应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

# 哈密顿-雅可比方法对非线性非完整系统的适用性*

Q·K·戈里　　纳赛尔·艾赫默德

(巴基斯坦古艾德·艾·亚赞大学数学系，1987 年 10月15日收到)

**摘　要**

本文用庞加莱 (Poincaré) 形式将哈密顿-雅可比方法 (Hamilton-Jacobi method) 推广到具有非线性非完整约束的动力系统的运动情况. 研究了本方法对该系统推广的必要条件和充分条件. 并用非完整系统的某些具体实例进行了说明.

## 一、前　　言

考虑带有独立坐标$x_1,\cdots,x_n$的动力系统，其动能为$T$，力函数为$U$. 设系统受有$(n-m)$个如下形式的非线性非完整约束:

$$f_a(x_p,\ \eta_p,\ t)=0,\qquad p=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ a=m+1,\ \cdots,\ n \tag{1.1}$$

其中，$\eta_1,\ \cdots,\ \eta_n$为庞加莱参数. 如果在一个虚位移中独立参数$\omega_1,\cdots,\omega_n$满足关系[1]

$$\frac{\partial f_a}{\partial \eta_p}\omega_p=0 \tag{1.2}$$

则系统的运动可由下式确定[3]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_p}-C_{0p}^{q}\frac{\partial T}{\partial \eta_q}-C_{qp}^{r}\eta_q\frac{\partial T}{\partial \eta_r}-X_p(T+U)=\mu_a\frac{\partial f_a}{\partial \eta_p} \tag{1.3}$$

$$(p,q,r=1,\ 2,\cdots,n;\ a=m+1,\cdots,n)$$

式中，$\mu_1,\cdots,\mu_n$为待定乘子且重复指标表示求和. 无穷小位移算子

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t}+\xi_0^q(x_p,t)\frac{\partial}{\partial x_q},\quad X_p=\xi_p^q(x_r,t)\frac{\partial}{\partial x_q}$$

构成一个群，它们服从如下变换关系

$$(X_0,\ X_p)=C_{0p}^{q}X_q,\qquad (X_p,\ X_q)=C_{pq}^{r}X_r$$

上式定义分量$C_{0p}^{q}$，$C_{pq}^{r}$为$x$和$t$的函数.

在导得的方程 (1.3) 中，系统的实 (虚) 位移的任意函数$G(x_p,t)$的变分$dG(\delta G)$由下

* 王志忠推荐.
本文原文为英文，由吴承平、韦凌德译为中文，王志忠校.

式定义:

$$dG=[X_0G+\omega_p X_p G dt] \qquad (\delta G=\omega_p X_p G) \tag{1.4}$$

借助(1.4)，方程（1.3）可以变换为标准型[4]:

$$\eta_p=\frac{\partial H}{\partial y_p}, \quad \dot{y}_p=-X_pH+C^{q}_{0p}y_q+C^{r}_{qp}\eta_q y_r+\mu_a\frac{\partial f_a}{\partial \eta_p} \tag{1.5}$$

这里的新变量$y_p$由下式给出

$$y_p=\frac{\partial T}{\partial \eta_p} \tag{1.6}$$

且$H(x_p, y_p, t)$为哈密顿函数，定义为

$$H(x_p, y_p, t)=y_p\eta_p-(T+U) \tag{1.7}$$

本文的目的就是给出哈密顿-雅可比方法的公式表示，以便于解决具有约束（1.1）的非线性非完整系统的运动方程（1.5）的积分问题。在最近发表的论文[6～8]中，Van Dooren用拉格朗日坐标研究了广义速度下当非线性非完整约束方程为齐次的情况。然而，他的哈密顿-雅可比方法的推广只有在某些条件下才是有效的。这些条件 Rumyantsev和Sumbatov 在文献[5]中已有讨论。新近，Ghori[2]用庞加莱形式对具有线性非完整约束的动力系统讨论了这一问题。本文将用庞加莱参数，对非完整约束方程既非线性又非齐次的情况，继续这一工作。

## 二、哈密顿-雅可比方法

我们考虑变上限的哈密顿作用函数，即

$$S=\int_{t_0}^{t}L(x_p, \eta_p, t)dt \tag{2.1}$$

这里，$L=T+U$为动力系统的拉格朗日函数。考虑到关系式(1.7)，泛函（2.1）变为

$$S=\int_{t_0}^{t}[y_p\eta_p-H(x_p, y_p, t)]dt \tag{2.2}$$

对（2.2）$\delta$-变分，我们可得

$$\delta S=\int_{t_0}^{t}\left(y_p\delta\eta_p+\eta_p\delta y_p-\omega_p X_p H-\frac{\partial H}{\partial y_p}\delta y_p\right)dt$$

我们知道[3]$\delta\eta_p$满足关系

$$\delta\eta_p=\frac{d\omega_p}{dt}+C^{p}_{0q}\omega_q+C^{p}_{qr}\omega_r\eta_q \tag{2.3}$$

考虑到方程(1.2)，(1.5)和(2.3)，得

$$\delta S=\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt}(y_p\eta_p)dt$$

从而

$$\delta S=y_p\omega_p-y_p^0\omega_p^0 \tag{2.4}$$

这里，$y_p^0$，$\omega_p^0$为当$x_p$值取$a_p$且对应的算子$X_p$为$A_p$时，在初始时间$t_0$的$y_p$，$\omega_p$值。

关系式(2.4)表明，$S$是$x_p$，$t$及其初值$a_p$，$t_0$的函数，因而可写作

$$S=S(x_p, a_p, t, t_0) \tag{2.5}$$

我们有

$$\delta S=\omega_\gamma X_\gamma S+\omega_\gamma^0 A_\gamma S=\omega_\gamma y_\gamma-\omega_\gamma^0 y_\gamma^0 \tag{2.6}$$

