应用数学和力学，第9卷第10期(1988年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

耦合热弹塑性问题的泛函及其变分原理*

程赫明　　王洪纲

（昆明工学院，1987年8月25日收到）

摘　　要

为用有限元法求解耦合热弹塑性问题，建立适当的泛函是有必要的。本文试图在K. N. Rysinko和E. I. Blinov提出的热弹塑性本构方程和热传导方程[1]的基础上，用泛函分析理论导出耦合热弹塑性问题的泛函。

一、前　言

热一力耦合问题曾引起了人们的广泛兴趣，但由于理论求解十分困难，目前这一问题的研究多数仍集中在耦合热弹性领域。经人们研究，对热弹性耦合问题作出如下结论[2]：

（1）　热动耦合效应的物理实质是对弹性波的阻尼；

（2）　在耦合系数很小时，耦合效应并不明显；

（3）　只要加热不太快，耦合效应影响微小。

但是，对于热弹塑性耦合问题，其耦合系数远比热弹性问题的耦合系数大。在这种情况下，耦合效应的影响倒底有多大呢？目前这方面的研究并不多。另外，对于热弹塑性耦合问题，由于本构方程比较复杂，理论求解就显得更加困难了。这给用于求解耦合问题的各种数值方法带来了广阔的前景，有限元法是其中较为有效的一种方法。为此，本文在K. N. Rysinko和E. I. Blinov指出的热弹塑性本构方程和热传导方程的基础上，导出了耦合热弹塑性拟静态问题的泛函，为进一步用有限元法求解耦合热弹塑性问题打下理论基础。

二、耦合热弹塑性问题的控制方程

设$\Omega\subset R^n$是一个线性子空间，$\partial\Omega$表示Ω的边界，$\partial\Omega$分为$\partial\Omega_\sigma$和$\partial\Omega_u$，即：$\partial\Omega=\partial\Omega_\sigma\bigcup\partial\Omega_u$。$\forall \mathbf{x}=\mathbf{x}(u_i,\varepsilon_{ij},\sigma_{ij},T)\in\bar{\Omega}$（其中$u_i$为位移增量，$\sigma_{ij}$和$\varepsilon_{ij}$为应力和应变张量的分量，$T$为绝对温度），$t_0\in[0,\infty)$，$(\mathbf{x},t)\in\bar{\Omega}\times[0,t_0]$，耦合热弹塑性问题的控制方程为：

1.　平衡方程

在小变形条件下，平衡方程为：

* 国家自然科学基金资助的课题。

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0$$

在 $t+\Delta t$ 时刻，$(\sigma_{ij})_{t+\Delta t}=\sigma_{ij}+\Delta\sigma_{ij}$，则

$$\Delta\sigma_{ij,j}+R_i=0 \qquad 在\ \Omega\times[0,t_0]内 \tag{2.1}$$

2. 边界条件

$$\Delta u_i=\Delta\hat{u}_i \qquad 在\ \partial\Omega_u\times[0,t_0]上 \tag{2.2}$$

$$\Delta F_i=\Delta\hat{F}_i \qquad 在\ \partial\Omega_\sigma\times[0,t_0] \tag{2.3}$$

其中 $\Delta\hat{u}_i$，$\Delta\hat{F}_i$ 分别为已知位移增量和外力增量。

3. 位移—应变关系

$$\Delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i}) \qquad 在\ \Omega\times[0,t_0]内 \tag{2.4}$$

4. 本构方程及热传导方程

根据文献[1]，各向同性体热弹塑性问题的本构方程应取为：

$$\Delta\sigma_{ij}=E_{ijkl}\Delta\varepsilon^e_{kl}-\alpha(2\mu+3\lambda)\Delta T\delta_{ij}+\frac{\alpha^2}{C}(2\mu+3\lambda)^2T\Delta\varepsilon^e_{kk}\delta_{ij}$$

设 $T=T_0+\Delta T$，若 $\Delta T\ll T_0$，则可得线性方程

$$\Delta\sigma_{ij}=E_{ijkl}\Delta\varepsilon^e_{kl}-\alpha(2\mu+3\lambda)\Delta T\delta_{ij}+\frac{\alpha}{C}(2\mu+3\lambda)^2T_0\Delta\varepsilon^e_{kk}\delta_{ij}$$

