应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

凹凸算子和与积的不动点及固有元*

颜 心 力

（西安冶金建筑学院，1987年6月21日收到）

摘　　要

本文获得线性半序空间正锥上α凹与$-\alpha$凸算子的和与积存在不动点的充分条件，并给出了迭代程序与误差估计．还讨论了固有值与固有元之间的关系．

Potter[1]引入并讨论了α凹与$-\alpha$凸算子，万伟勋[2]、秦成林[3]、郭大钧[4]分别研究了这两类算子的不动点与固有元．Ortega[5]、游兆永[6]与 Leggett[7]分别讨论过算子和与积的不动点．本文将文献[1～4]中的实半序Banach空间扩展为σ-备的线性半序空间，并在其中讨论α凹与$-\alpha$凸算子和与积的不动点及固有元．最后，利用获得的抽象理论研究了一类非线性积分方程解的存在与唯一性．本文的证明思想虽受到文献[3,4]的启发，但具体方法是不相同的．文中诸定理的假设比以前的弱，但结论却更为概括广泛．

定义1　设S为线性空间E中的集，$x_0\in S$称作S的代数内点，是指

$$\forall h\in E,\ \exists\varepsilon>0,\ 使\{x\in E\,|\,x=x_0+\lambda\varepsilon h,\ \lambda\in[0,1]\}\subset S$$

S的全体代数内点记作$\mathring{S}$，称作S的代数内部．

称E为线性半序空间，是指E是实线性空间，且定义了序，即

i）　$\forall x\in E\Rightarrow x\leqslant x$；

ii）　$\forall x_1,\ x_2\in E,\ x_1\leqslant x_2,\ x_2\leqslant x_1\Rightarrow x_1=x_2$；

iii）　$\forall x_1,\ x_2,\ x_3\in E,\ x_1\leqslant x_2,\ x_2\leqslant x_3\Rightarrow x_1\leqslant x_3$；

iv）　$\forall x_1,\ x_2,\ x_3\in E,\ x_1\leqslant x_2\Rightarrow x_1+x_3\leqslant x_2+x_3$；

v）　$\forall x_1,\ x_2\in E,\ \forall\lambda\geqslant 0,\ x_1\leqslant x_2\Rightarrow\lambda x_1\leqslant\lambda x_2$．

称$P=\{x\in E\,|\,x\geqslant 0\}$为$E$的正锥．若$P$的代数内部$\mathring{P}\neq\phi$，则当$x_1-x_2\in\mathring{P}$时记作$x_1\gg x_2$．

称E是σ-备，是指E中有上界的增列$\{x_n\}\subset E$存在上端$\vee\{x_n\}$，即$\bar{x}$是$\{x_n\}$的上界$\Rightarrow\vee\{x_n\}\leqslant\bar{x}$；下端可对偶定义（这里的定义比[8]中的弱）．

在σ-备的线性半序空间E上，Archimedes原理成立，即$x>0$（$x\geqslant 0$，$x\neq 0$）$\Rightarrow nx$无界．

σ-备的Riesz空间[8]必为σ-备的线性半序空间．

设有增列$\{x_n\}$，减列$\{y_n\}$，若列$\{z_n\}$满足$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n$，且$\vee\{x_n\}=\wedge\{y_n\}=z$，则称$\{z_n\}$的(0)极限为$z$，记作$z=(0)-\lim\limits_{n\to\infty}z_n$（若$E$是Riesz空间，则这里所定义的(0)极限与[8]中一

* 张石生推荐．

致）。

定义2 设P是线性半序空间E上的正锥，$\mathring{P}\neq\phi$，$f:\mathring{P}\to\mathring{P}$，$0<\alpha<1$，$f$称作$\alpha$凹（$-\alpha$凸）算子，若

$$f(tx)\geqslant t^{\alpha}fx(f(tx)\leqslant t^{-\alpha}fx),\ \forall x\in\mathring{P},\ 0<t<1$$