因为约束方程（1.2）适用整个运动，在初瞬时 $t_0$，我们有

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_\gamma}\right)^0 \omega_\gamma^0=0 \tag{2.7}$$

这里$(\partial f_\alpha/\partial\eta_\gamma)^0$表示在时间$t_0$的（$\partial f_\alpha/\partial\eta_\gamma$）值。应用待定乘子法，对乘子$\lambda_{m+1},\cdots,\lambda_n$及其初值$\lambda_{m+1}^0$，…，$\lambda_n^0$，关系式（2.6）以及（1.2）和（2.7）给出

$$X_\gamma S=y_\gamma+\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_\gamma} \tag{2.8}$$

$$A_\gamma S=-\left[y_\gamma^0+\lambda_\alpha^0\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_\gamma}\right)^0\right]=\text{const}=b_\gamma \tag{2.9}$$

由方程（1.1），（1.6）和(2.8)，我们可以确定 $\lambda_\alpha$ 为分量$X_\gamma S$，$x_\gamma$和 $t$ 的函数：

$$\lambda_\alpha=\lambda_\alpha(X_\gamma S,\ x_\gamma,\ t) \tag{2.10}$$

把（2.10）代入(2.9)，我们可以得到一个方程组，通过 $X_\gamma S$，$x_q$ 和 $t$ 就可从方程组中解出变量$y_\gamma$。因此

$$y_\gamma=y_\gamma(X_q S,\ x_q,\ t) \tag{2.11}$$

(2.2)式对时间 $t$ 求导，得

$$\frac{dS}{dt}=y_\gamma\eta_\gamma-H(x_\gamma,\ y_\gamma,\ t)$$

考虑到(2.8)，上式可变为

$$\frac{dS}{dt}=\eta_\gamma X_\gamma S-\lambda_\alpha\eta_\gamma\frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_\gamma}-H(x_\gamma,\ y_\gamma,\ t) \tag{2.12}$$

另一方面，我们有

$$\frac{dS}{dt}=X_0 S+\eta_\gamma X_\gamma S \tag{2.13}$$

因此，由（2.12）和（2.13）

$$X_0 S+\lambda_\alpha\eta_\gamma\frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_\gamma}+H(x_\gamma,\ y_\gamma,\ t)=0$$

将（2.11）中$y_\gamma$代入上式，可导得

$$X_0 S+\lambda_\alpha\eta_\gamma\frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_\gamma}+H[x_\gamma,\ y_\gamma(X_q S,\ x_q,\ t),\ t]=0 \tag{2.14}$$

这就是关于具有非线性非完整约束（1.1）的非完整系统（1.5）的运动的广义哈密顿-雅可比方程。

在特殊情况下，当约束方程（1.1）对 $\eta_\gamma$ 是线性的，则方程（2.14）可简化为 Q. K. Ghori在[2]中给出的方程。因此，当$x$为拉格朗日坐标，且$\eta_\gamma=\dot{x}_\gamma$，则$X_0$和$X_\gamma$简化为$\partial/\partial t$和$\partial/\partial x_\gamma$；$C_{0\gamma}^q$，$C_{q\gamma}^r$全为零，且方程（1.5），（2.8），（2.9）和（2.14）包含了 Van Dooren 在[8]中以及Rumyantsov 和 Sumbatov 在[5]中得到非线性约束是 $\dot{x}_\gamma$ 齐次的情况的结果。

下面我们将根据Van Dooren的[6, 8]，对非线性非完整系统构造广义哈密顿-雅可比方法。

如果包含 $n$ 个任意常数$a_\gamma$的 $S=S(x_\gamma,\ a_\gamma,\ t)$是方程（2.14）的完全积分，则具有约束(1.1)的非完整系统的运动可从（2.9）式解得$x_\gamma$来决定而$y_\gamma$由（2.11）确定，$b_\gamma$ 为 $n$ 个更加

任意的常数。

结果我们发现这一作法并不正确。事实上，当且仅当某些条件被满足时，式（2.9）和（2.11）表示具有约束（1.1）的方程（1.5）的积分。

## 三、广义哈密顿-雅可比方法的适用性

为了寻求哈密顿-雅可比方法的有效条件，宜从庞加莱方程（1.3）开始：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\eta_p}-C^q_{0p}\frac{\partial T}{\partial\eta_p}-C^r_{qp}\eta_q\frac{\partial T}{\partial\eta_r}-X_p(T+U)=\mu_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\eta_p}\tag{1.3}$$

这里，$T=T_2+T_1+T_0$为约束-自由系统的动能，$U$为力函数；$T_2$，$T_1$和$T_0$分别表示$\eta$的二次、一次和零次形。并且$U$对$\eta$是独立的。

如文[4]所示，方程（1.3）以及约束（1.1）决定$\mu_\alpha$为$\eta$，$x$和时间$t$的函数。因此，变换（1.6）的可逆性意味着方程（1.5）和（1.3）的等价性。

我们设

$$\theta_p=y_p+\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial\eta_p}\tag{3.1}$$

