

边界元法中奇异积分计算的极坐标变换法*

刘勇辉 陆鑫森

(上海交通大学, 1987年9月7日收到)

摘 要

在边界元法中, 奇异积分的处理是一个极为引人注目的问题。本文提出了一种在单元状态作极坐标变换的新的处理方法, 它能显式地消除奇异积分的奇异性, 使之成为常规积分, 因而易于在边界元法中使用高次单元。计算实例表明, 本文所提出的方法是有效的、方便的。

一、引 言

边界元法中的奇异积分严重地阻碍了边界元法的广泛应用, 因此, 对奇异积分的数值处理, 就成为边界元法发展中一个极为引人注目的问题。

虽然, 从70年代中期到80年代初期, Cruse^[1], Jeng^[2], Webster^[3], Oken^[4]等人相继采用线性三角形单元, 获得了奇异积分的解析表达式, 但是, 使用线性单元, 必然会加大模型误差(包括几何模型和物理模型)。为此, 人们不得不把单元划分得足够小, 从而极大地增加了计算工作量; 并且对于几何模型和物理模型更复杂的问题, 使用线性单元, 难以获得较好的解。

采用高阶单元, 不仅能减小模型误差, 而且能提高计算精度, 更好地逼近问题的解, 适合于更复杂的问题。但奇异积分的存在, 限制了高阶单元在边界元法中的有效使用。Lechat^[5]提出的在单元状态作三角形退化变换的方法, 使高阶单元在边界元法中的使用成为可能, 但由于需对局部单元作进一步的线性变换, 故会引进附加的模型误差^[6], 以致损失计算精度。并且, 新的三角形退化变换, 使得积分计算在新的变换后的三角形区域上进行, 将使原有积分区域产生新的变化, 进一步增加计算实施中的困难。Brebbia^[7]等人提出了一种带奇异权因子的积分公式, 但由于不利于数值处理而没能得到更广泛的应用。

本文提出了一种对奇异积分作数值处理的新方法, 通过在单元状态的极坐标变换, 就能显式地消除奇异积分的奇异性, 使奇异积分变成常规积分, 可用一般的数值积分方法处理; 并且不需对局部单元的形状作新的变换, 故能保证原有等参元变换的精度。从而更易于在边界元法中用高阶单元去有效地解决各种工程实际问题, 获得更好的精度。本文提出的方法简单、直观, 能方便地在计算机上实施。计算实例表明, 本文提出的方法是有效的。

* 何友声推荐。

二、边界元法的基本公式

为了便于说明, 本文的讨论仅以势问题为例.

对于三维势问题, 如图 1 所示, 设其势函数为 φ , 则可导出其边界元方程为^[8, p32-34]:

$$\int_{\Gamma} \left[\varphi(q) \frac{\partial G_{(p,q)}}{2n(q)} - \frac{\partial \varphi(q)}{\partial n(q)} G_{(p,q)} \right] d\Gamma_q = \begin{cases} -\varphi(p) & p \in \Omega \\ -c_{(p)} \varphi(p) & p \in \Gamma \end{cases} \quad (2.1)$$

其中格林(Green)函数为:

$$G_{(p,q)} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{R_{(p,q)}} \quad (2.2)$$

$$\text{而 } R_{(p,q)} = [(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

为场点 p 和源点 q 间的距离. $c_{(p)}$ 为边界 Γ 上 p 点处的系数; $\vec{n}(q)$ 为 q 点的单位外法线向量, $\vec{n}(q) = (n_x, n_y, n_z)$.