易知，f为α凹($-\alpha$凸)的充要条件是

$$f(sx)\leqslant s^{\alpha}fx(f(sx)\geqslant s^{-\alpha}fx),\ \forall x\in\mathring{P},\ s>1$$

定理1 设P是σ-备的线性半序空间E中的正锥，$\mathring{P}\neq\phi$，$0<\alpha<1$，g,h: $\mathring{P}\to\mathring{P}$分别是增$\alpha$凹与减$-\alpha$凸算子，则算子

$$Ax=gx+hx+c\qquad(x\in\mathring{P},\ c\in P)\tag{1}$$

在$\mathring{P}$存在唯一不动点$\bar{x}$。

任取$x_0\in\mathring{P}$，则存在s_1，$s_2>1$，使得

$$s_1^{\alpha-1}x_0\leqslant gx_0+hx_0,\quad gx_0+hx_0\leqslant s_2^{1-\alpha}x_0\tag{2}$$

令$s_0=\max\{s_1,s_2\}$，$u_0=s_0^{-1}x_0$，$v_0=s_0x_0$。并作

$$u_n=gu_{n-1}+hv_{n-1}+c,\ v_n=gv_{n-1}+hu_{n-1}+c\qquad(n\geqslant1)\tag{3}$$

则有估计

$$0\leqslant\bar{x}-u_n\leqslant(1-s_0^{-2\alpha^n})v_0,\ 0\leqslant v_n-\bar{x}\leqslant(1-s_0^{-2\alpha^n})v_0\tag{4}$$

且对$\forall x_0\in[u_0,v_0]$有

$$\bar{x}=(0)-\lim_{n\to\infty}x_n\qquad(x_n=Ax_{n-1})\tag{5}$$

证 先设$c=0$。显然有$s_0>1$（若$s_0=1$，则x_0是A的不动点）。由(2)有

$$s_0^{\alpha-1}x_0\leqslant gx_0+hx_0\leqslant s_0^{1-\alpha}x_0\tag{6}$$

由(3)并依归纳法有

$$[u_n,\ v_n]\subseteq[u_{n-1},\ v_{n-1}]\qquad(n=1,2,\cdots)\tag{7}$$

因E为σ-备，故存在u^*，$v^*\in[u_0,v_0]$使$u^*=\bigvee\{u_n\}$，$v^*=\bigwedge\{v_n\}$，且$u_n\leqslant u^*\leqslant v^*\leqslant v_n$，于是

$$u_{n+1}=gu_n+hv_n\leqslant gu^*+hv^*\leqslant gv_n+hu_n=v_{n+1}$$

从而

$$u_n\leqslant u^*\leqslant gu^*+hv^*\leqslant v^*\leqslant v_n\tag{8}$$

采用归纳法不难证明

$$u_n\geqslant s_0^{-2\alpha^n}v_n\qquad(n=0,1,2,\cdots)\tag{9}$$

依(8)与(9)有

$$0\leqslant v^*-u^*\leqslant v_n-u_n\leqslant(1-s_0^{-2\alpha^n})v_0$$

根据Archimedes原理知$v^*=u^*\triangleq\bar{x}$。依(8)知$\bar{x}$是A的不动点。

下证A的不动点唯一。设A有不动点$\tilde{x}$，$\tilde{x}(\tilde{x}\neq\bar{x})\in\mathring{P}$，则存在$\mu>1$，使$\mu^{-\alpha}\bar{x}\leqslant\tilde{x}\leqslant\mu^{\alpha}\bar{x}$。利用归纳法可得

$$\mu^{-\alpha^n}\bar{x}\leqslant\tilde{x}\leqslant\mu^{\alpha^n}\bar{x}$$

在上式中当$n\to+\infty$时有$\bar{x}\leqslant\tilde{x}\leqslant\bar{x}$，故$\bar{x}=\tilde{x}$。

任取$x_0\in[u_0,v_0]$，则依归纳法有

$$u_n\leqslant x_n\leqslant v_n\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

故(5)成立。

最后，设$c\neq0$，因$Gx=gx+c/2$，$Hx=hx+c/2$分别为增α凹与减$-\alpha$凸算子，且G,H:

$\mathring{P}\to\mathring{P}$，故当$c\neq0$定理仍成立。

定理2 在定理1的假设条件（取$\alpha\in(0,1/2]$）下，用$x_\lambda(\lambda>0)$表示方程

$$Ax=gx+hx+c=\lambda x$$

的唯一解；则当$0<\lambda_1<\lambda_2$时有 $x_{\lambda_2}<x_{\lambda_1}$；且有

$$0\leqslant x_{\lambda_1}-x_{\lambda_2}\leqslant\left[1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]x_{\lambda_1} \tag{10}$$

$$m^\alpha\lambda_1x_{\lambda_1}\leqslant\lambda_2x_{\lambda_2}\leqslant m^{-\alpha}\lambda_1x_{\lambda_1},\qquad m\in(0,1) \tag{11}$$

证 对$\lambda>0$，由定理1知$Ax=\lambda x$在$\mathring{P}$有唯一解x_λ。设$0<\lambda_1<\lambda_2$，若$x_{\lambda_2}\not\leqslant x_{\lambda_1}$，令

$$M=\inf\{\mu|x_{\lambda_2}\leqslant\mu x_{\lambda_1}\},\quad m=\sup\{\tau|\tau x_{\lambda_1}\leqslant x_{\lambda_2}\} \tag{12}$$

易知$M>1$，且$mx_{\lambda_1}\leqslant x_{\lambda_2}\leqslant Mx_{\lambda_1}$，$m\leqslant M$。不难证明$M^{-1}\leqslant m$，于是有

$$M^{-1}x_{\lambda_1}\leqslant x_{\lambda_2}\leqslant Mx_{\lambda_1}$$

从而

$$x_{\lambda_2}\leqslant\frac{1}{\lambda_2}[gMx_{\lambda_1})+h(M^{-1}x_{\lambda_1})+c]\leqslant\frac{\lambda_1}{\lambda_2}M^\alpha x_{\lambda_1}$$

依(12)有$M\leqslant(\lambda_1/\lambda_2)M^\alpha$，于是$\lambda_2<\lambda_1$；这与定理假设矛盾，所以$x_{\lambda_2}\leqslant x_{\lambda_1}$，因$\lambda^{-1}A$的不动点唯一，故$x_{\lambda_2}<x_{\lambda_1}$。

因$0<\lambda_1<\lambda_2\Rightarrow x_{\lambda_2}<x_{\lambda_1}$。令

$$m=\sup\{\tau|\tau x_{\lambda_1}\leqslant x_{\lambda_2}\},\quad M=\inf\{\mu|x_{\lambda_2}\leqslant\mu x_{\lambda_1}\} \tag{13}$$

易知$0<m<1$，$mx_{\lambda_1}\leqslant x_{\lambda_2}\leqslant Mx_{\lambda_1}$，$m\leqslant M$。

若$m^{-1}<M$，则$M^{-1}x_{\lambda_1}\leqslant x_{\lambda_2}\leqslant Mx_{\lambda_1}$。

$$x_{\lambda_2}\leqslant\frac{1}{\lambda_2}[g(Mx_{\lambda_1})+h(M^{-1}x_{\lambda_1})+c]\leqslant\frac{\lambda_1}{\lambda_2}M^\alpha x_{\lambda_1}$$

依(13)有$M\leqslant(\lambda_1/\lambda_2)M^\alpha$，故$\lambda_1>\lambda_2$，矛盾。所以有$M\leqslant m^{-1}$。于是可得

$$mx_{\lambda_1}\leqslant x_{\lambda_2}\leqslant m^{-1}x_{\lambda_1}$$

$$\lambda_2x_{\lambda_2}\geqslant g(mx_{\lambda_1})+h(m^{-1}x_{\lambda_1})+c\geqslant\lambda_1m^\alpha x_{\lambda_1} \tag{14}$$