解这些关系式，我们可将$\eta_p$表示为$\lambda_\alpha$，$\theta_q$，$x_q$和时间$t$的函数。约束方程（1.1）替换后所得到的关于$\eta_p$的表达式，可导得$(n-m)$个方程的方程组，其中$\lambda_\alpha$是用变量$\theta_q$，$x_q$和$t$表示的。再代入$\eta_p$的表达式中，可得

$$\eta_p=\eta_p(\theta_q,\ x_q,\ t)\tag{3.2}$$

约束方程（1.1）表明，关系式（3.2）是函数相关的。因此从$\theta_q$到$\eta_p$的变换是不可逆的。

从（2.8）和（3.1）可得到

$$\theta_p=X_pS\tag{3.3}$$

注意到哈密顿-雅可比方程（2.14）中的函数$H$可取如下形式：

$$H=T_2-T_0-U=\widetilde{H}(x_q,\ \theta_q,\ t)\tag{3.4}$$

这里我们应用关于齐次函数的欧拉定理，并将（3.2）和（3.3）中的$\eta_p$和$X_pS$代入$T_2$。现在我们来证明如下结果：

**如果**

$$S=S(x_p,\ \theta_p,\ t)\tag{3.5}$$

**是方程（2.14）的完全积分，并且变量$x_p$和$\theta_p$由（2.9）和（3.3）定义，则标准方程组**

$$\eta_p=\frac{\partial\widetilde{H}}{\partial\theta_p}+\frac{\partial}{\partial\theta_p}\left(\lambda_\alpha\eta_r\frac{\partial f_\alpha}{\partial\eta_r}\right)\tag{3.6}$$

$$\dot{\theta}_p=-X_p\widetilde{H}+C^q_{0p}\theta_q+C^r_{qp}\eta_q\theta_r-X_p\left(\lambda_\alpha\eta_r\frac{\partial f_\alpha}{\partial\eta_r}\right)\tag{3.7}$$

**成立。**

为证明这一结果，我们把（2.9）式对时间$t$求导，得

$$X_0A_qS+\eta_pX_pX_qS=0\tag{3.8}$$

假定我们把完全积分（3.5）代入（2.14）得到一个恒等式。再将算子$A_q$作用于这个恒等式

和（3.3）式，得：

$$A_q X_0 S+\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta_p} A_q X_p S+\frac{\partial}{\partial \theta_p}\left(\lambda_\alpha \eta_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_r}\right) A_q X_p S=0 \tag{3.9}$$

因为

$$(X_0,\ A_q)=0, \quad (X_p,\ A_q)=0$$

而$\det\|A_q X_p S\| \neq 0$，则方程（3.8）和（3.9）导得了(3.6)。

再由（3.3）对时间$t$求导得：

$$\dot{\theta}_p=X_0 X_p S+\eta_q X_q X_p S \tag{3.10}$$

将算子$X_p$作用（2.14）并利用（3.3）得

$$X_p X_0 S+X_p \widetilde{H}+X_p\left(\lambda_\alpha \eta_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial \theta_r}\right)+\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial \theta_q} X_p X_q S+\frac{\partial}{\partial \theta_q}\left(\lambda_\alpha \eta_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_r}\right) X_p X_q S=0 \tag{3.11}$$

由(3.6)，(3.10)和（3.11）可得

$$\dot{\theta}_p=-X_p \widetilde{H}+(X_0,\ X_p) S+\eta_q(X_q,\ X_p) S-X_p\left(\lambda_\alpha \eta_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_r}\right)$$

鉴于变换关系和(3.3)，以上结果就导得了(3.7)。定理证毕。

上述结果表明，如果具有非线性非完整约束（1.1）的系统的运动由求解关于$x_p$的方程组（2.9）而得，则标准方程组（3.6）和（3.7）就相当于(1.3)，反之亦然。

在讨论哈密顿-雅可比定理的适用条件以前，宜先证明如下恒等式：

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \eta_p}-C_{0p}^q \frac{\partial T}{\partial \eta_q}-C_{qp}^r \eta_q \frac{\partial T}{\partial \eta_r}-X_p(T+U) \\
&\quad=\lambda_\alpha\left[\left(C_{0p}^r+C_{qp}^r \eta_q-X_p|_\theta \eta_r\right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_r}-\frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_q}\right]-\dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_p}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

这里，记号$X_p|_\theta$系指运算$X_p$时$\theta_p$保持不变。类似的含意也适用于$X_p|_\eta$。

为建立这一恒等式，我们用关系式（3.1）对时间$t$求导并利用方程(3.8)，则

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \eta_p}+\dot{\lambda}_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_p}+\lambda_\alpha \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_p}=-X_p \widetilde{H}+C_{0p}^q \theta_q+C_{qp}^r \eta_q \theta_r-X_p\left(\lambda_\alpha \eta_r \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_r}\right) \tag{3.13}$$

我们还有

$$X_p|_\theta T_2=X_p|_\eta T_2+\frac{\partial T_2}{\partial \eta_q} X_p|_\theta \eta_q \tag{3.14}$$

$$X_p|_\theta T_1=X_p|_\eta T_1+\frac{\partial T_1}{\partial \eta_q} X_p|_\theta \eta_q \tag{3.15}$$

和

$$\eta_q X_p\left(\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_q}\right)=X_p|_\theta\left(\lambda_\alpha \eta_q \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_q}\right)-\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_q} X_p|_\theta \eta_q \tag{3.16}$$

由（3.1）可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_2}{\partial \eta_q} X_p|_\theta \eta_q&=\left(\theta_q-\frac{\partial T_1}{\partial \eta_q}-\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_q}\right) X_p|_\theta \eta_q \\
&=X_p|_\theta(\theta_q \eta_q)-\left(\frac{\partial T_1}{\partial \eta_q}+\lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \eta_q}\right) X_p|_\theta \eta_q
\end{aligned}$$

$$=X_p|_\theta\left(\eta_q\frac{\partial T}{\partial\eta_q}+\lambda_a\eta_q\frac{\partial f_a}{\partial\eta_q}\right)-\left(\frac{\partial T_1}{\partial\eta_q}+\lambda_a\frac{\partial f_a}{\partial\eta_q}\right)X_p|_\theta\eta_q$$