对边界 Γ , 利用等参元方法进行离散, 可导出 (2.1) 式的离散化边界元方程组:

$$\sum_{k=1}^{NOD} H_{ik} \varphi_k = \sum_{k=1}^{NOD} G_{ik} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k \quad i=1, 2, \dots, NOD \quad (2.4)$$

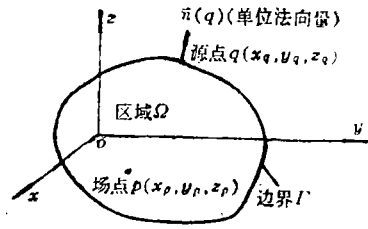


图1 势问题的符号

其中

$$\begin{cases} H_{ik} = \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^S \delta_{kr} \hat{H}_{ij}^{(e)} + c_i \delta_{ik} \\ G_{ik} = \sum_{e=1}^M \sum_{j=1}^S \delta_{kr} \hat{G}_{ij}^{(e)} \end{cases} \quad r = NENN(j, e) \quad (2.5)$$

$$\text{而 } \begin{cases} \hat{H}_{ij}^{(e)} = \int_{\Gamma_e} \frac{\partial G_{(p,q)}}{\partial n(q)} N_j d\Gamma_q & e=1, 2, \dots, M \\ & j=1, 2, \dots, S \\ \hat{G}_{ij}^{(e)} = \int_{\Gamma_e} G_{(p,q)} N_j d\Gamma_q & i=1, 2, \dots, NOD \end{cases} \quad (2.6)$$

这里, p 点即为 i 点, NOD 为节点总数, M 为单元总数. Γ_e 为第 e 个单元的区域, S 为单元 Γ_e 上的节点个数, N_j 为单元 Γ_e 上的第 j 个插值函数, $NENN(j, e)$ 为单元的局部编号与总体编号对照表. δ_{ik} 和 δ_{kr} 均为克罗内克(Kronecker) δ .

由 (2.2) 式和 (2.6) 式可看出, 当场点 p (也即 i) 位于第 e 个单元上时, 下文中我们将称该场点为奇异点, (2.6) 式的第一项积分有 $1/R^2$ 的奇异性, 第二项积分有 $1/R$ 的奇异性. 这给数值处理带来了极大的困难, 对该奇异积分的处理, 直接影响到边界元算法的成败.

三、四节点等参元的奇异积分处理

对四节点等参元, 见图 2, 其插值函数为^[9]:

$$N_j = \frac{1}{4} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta) \quad j=1, 2, 3, 4 (S=4) \quad (3.1)$$

其中 (ξ_j, η_j) 为第 j 节点的局部坐标值。

我们把奇异点 i 在局部单元上的编号记为 i_1 ，设 $i_1=2$ 。将 $\xi\eta$ 坐标平移到 i_1 点上，并旋转过 β 角，见图3，则：

$$\xi = \xi_{i_1} + \bar{\xi} \cos\beta - \bar{\eta} \sin\beta, \quad \eta = \eta_{i_1} + \bar{\xi} \sin\beta + \bar{\eta} \cos\beta \quad (3.2)$$

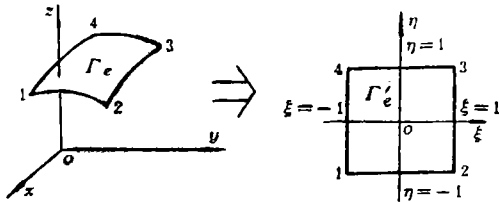


图2 四节点单元及其变换

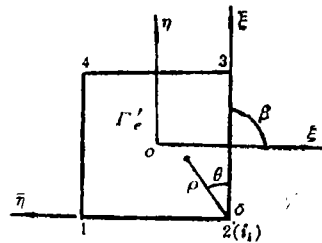


图3 单元内的坐标变换

$$\text{其中} \quad \beta = (i_1 - 1) (\pi/2) \quad (3.3)$$

$i_1=2$ (或 1, 3, 4) 为奇异点在局部单元中的节点号, (ξ_{i_1}, η_{i_1}) 为奇异点的局部坐标值。以 i_1 点为极点, $o\xi$ 轴为极轴, 构造一个极坐标系, 见图3。

$$\text{则:} \quad \bar{\xi} = \rho \cos\theta, \quad \bar{\eta} = \rho \sin\theta \quad (3.4)$$

由(3.2)和(3.4)式得:

$$\xi = \xi_{i_1} + \rho \cos(\beta + \theta), \quad \eta = \eta_{i_1} + \rho \sin(\beta + \theta) \quad (3.5)$$