依(13)有$(\lambda_1/\lambda_2)^{\frac{1}{1-\alpha}}\leqslant m$

从而

$$0\leqslant x_{\lambda_1}-x_{\lambda_2}\leqslant x_{\lambda_1}-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}x_{\lambda_1}=\left[1-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right]x_{\lambda_1}$$

仿(14)有$\lambda_2x_{\lambda_2}\leqslant m^{-\alpha}\lambda_1x_{\lambda_1}$，故(11)成立。

定理3 设P为实Banach空间E中的正规锥，且$\mathring{P}\neq\phi$，$A=g+h$，其中$g,h:\mathring{P}\to\mathring{P}$分别为增$\alpha$凹与减$-\alpha$凸算子，则$A$在$\mathring{P}$存在唯一不动点$\tilde{x}$；且对任何$x_0\in\mathring{P}$，令$x_n=Ax_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$，则有

$$\tilde{x}=\lim_{n\to\infty}x_n \tag{15}$$

证 仿定理1作(2)与(3)，则仍有(6)、(7)、(9)成立。由(7)、(9)可得

$$0\leqslant u_{n+p}-u_n\leqslant v_n-u_n\leqslant(1-s_0^{-2\alpha^n})s_0x_0 \tag{16}$$

由于P正规，故存在$N>0$使

$$\|u_{n+p}-u_n\|\leqslant N(1-s_0^{-2\alpha^n})s_0\|x_0\| \tag{17}$$

故$\{u_n\}$为Cauchy列，从而存在$\tilde{u}\in E$使$\tilde{u}=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$，同理，存在$\tilde{v}$使$\tilde{v}=\lim\limits_{n\to\infty}v_n$且

$$u_n\leqslant\tilde{u}\leqslant\tilde{v}\leqslant v_n \tag{18}$$

由(9)易知$\tilde{u}=\tilde{v}$，记作$\tilde{x}$。可类似定理1并利用P的正规性证明$\tilde{x}$是A的唯一不动点。

(15) 也可仿定理1并利用正规性获得。

注 定理1与定理3互不包含。

定理4 设积分方程

$$\lambda x(t)=\int_{R^N}\left\{k_1(t,s)\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s)[x(s)]^{\alpha_i}+k_2(t,s)\sum_{i=1}^{\infty}b_i(s)[x(s)]^{-\beta_i}\right\}ds \tag{19}$$

其中$\lambda>0$，R^N表示N维欧氏空间。若

i） α_i，$\beta_i>0$且$\sup\limits_i\alpha_i<1$，$\sup\limits_i\beta_i<1$。

ii） $k_i(t,s)$ $(i=1,2)$在R^{2N}上非负可测，且存在常数m，M $(0<m<M)$使

$$m\leqslant\int_{R^N}k_i(t,s)ds\leqslant M,\quad i=1,2;\quad \forall t\in R^N$$

$$\lim_{t\to t_0}\int_{R^N}|k_i(t,s)-k_i(t_0,s)|ds=0,\quad i=1,2;\quad \forall t_0\in R^N$$

iii） $a_i(s)$，$b_i(s)$在R^N上非负可测，且存在τ_i，σ_i $(i=1,2)$，$0<\tau_i<\sigma_i$，使

$$\tau_1\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s)\leqslant\sigma_1,\quad \tau_2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}b_i(s)\leqslant\sigma_2$$

则方程(19)存在满足

$$0<\inf_{t\in R^N}x_\lambda(t)\leqslant\sup_{t\in R^N}x_\lambda(t)<+\infty$$

的唯一连续解$x_\lambda(t)$。

证 不难由定理 3 获得。

注 本定理在条件ii)中去掉连续性条件后，依定理1，可知方程(19)存在唯一可测解。

定义3 在线性半序空间E中引入（可换）代数，即$x,y\in E\Rightarrow xy=yx\in E$，且当$x,y\in\mathring{P}$（或$P$）$\Rightarrow xy\in\mathring{P}$（或$P$）。这时称$E$为线性半序代数。