由齐次函数的欧拉定理，有

$$\eta_q\frac{\partial T}{\partial\eta_q}=2T_2+T_1$$

因此关系式(3.14)到（3.16）给出

$$\frac{\partial T_2}{\partial\eta_q}X_p|_\theta\eta_q=-\left[2X_p|_\theta T_2+X_p|_\eta T_1+\eta_q X_p|_\theta\left(\lambda_a\frac{\partial f_a}{\partial\eta_q}\right)\right]\tag{3.17}$$

由（3.4）我们有

$$X_p|_\theta\tilde{H}=X_p|_\theta T_2-X_p(T+U)$$

鉴于（3.14），（3.16）和（3.17）上式变为

$$X_p|_\theta\tilde{H}=-(X_p|_\eta T+X_pU)\tag{3.18}$$

如果把（3.18）代入（3.17）并利用关系式(3.1)，就可以得到恒等式(3.12)。

我们现在来证明下面的定理。

**定理1　在非完整约束（1.1）的情况下，方程（3.6）和（3.7）的解也即是方程(1.3)的解，当且仅当满足如下关系时：**

$$\lambda_a\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial f_a}{\partial\eta_p}-(C_{0p}^r+C_{qp}^r\eta_q-X_p|_\theta\eta_r)\frac{\partial f_a}{\partial\eta_r}\right]\omega_p=0\tag{3.19}$$

设方程（3.6）和（3.7）的解也满足方程(1.3)，则恒等式（3.12）就意味着

$$(\mu_a+\dot{\lambda}_a)\frac{\partial f_a}{\partial\eta_p}+\lambda_a\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial f_a}{\partial\eta_p}-(C_{0p}^r+C_{qp}^r\eta_q-X_p|_\theta\eta_r)\frac{\partial f_a}{\partial\eta_r}\right]=0\tag{3.20}$$

借助(1.2)，上面的结果即可导得关系(3.19)，这表明条件（3.19）是必要的。

再设方程（3.6）和（3.7）的解满足关系式(3.19)，则由（3.12）和（1.2）可得

$$\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\eta_p}-C_{0p}^q\frac{\partial T}{\partial\eta_q}-C_{qp}^r\eta_q\frac{\partial T}{\partial\eta_r}-X_p(T+U)\right]\omega_p=0$$

由于$\omega$并非任意的且满足关系式(1.2)，因而我们用待定乘子法立刻可以给出方程（1.3）。这说明条件（3.19）也是充分的。

定理 1 表明，广义哈密顿-雅可比方法可适用于具有约束（1.1）的运动方程（1.5），当且仅当方程（3.6）和（3.7）的一般解满足关系式(3.19)；否则由（2.9）所得的函数$x_p$就不能求出具有约束（1.1）的方程（1.5）的一般解。因此，在某些情况下，如果这些函数满足其常数$a_p$，$b_p$假定为特殊值的(3.19)，就能构造具有约束（1.1）的运动方程（1.5）的特殊解。

依据约束（1.1）的状况，下面将讨论几个特殊情况。

当表述非线性非完整约束的方程（1.1）是$\eta$的$k_a$次齐次时，则齐次函数的欧拉定理得出

$$\eta_p\frac{\partial f_a}{\partial\eta_p}=k_{(a)}f_a=0\tag{3.21}$$

式中角标（$a$）并非指对$a$求和。此时哈密顿-雅可比方程（2.14）变为

$$X_0S+H[x_p,\ y_p(X_qS,\ x_q,\ t),\ t]=0\tag{3.22}$$

而其它方程，即(1.3)，(1.5)，(2.8)，(2.9)和(3.1)～(3.4)仍然不变。标准方程(3.6)和(3.7)则简化为

$$\eta_p = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_q} \tag{3.23}$$

$$\dot{\theta}_p = -X_p \tilde{H} + C^q_{0p}\theta_q + C^r_{qp}\eta_q\theta_r \tag{3.24}$$

并且哈密顿-雅可比方法的适用条件据(3.19)假设为

$$\lambda_a\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial f_a}{\partial \eta_p} - (C^r_{0p} + C^r_{qp}\eta_q + X_p|_\theta)\frac{\partial f_a}{\partial \eta_r}\right]\omega_p = 0 \tag{3.25}$$

上式是如下关系的结果

$$(\partial f_a/\partial \eta_r)X_p|_\theta \eta_r = -\eta_r X_p|_\theta(\partial f_a/\partial \eta_r)$$

如果$\eta$的非完整约束(1.1)是线性的，即

$$f_a = g_{ap}\eta_p + g_{a0} = 0 \tag{3.26}$$

其中$g_{ap}$，$g_{a0}$为$x$和时间$t$的函数，则$\omega_p$满足关系

$$g_{ap}\omega_p = 0 \tag{3.27}$$

我们又得到了[2]中的结果。

当约束方程关于$\dot{x}$是齐次的，把上述结果用$\eta_p = \dot{x}_p$的拉格朗日形式，我们的这一研究又能很快得出文献[5]中的结果。

## 四、乘子$\mu_a$和$\lambda_a$的关系

在前几节的结果中，已包含有乘子$\mu_a$和$\lambda_a$。这些乘子并不是独立的。事实上，如果我们取最后的$(n-m)$个方程(3.20)可得

$$(\mu_a + \dot{\lambda}_a)\frac{\partial f_a}{\partial \eta_\beta} + \lambda_a\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial f_a}{\partial \eta_\beta} - (C^r_{0\beta} + C^r_{q\beta}\eta_q - X_\beta|_\theta \eta_r)\frac{\partial f_a}{\partial \eta_r}\right] = 0 \tag{4.1}$$

在约束方程(1.1)为形如

$$f_a = \eta_a - \psi_a(x_p,\ \eta_j,\ t) = 0, \qquad j = 1,\ 2,\cdots,m \tag{4.2}$$