将(3.5)式代入(3.1)式得:

$$N_j = \frac{1}{4} [1 + \xi_{i_1} \xi_j + \rho \xi_j \cos(\beta + \theta)] [1 + \eta_{i_1} \eta_j + \rho \eta_j \sin(\beta + \theta)] \quad (3.6)$$

由于 i_1 点, j 点位于同一个单元上, 故

$$\xi_{i_1} \xi_j = -1 \quad \text{或者/和} \quad \eta_{i_1} \eta_j = -1 \quad \text{当} \quad i_1 \neq j \text{时} \quad (3.7)$$

$$\xi_{i_1} \xi_j = 1 \quad \text{和} \quad \eta_{i_1} \eta_j = 1 \quad \text{当} \quad i_1 = j \text{时} \quad (3.8)$$

故可将(3.6)式改写成:

$$N_j = \begin{cases} \rho \bar{N}_{j(\rho, \theta)} & \text{当} \quad j \neq i_1 \text{时} \\ 1 + \rho \bar{N}_{i_1(\rho, \theta)} & \text{当} \quad j = i_1 \text{时} \end{cases} \quad (3.9)$$

其中

$$\bar{N}_{i_1(\rho, \theta)} = \frac{1}{4} [2a_{i_1} + 2b_{i_1} + \rho a_{i_1} b_{i_1}] \quad (3.10a)$$

$$\bar{N}_{j(\rho, \theta)} = \begin{cases} \frac{1}{4} a_j [1 + \eta_{i_1} \eta_j + \rho b_j] & \xi_{i_1} \xi_j = -1 \text{时} \\ \frac{1}{4} b_j [1 + \xi_{i_1} \xi_j + \rho a_j] & \eta_{i_1} \eta_j = -1 \text{时} \end{cases} \quad (3.10b)$$

$$\text{而} \quad a_j = \xi_j \cos(\beta + \theta), \quad b_j = \eta_j \sin(\beta + \theta) \quad j=1, 2, \dots, S \quad (3.11)$$

由于 i_1 是奇异点 p 在 Γ_e 单元上的局部编号, 故考虑(2.3)式中的各项时, 显然有:

$$(x_p - x_q) = (x_{i_1} - x_q) = x_{i_1} - \sum_{j=1}^s N_j x_j = (1 - N_{i_1}) x_{i_1} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1}}^s N_j x_j \quad (3.12)$$

考虑到(3.9)式, 可得:

$$(x_p - x_q) = \rho X_{(\rho, \theta)} \quad (3.13)$$

同理

$$(y_p - y_q) = (y_{i_1} - y_q) = \rho Y_{(\rho, \theta)}, \quad (z_p - z_q) = (z_{i_1} - z_q) = \rho Z_{(\rho, \theta)} \quad (3.14)$$

其中:

$$\begin{cases} X_{(\rho, \theta)} = - \sum_{j=1}^s N_{j(\rho, \theta)} x_j \\ Y_{(\rho, \theta)} = - \sum_{j=1}^s N_{j(\rho, \theta)} y_j \\ Z_{(\rho, \theta)} = - \sum_{j=1}^s N_{j(\rho, \theta)} z_j \end{cases} \quad (3.15)$$

而 $N_{j(\rho, \theta)}$ 由(3.10)式给出.

由(3.9)~(3.15)式和 p, q 点的几何意义, 显然可得出, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时, X, Y, Z 不同时为零; 且当 $\rho \rightarrow 0$ 时, 由(3.13)和(3.14)式, $q = (x_q, y_q, z_q) \rightarrow p$, 即 $R_{(\rho, \theta)} = 0$

将(3.13)和(3.14)式代入(2.3)式, 得:

$$R_{(\rho, \theta)} = \rho \bar{R}_{(\rho, \theta)} \quad (3.16)$$

$$\text{其中} \quad \bar{R}_{(\rho, \theta)} = [X^2_{(\rho, \theta)} + Y^2_{(\rho, \theta)} + Z^2_{(\rho, \theta)}]^{1/2} \quad (3.17)$$