定理5 设E是σ-备的线性半序代数，$\alpha\in(0,1/2)$，$g,h:\mathring{P}\to\mathring{P}$分别为增$\alpha$凹与减$-\alpha$凸算子，则

$$Ax=gxhx\qquad(x\in\mathring{P}) \tag{20}$$

存在唯一的正不动点$\tilde{x}$。令$u_0=s_0^{-1}x_0$，$v_0=s_0x_0$，这里$x_0\in\mathring{P}$，s_0满足不等式

$$s_0^{2\alpha-1}x_0\leqslant gx_0hx_0\leqslant s_0^{1-2\alpha}x_0,\qquad s_0>1$$

令

$$u_n=gu_{n-1}hv_{n-1},\quad v_n=gv_{n-1}hu_{n-1}\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{21}$$

则有估计

$$0\leqslant\tilde{x}-u_n\leqslant[1-s_0^{-4(2\alpha)^n}]s_0x_0,\qquad 0\leqslant v_n-\tilde{x}\leqslant[1-s_0^{-4(2\alpha)^n}]s_0x_0 \tag{22}$$

任取$x_0\in[u_0,v_0]$，则$\tilde{x}=(0)-\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，这里$x_n=Ax_{n-1}$，$n=1,2,\cdots$。

证 采用归纳法不难证明

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0$$

令$u^*=\vee\{u_n\}$，$v^*=\wedge\{v_n\}$，则$u_n\leqslant u^*\leqslant v^*\leqslant v_n$。

$$u_n \leqslant u^* \leqslant gu^* hv^* \leqslant gv^* hu^* \leqslant v^* \leqslant v_n \tag{23}$$

依归纳法有

$$u_n \geqslant s_0^{-4(2a)^n} v_n \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

故

$$0 \leqslant v^* - u^* \leqslant v_n - u_n \leqslant (1 - s_0^{-4(2a)^n}) v_n \leqslant (1 - s_0^{-4(2a)^n}) v_0$$

依Archimedes原理知$u^* = v^* \triangleq \bar{x}$。依(23)知$\bar{x}$为$A$的不动点。

证不动点唯一。设另有 $\tilde{x} \in \mathring{P}$ 为A的不动点，则存在$\mu > 1$使 $\mu^{-2a}\tilde{x} \leqslant \bar{x} \leqslant \mu^{2a}\tilde{x}$。依归纳法有 $\mu^{-(2a)^n}\tilde{x} \leqslant \bar{x} \leqslant \mu^{(2a)^n}\tilde{x}$ $(n=1,2,\cdots)$，因$0<2a<1$，故$\bar{x}=\tilde{x}$。

依归纳法易知$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$，故$\{x_n\}$的(0)极限是$\bar{x}$。

参 考 文 献

[1] Potter, A. J. B., Applications of Hilbert's projective metric to certain classes of non-homogeneous operators, *Quart. J. Math.*, Oxford, **28**, 2 (1977), 93—99.

[2] 万伟勋，映射压缩的条件与Banach型不动点定理，数学学报，**27**，1 (1984)，35—52.

[3] 秦成林，拟齐次映象的正不动点，数学学报，**27** (1984)，792—794.

[4] 郭大钧，一类凹凸算子的不动点与固有值，科学通报，**30** (1985)，1132—1135.

[5] Ortega, J. M. and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables*, Academic Press, New York (1970).

[6] 游兆永等，两侧逼近区间松弛法，科学通报，**31** (1986)，241—243.

[7] Leggett, R. W., On certain nonlinear integral equations, *J. Math. Anal. Appl.*, **57** (1977), 462—468.

[8] 关肇直，《泛函分析讲义》，高等教育出版社 (1958).

The Fixed Point and Eigenelement of Sum and Product about Concave and Convex Operators

Yan Xin-li

(Xi'an Institute of Metallurgy and Construction Eng., Xi'an)

Abstract

In this paper, we obtain the sufficient conditions under which there exists the fixed point of sum and product about a concave and $-a$ convex operators in the positive cone of linear semi-order space, and the iterative procedure and error estimate can be given. The relation between eigenvalue and eigenelement will also be studied in this paper.