的齐次情况下，关系式(4.1)简化为

$$\mu_\beta + \dot{\lambda}_\beta + \lambda_a\left[(C^k_{0\beta} + C^k_{q\beta}\eta_q + \eta_k X_\beta|_\theta)\frac{\partial \psi_a}{\partial \eta_k} - (C^a_{0\beta} + C^a_{q\beta}\eta_q)\right] = 0$$

$$(k = 1,\ 2,\cdots,m_j;\ a,\ \beta = m+1,\cdots,n) \tag{4.3}$$

当约束方程(1.1)是$\eta$的$k_a$次齐次时，关系式(4.1)又变为

$$(\mu_a + \dot{\lambda}_a)\frac{\partial f_a}{\partial \eta_\beta} + \lambda_a\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial f_a}{\partial \eta_\beta} - (C^r_{0\beta} + C^r_{q\beta}\eta_q + X_\beta|_\theta)\frac{\partial f_a}{\partial \eta_r}\right] = 0 \tag{4.4}$$

而关系式(4.3)则取如下形式：

$$\mu_\beta + \lambda_\beta + \lambda_a\left[(C^k_{0\beta} + C^k_{q\beta}\eta_q + \eta_k X_\beta|_\theta)\frac{\partial \psi_a}{\partial \eta_k} - (C^a_{0\beta} + C^a_{q\beta}\eta_q)\right] = 0 \tag{4.5}$$

在约束方程形如(4.2)的情况下，假定$X_\beta\psi_a = 0$且算子$X_{m+1},\cdots,X_n$是循环的，以使$(X_q,X_a) = 0$，$X_a H = 0$。则(4.5)给出的$\mu_a$和$\lambda_a$的关系简化为

$$\mu_\beta + \dot{\lambda}_\beta + \lambda_a\left(C^k_{0\beta}\frac{\partial \psi_a}{\partial \eta_\beta} - C^a_{0\beta}\right) = 0 \tag{4.6}$$

如果我们考虑$\eta_\gamma=\dot{x}_\gamma$的拉格朗日形式，则我们的结果就与已知的结果相同，即

$$\mu_\beta+\dot{\lambda}_\beta+\lambda_\alpha\dot{x}_k\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big|_\theta\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial\dot{x}_k}=0$$

和

$$\mu_\beta+\dot{\lambda}_\beta=0$$

## 五、应　　用

**例1**　考虑重力场中质量为$m$的质点的阿佩耳（Appell）例子，其任意时间的位置由柱极坐标（$r$，$\theta$，$z$）规定，其运动受到下式所表示的非线性非完整约束

$$f=a^2(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-\dot{z}^2=0$$

的作用，式中$a$为常数。

质点的拉格朗日函数为

$$L=\frac{m}{2}\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2-mgz$$

这里我们选择

$$x_1=r,\ x_2=\theta,\ x_3=z$$

并且庞加莱参数取为

$$\eta_1=\dot{r},\ \eta_2=r\dot{\theta},\ \eta_3=\dot{z} \tag{5.1}$$

则位移算子为

$$X_0=\partial/\partial t,\ X_1=\partial/\partial r,\ X_2=(1/r)(\partial/\partial\theta),\ X_3=\partial/\partial z \tag{5.2}$$

非零的$C^r_{s\gamma}$为

$$C^2_{12}=-C^2_{21}=-1/r \tag{5.3}$$

约束方程变为

$$f=a^2(\eta_1^2+\eta_2^2)-\eta_3^2=0 \tag{5.4}$$

上式等价于

$$f=\eta_3-\psi(\eta_1,\ \eta_2)=0 \tag{5.5}$$

其中

$$\psi=a(\eta_1^2+\eta_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

方程（5.5）是（4.2）型的，因此由关系式（1.2）可得

$$\omega_3=a(\eta_1\omega_1+\eta_2\omega_2)/\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}$$

拉格朗日函数$L$为

$$L=\frac{m}{2}(\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2)-mgz$$

于是

$$y_1=m\eta_1,\qquad y_2=m\eta_2,\qquad y_3=m\eta_3$$

由（3.1）有

$$\theta_1=(m-a^2\lambda)\eta_1/\eta_3,\ \theta_2=(m-a^2\lambda)\eta_2/\eta_3,\ \theta_3=m\eta_3+\lambda \tag{5.6}$$

得出

$$\eta_1,\ \eta_2=\frac{\theta_1(\theta_3-\lambda),\ \theta_2(\theta_3-\lambda)}{m[\theta_3-\lambda(1+a^2)]},\ \eta_3=(\theta_3-\lambda)/m \tag{5.7}$$

由（5.5）和（5.7）可知

$$\lambda=\frac{m}{2a}[a\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}-\varepsilon\theta_3]/[\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}+\varepsilon a\theta_3] \tag{5.8}$$

式中$\varepsilon=\pm 1$。

由于$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1\neq 0$，由条件（3.25）可得

$$\eta_1\dot{\eta}_2-\eta_2\dot{\eta}_1=0 \tag{5.9}$$

上式等价于

$$\theta_1\dot{\theta}_2-\theta_2\dot{\theta}_1=0 \tag{5.10}$$

在这种情况下，庞加莱方程（1.3）为

$$m\dot{\eta}_1=\frac{-\mu a\eta_1}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}},\quad m\dot{\eta}_2=\frac{-\mu a\eta_2}{\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2}},\quad m\dot{\eta}_3=mg+\mu \tag{5.11}$$

从（5.7）和（5.8）可得

$$\eta_1,\ \eta_2=\frac{\theta_1[\varepsilon a\theta_3+\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}],\ \theta_2[\varepsilon a\theta_3+\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}]}{m(1+a^2)\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}},\quad m\eta_3=\frac{a[\varepsilon a\theta_3+\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}]}{m+(1+a^2)} \tag{5.12}$$