式中E_{ijkl}，μ，λ分别为弹性矩阵分量和Lamé常数，C，α，δ_{ij}分别表示无应变比热，热膨胀系数和Kroneck记号。$\Delta\sigma_{ij}$，$\Delta\varepsilon^e_{ij}$ 和 T 则表示应力增量，弹性应变增量和温度。

热传导方程为：

$$kT_{,kk}\Delta t=C\Delta T+\alpha(2\mu+3\lambda)T_0\Delta\varepsilon^e_{kk}-\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}$$

其中 $\dot{\varepsilon}^p_{ij}$ 是塑性应变率。

由 Misses 屈服条件

$$\psi=f(J_2)-H\left(\int d\bar{\varepsilon}_p,T\right)$$

及流动法则

$$d\varepsilon^p_{ij}=\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}}d\bar{\varepsilon}_p$$

则有

$$\Delta\sigma_{ij}=C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}-D_{ij}\Delta T-B_{ij}\dot{T} \tag{2.5}$$

$$kT_{,kk}=G\dot{T}+T_0D_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}-\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{2.6}$$

式中 $\Delta\varepsilon_{ij}=\Delta\varepsilon^e_{ij}+\Delta\varepsilon^p_{ij}$

$$C_{ijkl}=E_{ijkl}-E_{ijrs}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{rs}}\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{mn}}E_{mnkl}+E_{ijrs}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{rs}}\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{mn}}\delta_{mn}$$

$$\cdot\frac{\alpha^2}{C}(2\mu+3\lambda)^2T_0\delta_{kl}+\frac{\alpha^2}{C}(2\mu+3\lambda)^2T_0\delta_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{rr}}\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kl}}$$

$$-\frac{\alpha^4}{C^2}(2\mu+3\lambda)^4T_0^2\delta_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{rr}}\frac{1}{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kl}}$$

$$\hbar=H'_T+\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}}E_{ijkl}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kl}}-\frac{\alpha^2}{C}(2\mu+3\lambda)^2T_0\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kk}}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}}\delta_{ij}$$

$$D_{ij}=\delta_{ij}(2\mu+3\lambda)-E_{ijkl}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kl}}\frac{\alpha}{\bar{h}}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{mm}}(2\mu+3\lambda)$$

$$+\frac{\alpha^3}{C}(2\mu+3\lambda)^3T_0\delta_{ij}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kk}}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ll}}$$

$$B_{ij}=E_{ijkl}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kl}}\frac{\partial H}{\partial T}\Delta t-\frac{\alpha^2}{C}(2\mu+3\lambda)^2T_0\frac{1}{\bar{h}}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial H}{\partial T}\Delta t$$

$$G=C+\alpha^2(2\mu+3\lambda)^2T_0\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kk}}\frac{1}{\bar{h}}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{ll}}+\alpha(2\mu+3\lambda)T_0\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_{kk}}\frac{1}{\bar{h}}\frac{\partial H}{\partial T}$$

5. 温度边界条件

$$-k\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=h(T-T_f) \tag{2.7}$$

其中 k，h 和 T_f 表示热传导系数，对流热交换系数和周围介质温度。Γ 表示对流热交换边界。

三、泛 函 的 存 在 性

设 X 是定义在 $\bar{\Omega}\subset R^n$ 上的连续实值函数构成的 Banach 空间，定义 $S\subset X$ 为有秩序排列 $\lambda=(\Delta u_m,\ \Delta\varepsilon_{kl},\ \Delta\sigma_{ij},\ T,\ \Delta u_i,\ \Delta F_i,\ T)$ 全体构成的向量空间，S' 为 S 的对偶空间。若在时刻 $t-\Delta t$ 的 T_{k-1} 已知，并注意到 $\dot{T}$ 和 $\Delta\hat{u}_i$ 不能变分[3][4]，则 S' 为有秩序排列

$$\bar{\lambda}=\left(R_m,\ B_{ij}\dot{T}-D_{ij}T_{k-1},\ 0,\ \frac{\Delta t}{T_0}(\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}-G\dot{T}),\ -\Delta\hat{u}_i,\ \Delta\hat{F}_i,\ -\frac{\Delta t}{T_0}hT_f\right)$$

