曲后解答以后，按 (3.16) 或

$$\alpha_0(x, p - \Delta p) = \alpha(x, p) \quad (3.17)$$

的方式选取初始近似，依照上面的程序去做就能求得屈曲后状态的其它解。

具体计算时，初始增量 Δp 可以取得大一些，待寻找到临界点所在范围以后再逐次缩减 Δp 进行计算，这样可节省运算机时。

四、数值结果及其讨论

本文采用三次多结点基样条函数对中心分布压力作用下边缘固定夹紧和铰链支承的圆底扁球壳的大挠度变形和稳定性在 $\nu = 0.3$ 的情形进行了数值分析，所取网格间距为 $\Delta x = \Delta \xi = 0.02$ ，现将部分结果陈述于下。

图 2 表示对边缘固定夹紧情况当载荷位置固定时临界载荷随几何参数的变化，其中分别给出了文献 [2] 所得结果以及本文的结果。在 $8 \leq \lambda < 10$ 的范围内本文结果与 [2] 的结果有微小差异，但在 $10 \leq \lambda < 20$ 的范围内两种结果几乎完全重合，而且随着 λ 增大临界载荷单调上升。

图 3 和图 4 分别给出了在固定夹紧和铰链支承两种边界条件下，对几个固定的几何参数

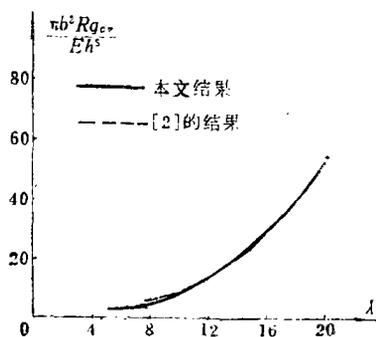


图2 临界载荷参数-几何参数关系
($x_0 = 0.4$, 固定夹紧)

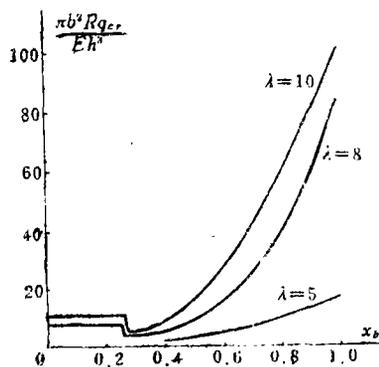


图3 临界载荷参数-载荷作用半径
关系(固定夹紧)

λ , 临界载荷随无量纲载荷半径 x_b 的变化, 也就是在作用载荷从中心集中力逐渐转变为全表面均布压力期间临界载荷的特性。从图中不难看出, 当 $0 \leq x_b \leq 0.2$ 时, 无论边缘是固定夹紧还是铰链支承临界载荷几乎都保持常值不变, 也就是当中心分布压力的无量纲作用半径不超过 0.2 时其合力的临界值几乎等同于中心集中载荷的临界值。但是, 对 λ 等于 8 和 10 的扁球壳, 不论其边缘是固定夹紧还是铰链支承, 它们的临界载荷都分别在 $0.2 < x_b < 0.3$ 的范围内的某一点突然急剧下降, 随后临界载荷又随 λ 增大而单调上升。这里, 使临界载荷值出现突降这一奇特现象的原因是由于载荷作用半径 x_b 的变化导致壳体屈曲模式发生了显著改变。它可以由图 5 给出的屈曲前对应于临界状态的无量纲轴向截面来说明。从这个图中可以看到,

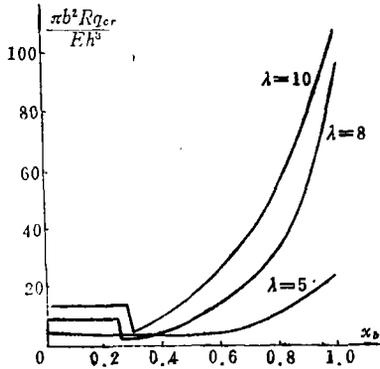


图4 临界载荷参数-载荷作用半径关系(铰链支承)

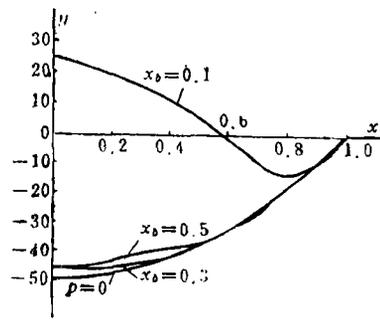


图5 屈曲前轴向截面($\lambda=10$, $p=p_{cr}$, 固定夹紧)

当 x_b 等于 0.1 时, 对应于临界状态的屈曲前轴向截面形状与中心集中载荷作用时的屈曲前轴向截面形状相同。屈曲之前在壳体中心部分形成一个凹坑并伴随较大的中心挠度, 然后随着载荷增加跳跃发生。可是当 x_b 等于 0.3 和 0.5 时, 壳体的屈曲模式发生了显著改变, 屈曲之前壳体不再在中心部分出现凹坑, 而是沿壳面产生比较均匀的不太大的挠度, 然后随载荷增加壳体发生跳跃, 它表现出与全表面承受均布压力作用时类似的屈曲模式。由图 3 和图 4 还可看到, 几乎对任意的载荷作用半径临界载荷都随 λ 增大而增大。由于 x_b 等于 1 时的临界载荷对应于全表面承受均布压力时的临界载荷, 所以图 3 和图 4 的结果表明承受局部轴对称分布压力作用的圆底扁球壳的临界载荷值低于全表面承受均布压力作用时的临界载荷值。图 3 还表明, 当 λ 等于 5 时, 如果 x_b 小于 0.4 壳体不会出现轴对称失稳。这是显然的结果, 因为文献[6]的结果已经表明对承受中心集中力作用的扁球壳, 如果 $\lambda \leq 7$ 则这个壳不会发生轴对称屈曲。