用$\theta$表达的哈密顿函数由下式给出：

$$\widetilde{H}=mgz+[\varepsilon a\theta_3+\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}]/[2m(1+a^2)] \tag{5.13}$$

在当前情况，方程（3.23）不能给出额外结果，然而方程（3.24）导得：

$$\dot{\theta}_1=0,\ \dot{\theta}_2=0,\ \dot{\theta}_3=-mg \tag{5.14}$$

它们有解

$$\theta_1=c_1,\quad \theta_2=c_2,\quad \theta_3=-mgt+c_3 \tag{5.15}$$

其中$c_1$，$c_2$和$c_3$为任意常数。

注意到方程（5.14）的一般解(5.15)满足相容性条件(5.10)，并且根据定理 1，(5.15)也是方程（5.11）的解。因此，广义哈密顿-雅可比方法适合于所研究的问题。

在目前情况下，哈密顿-雅可比方程（3.22）为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\left[\varepsilon a\frac{\partial S}{\partial z}+\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)}\right]^2\bigg/\left[2m(1+a^2)+mgz\right]=0 \tag{5.16}$$

记

$$S=-a_3t+a_2\theta+F(r,\ z) \tag{5.17}$$

其中$a_2$，$a_3$为任意常数，$F$为待定义的函数，$F$满足方程

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2+\frac{a_2^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\varepsilon[2m(1+a^2)(a_3-mgz)]^{\frac{1}{2}}-\varepsilon a\frac{\partial F}{\partial z}$$

设

$$F(r,\ z)=F_1(r)+F_2(z) \tag{5.18}$$

使上述方程变为

$$\left[\left(\frac{dF_1}{dr}\right)^2+\frac{a_2^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\varepsilon[2m(1+a^2)(a_3-mgz)]^{\frac{1}{2}}-\varepsilon a\frac{dF_2}{dz}$$

因此有

$$\left[\left(\frac{dF_1}{dr}\right)^2+\frac{a_2^2}{r^2}\right]^{\frac{1}{2}}=a_1$$

和

$$\varepsilon[2m(1+a^2)(a_3-mgz)]^{\frac{1}{2}}-\varepsilon a\frac{dF_2}{dz}=a_1$$

其中$a_1$为正常数。由此得出

$$F_1=\varepsilon\int r^{-1}(a_1^2r^2-a_2^2)^{\frac{1}{2}}dr \tag{5.19}$$

和

$$F_2=\varepsilon a^{-1}\int\{-a_1+\varepsilon[2m(1+a^2)(a_3-mgz)]\}^{\frac{1}{2}}dz \tag{5.20}$$

因此，考虑到(5.18)～(5.20)，完全积分（5.17）变为

$$S=-a_3t+a_2\theta+\varepsilon\int\frac{(a_1^2r^2-a_2^2)^{\frac{1}{2}}}{r}dr$$

$$+\frac{\varepsilon}{a}\int\{-a_1+\varepsilon[2m(1+a^2)(a_3-mgz)]\}^{\frac{1}{2}}dz \tag{5.21}$$

设$a_1$，$a_2$，$a_3$和$\dot{r}_0$，$\dot{\theta}_0$，$\dot{z}_0$为$r$，$\theta$，$z$，和$\dot{r}$，$\dot{\theta}$，$\dot{z}$在初始时间$t=t_0$的值。则$\eta$的初始值为

$$\eta_1^0=\dot{r}_0,\quad \eta_2^0=a_1\dot{\theta}_0,\quad \eta_3^0=\dot{z}_0 \tag{5.22}$$

令$A_1$，$A_2$，$A_3$为对应这些参数的算子，由（5.2）得到

$$A_1=\partial/\partial a_1,\quad A_2=(1/a_1)(\partial/\partial a_2),\quad A_3=\partial/\partial a_3 \tag{5.23}$$

方程（2.9）为

$$A_1S=b_1,\quad A_2S=b_2,\quad A_3S=b_3 \tag{5.24}$$

其中$b_1$，$b_2$，$b_3$为任意常数。(5.24)式的末式给出

$$z=a_3/mg-ga^2(t+b_3)^2/2(1+a^2) \tag{5.25}$$

利用(5.25)，(5.24)的第一和第二式给出

$$r=(a_2/a_1)^2+\{b_1+\varepsilon a^{-1}[a_3/mg-ga^2(t+b_3)^2/2(1+a^2)]\}^2$$

和

$$\theta=b_3+\varepsilon\tan^{-1}(a_1a_2^{-1})\left\{b_1+\varepsilon a^{-1}\left[\frac{a_3}{mg}-\frac{ga^2(t+b_3)^2}{2(1+a^2)}\right]\right\} \tag{5.26}$$

(5.24)～(5.26)式确定了问题的拉格朗日解。

借助于（5.21）和（5.23）我们有

$$\theta_1=\frac{\varepsilon\sqrt{a_1^2r^2-a_2^2}}{r},\quad \theta_2=\frac{a_2}{r},\quad \theta_3=\frac{\varepsilon}{a}[-a_1+\varepsilon\sqrt{2m(1+a^2)(a_3-mgz)}]$$

考虑到（5.15）有

$$\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}=\sqrt{c_1^2+c_2^2}=a_1,\quad \varepsilon a\theta_3+\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}=\varepsilon mag(t+b_3) \tag{5.27}$$

由（5.7）可得$y_1$，$y_2$，$y_3$的值

$$y_1,y_2=\frac{\theta_1[\varepsilon a\theta_3+\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}],\ \theta_2[\varepsilon a\theta_3+\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}]}{(1+a^2)\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}},\quad y_3=\frac{a[\varepsilon a\theta_3+\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}]}{1+a^2}$$