全体构成的向量空间。

令 $\Lambda=\{\Delta u_m,\Delta\varepsilon_{kl},\Delta\sigma_{ij},T,\Delta u_i,\Delta F_i,T\}^T\in S$

$$\Gamma=\{R_m,B_{ij}\dot{T}-D_{ij}T_{k-1},\ 0,\ \frac{\Delta t}{T_0}(\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}-G\dot{T}),-\Delta\hat{u}_i,\Delta\hat{F}_i,-\frac{\Delta t}{T_0}hT_f\}^T\in S'$$

引入线性连续可微算子 $P:S\to S'$，其中 P 为 7×7 阶矩阵，其分量为

$$P_{31}=-P_{13}=\frac{1}{2}\left(\delta_{im}\frac{\partial}{\partial x_j}+\delta_{jm}\frac{\partial}{\partial x_i}\right),\ P_{32}=P_{23}=-1$$

$$P_{22}=C_{ijkl},\ P_{24}=P_{42}=-D_{kl},\ P_{44}=-\frac{\Delta t}{T_0}k\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}$$

$$P_{56}=-P_{65}=1,\ P_{77}=-\frac{\Delta t}{T_0}\left(k\frac{\partial}{\partial n}+h\right)$$

其余分量为零。

因此，耦合热弹塑性问题的控制方程(2.1)～(2.7)可合写为

$$P(\Lambda)=\Gamma \tag{3.1}$$

令
$$Q(\Lambda)=P(\Lambda)-\Gamma=0 \tag{3.2}$$

则算子 Q 有势的充分必要条件[5]为：

$$\langle dQ(\Lambda;\ \eta),\ \xi\rangle=\langle dQ(\Lambda;\ \xi),\ \eta\rangle \tag{3.3}$$

其中 $\eta=\{\Delta\bar{u}_m,\Delta\bar{\varepsilon}_{kl},\Delta\bar{\sigma}_{ij},\bar{T},\Delta\bar{u}_i,\Delta\bar{F}_i,\bar{T}\}^T\in S$

$\xi=\{\Delta\bar{\bar{u}}_m,\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{kl},\Delta\bar{\bar{\sigma}}_{ij},\bar{\bar{T}},\Delta\bar{\bar{u}}_i,\Delta\bar{\bar{F}}_i,\bar{\bar{T}}\}^T\in S$

$dQ(\Lambda;\ \eta)$为 Gâteaux 微分，$\langle\cdot,\cdot\rangle$为空间 $S\times S'$ 上的偶对。若(3.3)式成立，则算子 Q 有势，Q 有势则方程(3.1)对应的泛函存在。事实上，该问题的泛函是存在的。为说明之，我们首先计算$\langle dQ(\Lambda;\ \eta),\ \xi\rangle$

$$\begin{aligned}\langle dQ(\Lambda;\ \eta),\ \xi\rangle=&-\int_\Omega\Delta\bar{\sigma}_{ij,j}\Delta\bar{\bar{u}}_i d\Omega+\int_\Omega C_{ijkl}\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\Omega\\&-\int_\Omega D_{ij}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}\bar{T}d\Omega+\int_\Omega\left[\frac{1}{2}(\Delta\bar{u}_{i,j}+\Delta\bar{u}_{j,i})-\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}\right]\Delta\bar{\bar{\sigma}}_{ij}d\Omega\\&+\frac{\Delta t}{T_0}k\int_\Omega\bar{T}_{,kk}\bar{\bar{T}}d\Omega-\int_\Omega D_{ij}\bar{\bar{T}}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}d\Omega+\int_{\partial\Omega_\sigma}\Delta\bar{F}_i\Delta\bar{\bar{u}}_i dS\\&-\int_{\partial\Omega_u}\Delta\bar{\bar{F}}_i\Delta\bar{u}_i dS-\frac{\Delta t}{T_0}\int_\Gamma\left(k\frac{\partial\bar{T}}{\partial n}+h\bar{T}\right)\bar{\bar{T}}dS+\int_\Omega\Delta\bar{\sigma}_{ij}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\Omega\end{aligned}$$