这样(2.6)式中的第二项积分就为 (对 Γ_e 单元, 变换后称为 Γ'_e , 见图2):

$$\begin{aligned} \hat{G}_{ij}^{(e)} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'_e} \frac{1}{R_{(\rho, \theta)}} N_j J_{(\xi, \eta)} d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'_e} \frac{1}{\bar{R}_{(\rho, \theta)}} N_j J_{1(\rho, \theta)} d\rho d\theta \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中, N_j 由(3.9)和(3.10)式给出, $J_{(\xi, \eta)}$ 为单元 Γ_e 的 Jacobia 值^[8, p76], 而 $J_{1(\rho, \theta)}$ 为将(3.5)式代入 $J_{(\xi, \eta)}$ 后的结果. 显然, (3.18)式是一个没有任何奇异性的常规积分.

同理, (2.6)式中的第一项积分为:

$$\hat{H}_{ij}^{(e)} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'_e} \frac{X_{(\rho, \theta)} n_x + Y_{(\rho, \theta)} n_y + Z_{(\rho, \theta)} n_z}{\bar{R}^3_{(\rho, \theta)}} \bar{N}_{j(\rho, \theta)} J_{1(\rho, \theta)} d\rho d\theta & \text{当 } j \neq i_1 \text{ 时} \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma'_e} \frac{X_{(\rho, \theta)} n_x + Y_{(\rho, \theta)} n_y + Z_{(\rho, \theta)} n_z}{\rho \bar{R}^3_{(\rho, \theta)}} [1 + \rho \bar{N}_{i_1(\rho, \theta)}] J_{1(\rho, \theta)} d\rho d\theta & \text{当 } j = i_1 \text{ 时} \end{cases} \quad (3.19a)$$

$$(3.19b)$$

显然, (3.19a)式也是一个没有任何奇异性的常规积分.

当 $j = i_1$ 时, 在(3.19b)式中, 被积函数仍有 $1/\rho$ 的奇异性, 但该项的值仅对 H_{i_1} 有贡献, 因此, 可不直接处理该式, 而借用 $\varphi = \text{const}$ 时, $\partial\varphi/\partial n = 0$ (Γ 上) 的条件直接求出 H_{i_1} . 这样, 由(2.4)式可得:

$$H_{ii} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{NOD} H_{ik} \quad i=1, 2, \dots, NOD \quad (3.20)$$

其中 $H_{ik} (k \neq i)$ 由(2.5)式、(2.6)式和(3.19a)式计算。比较(2.4)、(2.5)和(3.20)式可看出 c_i 也在(3.20)式中一并考虑了。

至此，(2.4)中的系数 G_{ik} 和 H_{ik} 的各项积分计算都没有任何奇异性，可用一般的高斯(Gauss)数值积分公式进行有效的处理。

对于 Γ'_i 区域，在做极坐标变换的(3.5)式中，实际上已经规定， Γ'_i 单元要分成二个三角形子区域以进行(3.18)和(3.19)式的积分计算，见图4。对于 I^* 区域有：

$$0 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (3.21)$$

对于 II^* 区域也可相似地讨论。对四节点单元，这种区域划分与奇异点 i_1 所处的位置无关。

此外，若采用三角形等参元，上述讨论完全成立，仅 $\beta, N_{j(\xi, \eta)}$ 和 $\bar{N}_{j(\rho, \theta)}$ ，积分区域等需做适当的修改。限于篇幅，本文不再详细讨论。

四、高阶等参单元的奇异积分处理

对于八节点单元(图5a)，有极坐标变换式(3.5)式成立，而

$$\beta = k \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad k = \text{Int} \left(\frac{i_1 - 1}{2} \right) \quad i_1 = 1, (2, \dots, 8) \quad (4.1)$$

其中， $\text{Int}(\quad)$ 表示取截尾整数。插值函数为^[9]：

$$N_j = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta) (-1 + \xi_j \xi + \eta_j \eta) & j=1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{2} (1 + \eta_j \eta + \xi_j \xi) (1 - \xi_j^2 \eta^2 - \eta_j^2 \xi^2) & j=2, 4, 6, 8 (S=8) \end{cases} \quad (4.2)$$