考虑到(5.27)，上式可变为

$$y_1,\ y_2=\frac{\varepsilon mac_1g(t+b_3),\ \varepsilon mac_2(t+b_3)}{(1+a^2)\sqrt{c_1^2+c_2^2}},\quad y_3=\frac{\varepsilon ma^2g(t+b_3)}{(1+a^2)} \tag{5.28}$$

式(5.24)～(5.26)以及(5.28)给出了问题的哈密顿解。

用(5.21)，(5.24)和(5.27)可求得乘子$\lambda$，即

$$\lambda=\varepsilon a_1(1+a^2)(t+b_3)^{-1}/2a^2g$$

利用$\lambda$的表达式，由关系式(4.6)给出

$$\mu=\varepsilon a_1(1+a^2)(t+b_3)^{-2}/2a^2g$$

上式定义了庞加莱方程的乘子$\mu$。

**例2** 在文[8]中，Van Dooren 讨论了位于重力场的平衡环中的导向陀螺问题的解。系统的拉格朗日函数为

$$L=\frac{1}{2}[(A_0-C_0\cos^2\theta)\dot{\phi}^2+B_0\dot{\theta}^2+A_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2]-V(\theta) \tag{5.29}$$

其中，

$$V=-M_0y_0g\sin\theta+g(M_0z_0+Ml)\cos\theta+\text{const} \tag{5.30}$$

且有关动能特性的控制定律假设为

$$f\equiv a^2[(A_0-C_0\cos^2\theta)\dot{\phi}^2+B_0\dot{\theta}^2]-A_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2=0 \tag{5.31}$$

其中，$a$，$A_0$，$A_3$，$B_0$，$C_0$，$l$，$M_0$，$M$，$y_0$，$z_0$均为常数。方程(5.31)表示加在系统上的非线性非完整约束。

取

$$x_1=\phi,\quad x_2=\theta,\quad x_3=\psi$$

和

$$\eta_1=(A_0-C_0\cos^2\theta)\phi,\quad \eta_2=B_0\dot{\theta},\quad \eta_3=A_3(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta) \tag{5.32}$$

得

$$X_1=\frac{1}{(A_0-C_0\cos^2\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}-\cos\theta\frac{\partial}{\partial\psi}\right],\quad X_2=\frac{1}{B_0}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad X_3=\frac{1}{A_3}\frac{\partial}{\partial\psi} \tag{5.33}$$

并得出非零$C^r_{\alpha\beta}$为：

$$C^1_{12}=-C^1_{21}=\frac{C_0\sin^2\theta}{B_0(A_0-C_0\cos^2\theta)},\quad C^3_{12}=-C^3_{21}\frac{-A_3\sin\theta}{B_0(A_0-C_0\cos^2\theta)} \tag{5.34}$$

利用(5.32)，系统的拉格朗日函数变为

$$L=\frac{1}{2}[\eta_1^2/(A_0-C_0\cos^2\theta)+\eta_2^2/B_0+\eta_3^2/A_3]-V(\theta) \tag{5.35}$$

且方程(5.31)变换为

$$f\equiv a^2[\eta_1^2/(A_0-C_0\cos^2\theta)+\eta_2^2/B_0]-\eta_3^2/A_3=0 \tag{5.36}$$

给出$\theta$的关系式(3.1)为

$$\theta_1=\frac{(1+2a^2\lambda)\eta_1}{A_0-C_0\cos^2\theta},\quad \theta_2=\frac{(1+2a^2\lambda)\eta_2}{B_0},\quad \theta_3=\frac{(1-2\lambda)\eta_3}{A_3} \tag{5.37}$$

于是有

$$\eta_1=\frac{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1}{1+2a^2\lambda},\quad \eta_2=\frac{B_0\theta_2}{1+2a^2\lambda},\quad \eta_3=\frac{A_3\theta_3}{1-2\lambda} \tag{5.38}$$

把$\eta$的这些值代入约束方程(5.36)，可求得

$$\lambda=[a\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}-\sqrt{A_3}\,\theta_3]/2aD \tag{5.39}$$

式中

$$D=\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)^2\theta_1^2+B_0\theta_2^2}+a\sqrt{A_3}\,\theta_3 \tag{5.40}$$

利用（5.39）和（5.40）可得用 $\theta$ 表示的 $\eta$:

$$\eta_1,\eta_2=\frac{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1 D,\ B_2\theta_2 D}{(1+a^2)\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}},\qquad \eta_3=\frac{a\sqrt{A_3}\,D}{1+a^2} \tag{5.41}$$

约束方程可写为

$$f=\eta_3-\psi(\theta,\ \eta_1,\ \eta_2)=0 \tag{5.42}$$

其中

$$\psi=a\sqrt{A_3}\,[\eta_1^2/(A_0-C_0\cos^2\theta)+\eta_2^2/B_0]^{\frac{1}{2}} \tag{5.43}$$

因此

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1},\ \frac{\partial\psi}{\partial\eta_2}=\frac{a\sqrt{A_3}\,\theta_1,\ a\sqrt{A_3}\,\theta_2}{\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}} \tag{5.44}$$