利用散度定理

$$\int_\Omega\Delta\bar{\sigma}_{ij,j}\Delta\bar{\bar{u}}_i d\Omega=\int_{\partial\Omega}\Delta\bar{F}_i\Delta\bar{\bar{u}}_i d\Omega-\int_\Omega\frac{1}{2}(\Delta\bar{\bar{u}}_{i,j}+\Delta\bar{\bar{u}}_{j,i})\Delta\bar{\sigma}_{ij}d\Omega$$

$$\int_\Omega\bar{T}_{,kk}\bar{\bar{T}}d\Omega=\int_\Gamma\frac{\partial\bar{T}}{\partial n}\bar{\bar{T}}dS-\int_\Omega\bar{T}_{,i}\bar{\bar{T}}_{,i}d\Omega$$

得到

$$\begin{aligned}\langle dQ(\Lambda;\eta),\xi\rangle=&\int_\Omega\frac{1}{2}[(\Delta\bar{u}_{i,j}+\Delta\bar{u}_{j,i})\Delta\bar{\bar{\sigma}}_{ij}+(\Delta\bar{\bar{u}}_{i,j}+\Delta\bar{\bar{u}}_{j,i})\Delta\bar{\sigma}_{ij}]d\Omega\\&+\int_\Omega C_{ijkl}\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\Omega-\int_\Omega(\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}\Delta\bar{\bar{\sigma}}_{ij}+\Delta\bar{\sigma}_{ij}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij})\,d\Omega+\frac{\Delta t}{T_0}k\int_\Omega\bar{\bar{T}}_{,i}\bar{T}_{,i}d\Omega\\&-\int_\Omega(D_{ij}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\bar{T}}+D_{ij}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}\bar{T})d\Omega+\frac{\Delta t}{T_0}\int_\Gamma h\bar{T}\bar{\bar{T}}\,dS\end{aligned}\qquad(3.4)$$

将 ξ，η 互换可得$\langle dQ(\Lambda;\xi),\ \eta\rangle$

$$\begin{aligned}\langle dQ(\Lambda;\xi),\eta\rangle=&\int_\Omega\frac{1}{2}[(\Delta\bar{u}_{i,j}+\Delta\bar{u}_{j,i})\Delta\bar{\bar{\sigma}}_{ij}+(\Delta\bar{\bar{u}}_{i,j}+\Delta\bar{\bar{u}}_{j,i})\Delta\bar{\sigma}_{ij}]d\Omega\\&+\int_\Omega C_{ijkl}\Delta\bar{\varepsilon}_{kl}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}d\Omega-\int_\Omega(\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}\Delta\bar{\bar{\sigma}}_{ij}+\Delta\bar{\sigma}_{ij}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij})d\Omega+\frac{\Delta t}{T_0}k\int_\Omega\bar{\bar{T}}_{,i}\bar{T}_{,i}d\Omega\\&-\int_\Omega(D_{ij}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\bar{T}}+D_{ij}\Delta\bar{\bar{\varepsilon}}_{ij}\bar{T})d\Omega-\frac{\Delta t}{T_0}\int_\Gamma h\bar{T}\bar{\bar{T}}dS\end{aligned}\qquad(3.5)$$