图 6 是屈曲前对应于临界状态的无量纲切向薄膜应力。当 x_b 等于 0.3 时, 除了在壳体中心有较大的压应力以外其余地方没有出现压应力极值; 但是当 x_b 等于 0.1、0.5 和 0.8 时, 除了在壳体中心有较小的压应力以外沿径向的其它地方还有很大的压应力极值; 当 x_b 等于 0.1 时, 压应力极值的位置正好在壳体屈曲前形成的圆形凹坑的边缘; 而 x_b 等于 0.5 和 0.8 时, 这些压应力极值的位置就在靠近载荷作用半径的内侧。从图 7 的结果可进一步看到, 当 x_b 等于 0.1 和 0.5 时, 切向弯曲应力分别在壳体屈曲前所形成的凹坑边缘和载荷作用半径附近出现较大的极值, 而 x_b 等于 0.3 时就没有这样的极值出现, 应力除在中心附近较大以外沿径向的分布是比较均匀的而且其值很小。因此我们可以推测, 对几何参数 λ 等于 10 的圆底扁球壳, 当 x_b 等于 0.1、0.5 和 0.8 时它很可能在载荷作用半径附近或屈曲前形成的凹坑的边缘出现非轴

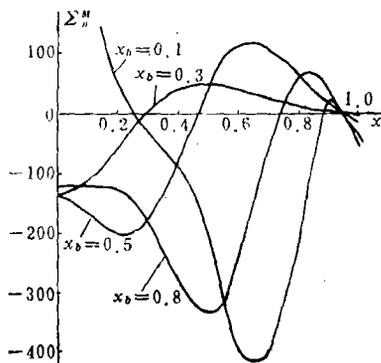


图6 屈曲前无量纲切向薄膜应力
($\lambda=10$, $p=p_{cr}$, 固定夹紧)

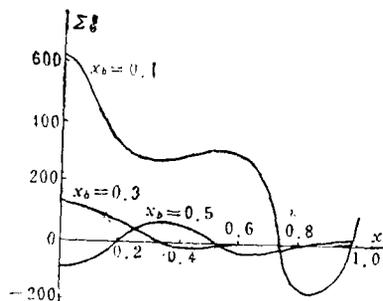


图7 屈曲前无量纲切向弯曲应力
($\lambda=10$, $p=p_{cr}$, 固定夹紧)

对称皱褶, 而对 x_b 等于 0.3 的扁球壳出现非轴对称皱褶的可能性极小. 这与 [3] 中进行非轴对称分析所得结论是基本一致的. 文献 [3] 对 λ 等于 12 的圆底扁球壳进行分析后指出, 当 $0.16 \leq x_b \leq 0.4$ 时壳体的屈曲是轴对称的, 而当 $x_b < 0.16$ 或 $x_b > 0.4$ 时壳体在轴对称屈曲之前将先发生非轴对称屈曲.

五、结 论

1. 本文结果与 [2] 的理论结果是基本一致的.
2. 图 2、图 3 和图 4 的结果可供工程和设计参考.
3. 当中心分布压力的作用半径比较小时, 扁球壳表现出与中心集中载荷作用时相同的特性; 随着无量纲载荷作用半径 x_b 趋近于 1, 壳体又表现出类似于全表面承受均布压力时的屈曲性质.
4. 随着中心分布压力作用半径的变化壳体屈曲模式将发生显著改变, 而壳体屈曲模式的改变又导致临界载荷值出现突变.
5. 几乎对所有载荷作用半径临界载荷都随 λ 增大而上升.
6. 承受局部轴对称分布压力作用的圆底扁球壳的临界载荷值低于全表面承受均布压力作用时的临界载荷值.
7. 对于给定几何参数 λ 的圆底扁球壳, 当中心分布压力的作用半径处于某些位置时, 壳体的屈曲是轴对称的, 而载荷作用半径处于另外一些位置时, 在轴对称屈曲之前可能先出现非轴对称屈曲.

参 考 文 献

- [1] Stephens, W. B. and R. E. Fulton, Axisymmetric static and dynamic buckling of spherical caps due to centrally distributed pressures, *AIAA J.*, 7, 11 (1969), 2120—2126.
- [2] Mescall, J. F., Large deflections of spherical shells under concentrated, distributed and ring loadings, *Proc. 4th Southeastern Conf. on Theo. Appl. Mech.* (1968), 183—197.
- [3] Fitch, J. R. and B. Budiansky, Buckling and postbuckling behavior of spherical

caps under axisymmetric load, *AIAA J.*, 8, 4 (1970), 686—693.

- [4] 宋卫平, 圆平板的轴对称非线性弯曲, 兰州大学学报(自然科学版), 22, 1 (1986), 14—23.
[5] 李岳生、齐东旭, 《样条函数方法》, 科学出版社 (1979).
[6] Mescall, J. F., Large deflections of spherical shells under concentrated loads, *J. Appl. Mech.*, 32, 4 (1965), 936—938.

Deformations and Stability of Spherical Caps under Centrally Distributed Pressures

Yeh Kai-yuan Song Wei-ping

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper the deformations and stability in large axisymmetric deflection of spherical caps under centrally distributed pressures are investigated. The Newton-spline method for solving the nonlinear equations governing large axisymmetric deflection of spherical caps is presented. The buckling behavior is studied for a cap with fixed geometry when the size of the loaded radius is allowed to vary, and for a fixed loaded radius when the shell geometry is allowed to vary. The influence of the buckling modes on the critical loads is analysed. Numerical results are given for $\nu=0.3$.