由庞加莱方程（1.3）可得出

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\eta_1}{A_0-C_0\cos^2\theta}\right]=\frac{1}{A_0-C_0\cos^2\theta}\left[\frac{\eta_2(\eta_3\sin\theta-C_0\eta_1\sin2\theta)}{B_0}-a^2A_3\frac{\eta_1}{\eta_3}\right] \tag{5.45}$$

$$\frac{d\eta_2}{dt}=\frac{-\eta_1\sin\theta}{A_0-C_0\cos^2\theta}[C_0\eta_1\cos\theta+\eta_3]+M_0y_0g\cos\theta$$

$$+g(M_0z_0+Ml)\sin\theta-\frac{\mu a^2A_3\eta_2}{\eta_3} \tag{5.46}$$

$$\frac{d\eta_3}{dt}=\mu A_3 \tag{5.47}$$

在此情况下，方程（3.25）变为

$$\lambda\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\eta_j}-\eta_kX_j|_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\eta_k}-\eta_q\left(C_{qj}^3-C_{qj}^k\frac{\partial\psi}{\partial\eta_k}\right)\right]=0$$

$$(j,\ k=1,\ 2;\ q=1,\ 2,\ 3)$$

但 $\lambda\neq0$，换句话说，根据关系式(4.6)，反作用力消失．因而

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\eta_j}-\eta_kX_j|_\theta\frac{\partial\psi}{\partial\eta_k}-\eta_q\left(C_{qj}^3-C_{qj}^k\frac{\partial\psi}{\partial\eta_k}\right)=0$$

利用（5.41）和(5.42)，得

$$\frac{d}{dt}[a\sqrt{A_3}\,\theta_1/\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}\,]$$

$$=\frac{\theta_2D\sin\theta[A_3\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}+2a\sqrt{A_3}\,C_0\theta_1\cos\theta]}{(1+a^2)(A_0-C_0\cos^2\theta)\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}} \tag{5.48}$$

和

$$\frac{d}{dt}[a\sqrt{A_3}\,\theta_2/\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}\,]$$

$$=\frac{\theta_1D\sin\theta\{a\sqrt{A_3}\,\theta_1[(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2+2C_0]-A_3[(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2]^{\frac{1}{2}}\}}{(1+a^2)[(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2]} \tag{5.49}$$

$\theta$ 表示的哈密顿函数为

$$\tilde{H}=\frac{D^2}{2(1+a^2)}[(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2]^2+V(\theta) \tag{5.50}$$

方程（3.23）由（5.41）给出，而方程（3.24）取为

$$\dot{\theta}_1=\frac{(A_3\theta_3-2C_0\theta_1\cos\theta)\theta_2 D\sin\theta}{(1+a^2)(A_0-C_0\cos^2\theta)\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_2=&A^*\sin\theta+B^*\cos\theta-C_0\theta_1^2[(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2]\sin2\theta/B_0(1+a^2)\\&-(A_3\theta_3-2C_0\theta_1\cos\theta)\theta_1 D\sin\theta/[B_0(1+a^2)\sqrt{(A_0-C_0\cos^2\theta)\theta_1^2+B_0\theta_2^2}]\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\dot{\theta}_3=0 \tag{5.53}$$

其中，　$A^*=M_0y_0g/B_0$，$B^*=g(M_0z_0+Ml)/B_0$

为校核可适用条件(3.25)，我们考虑关系式（5.38）的第三式并对时间 $t$ 求导。从而得到

$$\dot{\eta}_3(1-2\lambda)-2\eta_3\dot{\lambda}=A_3\dot{\theta}_3$$

将此结果代入(5.53)，得

$$\dot{\eta}_3=2\eta_3\dot{\lambda}/(1-2\lambda)$$

考虑到（4.6）式，上式变为

$$\dot{\eta}_3=2\eta_3\mu/(1-2\lambda)$$

将（5.39）中的$\lambda$和（5.41）中的$\eta_3$分别代入上式右端，可求得

$$\eta_3=\mu A_3(-2\theta_3)$$

既使应用条件（5.48）和(5.49)，此方程也不能化简为庞加莱方程(5.47)。由定理 1 知，广义哈密顿-雅可比方法不能用于这一问题所得到的解，因此 Van Dooren 在[8]中给出的解是不正确的。

## 参 考 文 献


[1] Ghori, Q. K., Virtual displacements of nonholonomic systems with arbitrary constraints, *Z. Angew. Math. Mech.*, **52** (1972), 123—124.

[2] Ghori, Q. K., Hamilton-Jacobi theorem in Poincaré-Chetaev variables, *Z. Angew. Math. Mech.* **66**, 10 (1986), 471—476.

[3] Chori, Q. K. and M. Hussain, Equations of motion of nonholonomic dynamical systems in Poincaré-Chetaev variables, *Z. Angew. Math. Mech.*, **54** (1974), 311—318.

[4] Ghori, Q. K. and M. Hussain, Generalization of Hamilton-Jacobi theorem, *Z. Angew. Math. Phys.*, **25** (1974), 536—540.

[5] Rumyantsev, V. V. and A. S. Sumbatov, On the problem of a generalization of the Hamilton-Jacobi method to nonholonomic systems, *Z. Angew. Math. Mech.*, **58**, 11 (1978), 477—481.

[6] Van Dooren, R., The generalized Hamilton-Jacobi method for nonholonomic dynamical systems of Chetaev's type, *Z. Angew. Math. Mech.*, **55**, 7/8 (1975), 407—411.

[7] Van Dooren, R., Motion of a rolling disc by a new generalized Hamilton-Jacobi method, *Z. Angew. Math. Phys.*, **27** (1976), 501—505.

[8] Van Dooren, R., Generalized method for nonholonomic systems with applications in

various fields of classical mechanics, *14th IUTAM Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Delft (1976), 373—391, North Holland Amsterdam (1977).

# Applicability of Hamilton-Jacobi Method to Nonlinear Nonholonomic Systems

Q. K. Chori Naseer Ahmed

(*Mathematics Department, Quaid-i-Azam University, Islamabad, Pakistan*)

## Abstract

This paper uses Poincaré formalism to obtain a generalization of the Hamilton-Jacobi method of integrating dynamical systems moving with nonlinear nonholonomic constraints. Necessary and sufficient conditions are investigated for the applicability of this method to such systems. The method is illustrated by considering some concrete examples of nonholonomic systems.