从(3.4)和(3.5)式知

$$\langle dQ(\Lambda;\eta),\xi\rangle-\langle dQ(\Lambda;\xi),\eta\rangle=0$$

因此，耦合热弹塑性问题的泛函存在。

四、耦合热弹塑性问题的泛函及其变分原理

根据文献[5]，(3.1)式对应的泛函应为

$$J(\Lambda)=\int_0^1\langle Q(S\Lambda),\ \Lambda\rangle dS$$

将(3.2)式代入上式，经计算得

$$J(\Lambda)=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\Delta\sigma_{ij,j}+R_i)\Delta u_i d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega}C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega$$
$$-\int_{\Omega}\Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega-\int_{\Omega}D_{ij}T\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega-\int_{\Omega}(B_{ij}\dot{T}-D_{ij}T_{k-1})\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega$$
$$+\frac{1}{4}\int_{\Omega}(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i})\Delta\sigma_{ij}d\Omega+\frac{\Delta t}{2T_0}k\int_{\Omega}T_{,ii}Td\Omega-\frac{\Delta t}{T_0}\int_{\Omega}(G\dot{T}$$
$$-\sigma_{ij}\dot{e}^{p}_{ij})Td\Omega+\int_{\partial\Omega_\sigma}\left(\frac{1}{2}\Delta F_i-\Delta\hat{F}_i\right)\Delta u_i dS+\int_{\partial\Omega_u}\left(\Delta\hat{u}_i-\frac{1}{2}\Delta u_i\right)\Delta F_i dS$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{T_0}k\int_{\Gamma}\frac{\partial T}{\partial n}TdS-h\int_{\Gamma}T^2dS\right)+\frac{\Delta t}{T_0}h\int_{\Gamma}T_f TdS$$

利用散度定理，整理后得

$$J(\Lambda)=\int_{\Omega}\frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i})\Delta\sigma_{ij}d\Omega-\int_{\Omega}R_i\Delta u_i d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega}C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega$$
$$-\int_{\Omega}\Delta\varepsilon_{ij}\Delta\sigma_{ij}d\Omega-\int_{\Omega}D_{ij}T\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega-\int_{\Omega}(B_{ij}\dot{T}-D_{ij}T_{k-1})\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega$$
$$-\frac{\Delta t}{2T_0}k\int_{\Omega}T_{,i}T_{,i}d\Omega-\frac{\Delta t}{T_0}\int_{\Omega}(G\dot{T}-\sigma_{ij}\dot{e}^{p}_{ij})Td\Omega-\int_{\partial\Omega_\sigma}\Delta\hat{F}_i\Delta u_i dS$$
$$+\int_{\partial\Omega_u}(\Delta\hat{u}_i-\Delta u_i)\Delta F_i dS-\frac{\Delta t}{2T_0}h\int_{\Gamma}T^2dS+\frac{\Delta th}{T_0}\int_{\Gamma}T_f TdS$$

注意上式不能对 $\dot{T}$，$\Delta\dot{u}_i$ 变分[3][4]。可以证明，上式所表示泛函 $J(\Lambda)$ 的临界点必为方程(3.1)的解。为此，我们对上式求第一变分（即 Frénch 微分），对于线性算子，Frénch 微分为：

$$\delta_\Lambda J(\Lambda,\eta)=\frac{d}{d\alpha}J(\Lambda+\alpha\eta)|_{\alpha=0}$$

即

$$\delta_\Lambda J(\Lambda,\eta)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}[(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i})\Delta\bar{\sigma}_{ij}+(\Delta\bar{u}_{j,i}+\Delta\bar{u}_{i,j})\Delta\sigma_{ij}]d\Omega$$
$$-\int_{\Omega}R_i\Delta u_i d\Omega+\int_{\Omega}C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}d\Omega-\int_{\Omega}D_{ij}(\Delta\varepsilon_{ij}\boldsymbol{T}+T\Delta\bar{\varepsilon}_{ij})d\Omega$$
$$-\int_{\Omega}(B_{ij}\dot{T}-D_{ij}T_{k-1})\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}d\Omega-\frac{\Delta t}{T_0}k\int_{\Omega}\boldsymbol{T}_{,i}T_{,i}d\Omega+\frac{\Delta t}{T_0}\int_{\Omega}(G\dot{T}-\sigma_{ij}\dot{e}^{p}_{ij})\boldsymbol{T}d\Omega$$
$$-\int_{\Omega}(\Delta\varepsilon_{ij}\Delta\bar{\sigma}_{ij}+\Delta\sigma_{ij}\Delta\bar{\varepsilon}_{ij})d\Omega+\int_{\partial\Omega_u}\Delta\hat{u}_i\Delta\bar{F}_i dS+\int_{\partial\Omega_\sigma}\Delta\hat{F}_i\Delta\bar{u}_i dS$$
$$-\int_{\partial\Omega_u}(\Delta\bar{u}_i\Delta F_i+\Delta u_i\Delta\bar{F}_i)dS-\frac{\Delta t}{T_0}h\int_{\Gamma}T\boldsymbol{T}dS+\frac{\Delta t}{T_0}h\int_{\Gamma}T_f\boldsymbol{T}dS$$