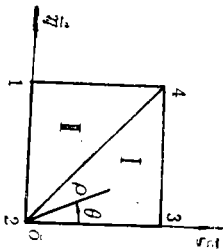
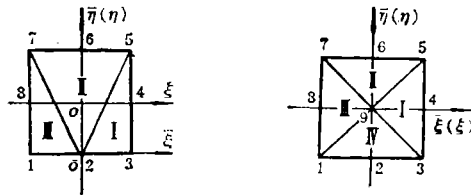


图4 积分区域的划分



a) 八节点单元

b) 九节点单元

图5 二次单元的积分区域划分

利用(3.5)式，亦可相似地导出(3.9)式，而相应的 $\bar{N}_{j(\rho, \theta)}$ 为：

$$\bar{N}_{i_1(\rho, \theta)} = \begin{cases} \frac{1}{4} \{ [6 + \rho(2a_{i_1} + 2b_{i_1} + \rho a_{i_1} b_{i_1})] (a_{i_1} + b_{i_1}) + \rho a_{i_1} b_{i_1} \} & i_1 = j = 1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{2} \{ (a_{i_1} + b_{i_1}) - \rho(a_{i_1}^2 + b_{i_1}^2) [2 + \rho(a_{i_1} + b_{i_1})] \} & i_1 = j = 2, 4, 6, 8 \end{cases} \quad (4.3)$$

$$N_{j(\rho, \theta)} = \begin{cases} \frac{1}{4} a_j [1 + \eta_{i_1} \eta_j + \rho b_j] [-2 + \rho(a_j + b_j) + \eta_{i_1} \eta_j] & \xi_{i_1} \xi_j = -1 \quad j=1, 3, 5, 7 \\ \frac{1}{4} b_j [1 + \xi_{i_1} \xi_j + \rho a_j] [-2 + \rho(a_j + b_j) + \xi_{i_1} \xi_j] & \eta_{i_1} \eta_j = -1 \\ \frac{1}{4} [1 + \xi_{i_1} \xi_j + \rho a_j] [1 + \eta_{i_1} \eta_j + \rho b_j] (a_j + b_j) & -1 + \xi_{i_1} \xi_j + \eta_{i_1} \eta_j = 0 \end{cases} \quad (4.4a)$$

$$N_{j(\rho, \theta)} = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \rho^2 (d_j^2 + c_j^2)] (a_j + b_j) & j = i_1 \pm 4 \quad j=2, 4, 6, 8 \\ -\frac{1}{2} [2\xi_{i_1}^2 b_{i_1} + 2\eta_{i_1}^2 a_{i_1} + \rho c_{i_1}^2 + \rho d_{i_1}^2] [1 + \eta_{i_1} \eta_j + \xi_{i_1} \xi_j + \rho(a_j + b_j)] & \\ & j \neq i_1 \pm 4, \quad j \neq i_1 \end{cases} \quad (4.4b)$$

$$\text{而 } c_j = \eta_j \cos(\beta + \theta), \quad d_j = \xi_j \sin(\beta + \theta) \quad j=1, 2, \dots, S \quad (4.5)$$

与四节点单元时相同, 可导出(3.15)~(3.20)式。所获结论也与四节点单元时相同。

对 Γ' 积分区域的划分, 当 i_1 为角点1、3、5、7时, 与四节点单元的区域划分完全相同, 见(3.21)式。当 i_1 为边中节点2、4、6、8时, 需将 Γ' 分成三个三角形子区域(图5a), 对 I^* 区域有:

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \arctan(2) \quad (4.6)$$

其它子区域相似地可得其定义域。

对于九节点单元(图5b), 其极坐标变换公式、奇异积分的处理和单元区域的划分, 与八节点单元时相似, 仅在 $i_1=9$ 时, 需将积分区域 Γ' 分成四个三角形子区域, I^* 区域为:

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad (4.7)$$

其它区域也可方便地获得。变换后的形函数 $N_{j(\rho, \theta)}$ 也可与八节点单元相似地导出, 这里不再赘述。

十二、十六节点等二次以上单元也可相似地进行上述处理。对于三角形高阶单元, 上述讨论也成立。

五、数值结果与讨论

为了检验本文所提出的奇异积分处理方法的有效性, 作者计算了两个具体物体的表面速度势和附加质量。

1. 在无限流场中作直线运动的球体

单位半径球体, 以单位速度向 x 负方向作直线运动时, 其单元划分见图6, 计算结果见表1。

Hess-Smith^[10]曾用2343个四边形常数单元获得问题的解。Kaleff^[11]给出了用三角形常数元的计算结果。笔者把[11]中的图3归并在本文的图7中, 可以看出, 采用高阶单元能更好地、更令人信服地逼近解析解。并且, 从图7中可看出, 采用九节点单元比八节点单元有更好的精度。更重要的是, 采用八、九节点的二次单元比之采用四节点的线性元, 计算结果要好得多。例如, 当在 $1/8$ 球面上用19个节点时, 四节点和九节点单元的计算精度分别为

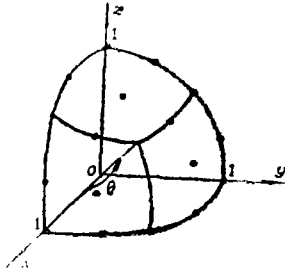


图6 1/8球体表面上的单元划分

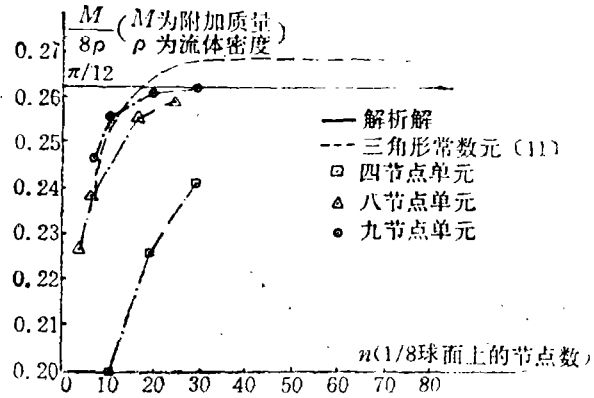


图7 四种单元的计算值与理论值的比较

13.0%和0.4%，其精度约相差三十倍左右。这个结论与 Jeng^[2]用二次三角形元和线性三角形元（奇异积分值用解析表达式获得）时得出的结论是一致的。

2. 在无限流场中作直线运动的椭球体

椭球的特征尺寸和单元划分见图8。在图9和表2中给出了椭球以单位速度分别作三个方向运动时的速度势 $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ 和附加质量。