利用散度定理，可得

$$\delta_\Lambda J(\Lambda,\eta)=-\int_{\Omega}(\Delta\sigma_{ij,j}+R_i)\Delta\bar{u}_i d\Omega+\int_{\Omega}\left[\frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i})-\Delta e_{ij}\right]\Delta\bar{\sigma}_{ij}d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}(C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}-\Delta\sigma_{ij}-D_{ij}\Delta T-B_{ij}\dot{T})\Delta\bar{\varepsilon}_{ij}d\Omega+\int_{\partial\Omega_u}(\Delta\hat{u}_i-\Delta u_i)\Delta\bar{F}_i dS$$

$$+\int_{\partial\Omega_\sigma}(\Delta F_i-\Delta\hat{F}_i)\Delta\bar{u}_i dS+\int_{\Omega}\Big(k\frac{\Delta t}{T_0}T_{,kk}-D_{ij}\Delta\varepsilon_{ij}-\frac{\Delta t}{T_0}G\dot{T}$$

$$+\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij}\frac{\Delta t}{T_0}\Big)Td\Omega-\int_{\Gamma}\frac{\Delta t}{T_0}\Big(k\frac{\partial T}{\partial n}+hT-hT_f\Big)TdS$$

令 $\delta_\Lambda J(\Lambda,\eta)=0$，得方程(2.1)～(2.7)。因此，在不对 $\dot{T}$，$\Delta\dot{u}_i$ 变分的条件下，此泛函的临界点必是方程(2.1)～(2.7)的解。为方便，泛函 $J(\Lambda)$ 也可写为：

$$J(\Lambda)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}C_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega-\int_{\partial\Omega_\sigma}(\Delta\hat{F}_i)\Delta u_i dS-\int_{\Omega}D_{ij}T\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega$$

$$-\int_{\Omega}(B_{ij}\dot{T}-D_{ij}T_{k-1})\Delta\varepsilon_{ij}d\Omega-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{T_0}k\int_{\Omega}T_{,i}T_{,i}d\Omega-\frac{\Delta t}{T_0}\int_{\Omega}(G\dot{T}-\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}^p_{ij})Td\Omega$$

$$-\frac{\Delta t}{T_0}h\int_{\Gamma}\Big(\frac{1}{2}T^2-TT_f\Big)dS-\int_{\Omega}R_i\Delta u_i d\Omega \tag{4.1}$$

式(4.1)表示了热弹塑性耦合问题的泛函，用有限元法计算时，可用 Δu 和 T 的有限模式代入此泛函，分别对 Δu 和 T 变分，即可得到两组有限元基本方程。

参 考 文 献

[1] Rysinko, K.N. and E.I. Blinov, Analytical description of the thermoelastoplastic deformation of a solid, *Sov. Appl. Mech.*, 17, 11 (1981); 985—989.

[2] 杜庆华等编，《弹性力学》，科学出版社 (1986).

[3] Wang Hong-gang, The functional and variational theorem in non-linear heat conduction, *ICNM*, Shanghai (1985).

[4] 程赫明、王洪纲，塑性和热弹塑性动力问题的增量泛函及其变分原理，全国第二届计算力学会议论文，上海 (1986, 8).

[5] Oden, J.T. and J.N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, second edition, Berlin Heidelberg, New York (1983).

The Functional and Its Variational Principle in Coupled Thermo-Elastoplasticity

Cheng He-ming Wang Hong-gang

(Kunming Institute of Technology, Kunming)

Abstract

In order to solve the coupled thermoelastoplastic problems by the finite element method, it is necessary to establish suitable functional. In this paper, based on the thermoelastoplastic constitutive relation proposed by K.N. Rysinko and E.I. Blinov[1], the functional of coupled thermoelastoplasticity is derived by means of the nonlinear functional analysis theory.