从这些结果中可看出，虽然仅采用了相当的单元和节点，就已获得了相当高的精度，这表明本文提出的计算奇异积分的单元状态极坐标变换法是成功的。

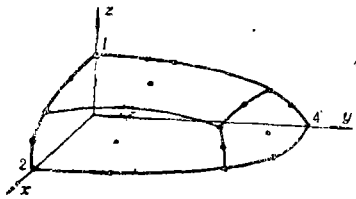


图8 1/8椭球表面上的单元划分

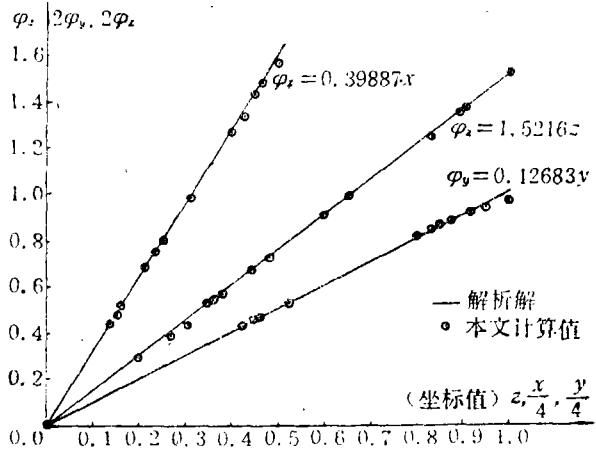


图9 椭球作x、y、z方向运动时的表面速度势

表1 单位球表面速度势的计算值及比较

θ°	解析解 $\varphi_x = \frac{1}{2} \cos\theta$	四节点单元计算值	八节点单元计算值	九节点单元计算值
0.0	0.5	0.46492	0.49276	0.49876
22.5	0.46194	0.43018	0.46445	0.46106
45.0	0.35355	0.32959	0.34784	0.35291
49.211	0.326648	0.30747	0.32500	0.32639
53.7356	0.288675	0.27260	0.28682	0.28813
67.5	0.19134	0.17770	0.18839	0.19088
90.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.7647	0.42045	0.39389		0.41964

注： φ_x 为球作x方向运动时的速度势

表 2 椭球的附加质量

附加质量	解析解	本文计算值
M_x	13.3663	13.014
M_y	4.250	4.254
M_z	50.9895	50.357

注: M_x , M_y , M_z 分别为椭球作 x , y , z 方向运动时的附加质量

六、结 束 语

1. 在边界元法中, 采用高阶单元能建立更合理的数学模型, 具有比线性单元和常数单元高得多的计算精度和计算效率。即使对于本文所讨论的这几个比较简单的例题, 在相同节点总数的情况下, 其计算精度就相差很多。而且, 在节点总数相同时, 线性单元的个数已取得比高阶单元的个数多得多, 更不必谈要达到同等精度的情况。这将大大增加计算时间和人工准备工作量, 对于更复杂的问题, 高阶单元的优势就更明显了。

2. 本文提出的奇异积分的新的处理方法, 为高阶单元在边界元法中的广泛使用奠定了更好的基础。

3. 虽然本文的讨论是以势理论为例的, 但是用单元状态的极坐标变换消除奇异积分中的奇异性的方法同样适用于弹、塑性力学, 热力学等问题。

参 考 文 献

- [1] Cruse, T. A., An improved boundary-integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis, *Computer and Structures*, 4 (1974), 741—754.
- [2] Jeng, G. and A. Wexler, Isoparametric, finite element, variational solution of integral equations for three-dimensional fields, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 11 (1977), 1455—1471.
- [3] Webster, W. C., The flow about arbitrary, three-dimensional smooth bodies, *J. of Ship Research*, 19, 4 (1975), 206—218.
- [4] Oken, E. E., The potential integral for a linear distribution over a triangular domain, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 18 (1982), 1821—1828.
- [5] Lachat, J. C. and J. O. Waston, Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10 (1976), 999—1005.
- [6] 藏跃龙、嵇醒, 三维弹性力学边界元程序的计算精度, 《第一届工程中的边界元会议文集》, (1985, 12), 149—155.
- [7] Telles, J. C. F., L. C. Wrobed and C. A. Brebbia, *Boundary Element Technology Theory and Application in Engineering*, Springer-Verlag (1984), 448—454.
- [8] Brebbia, C. A. and S. Walker, *Boundary Element Techniques in Engineering*, Butterworth Lth, (1980). 中译本: 张治强译, 《边界元法的工程应用》, 陕西科技出版社 (1986).
- [9] Bath, K. J. and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc. (1976), 120—123.
- [10] Smith, A. M. O. and J. Hess, Calculation of non-lifting potential flow about three-dimensional bodies, Douglas Aircraft Company, Report E, S, 40622 (1962).

- [11] Kaleff, P., A hydroelastic approach to ship vibration problems, *J. of Ship Research*, 27, 2 (1983), 103—112.

Polar Coordinate Transformation Approach for Treatment of Singular Integrals in Boundary Element Methods

Liu Yong-hui Lu Xin-sen

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Abstract

In boundary element methods the treatment of singular integrals as one of the main numerical problems has been noticed seriously. In this paper, by using polar coordinate transformation for elements a new approach is proposed to remove the singularities in the integrals explicitly. The formulations for treatment of the singularities in quadrilateral boundary elements with four nodes, eight nodes and nine nodes are derived and it can be extended easily to other higher order boundary elements. Numerical examples are given. The results show the present approach is effective and efficient.