应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于三阶变系数线性微分方程解的不稳定性*

廖宗璜　　卢德渊

(贵州师范大学，1987年4月11日收到)

摘　　要

文献[1]用李雅普诺夫第二方法证明了特征根均具有负实部的缓变系数动力系统的渐近稳定性。本文也用李雅普诺夫第二方法给出至少有一个特征根具有正实部的三阶变系数线性微分方程解的不稳定性的充分条件。

一、引　　言

考虑方程

$$\dddot{x}+a(t)\ddot{x}+b(t)\dot{x}+c(t)x=0 \tag{1.1}$$

其中$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$是t的实函数。

其等价系统为：

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \frac{dx_3}{dt}=-c(t)x_1-b(t)x_2-a(t)x_3 \tag{1.2}$$

假设其特征方程

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -c(t) & -b(t) & -a(t)-\lambda \end{vmatrix}=0$$

即

$$\lambda^3+a(t)\lambda^2+b(t)\lambda+c(t)=0 \tag{1.3}$$

的根$\lambda_i(t)$ $(i=1,2,3)$中至少有一个具有正实部。

由于$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$是t的实函数，因此如果特征方程(1.3)有复根，必共扼成对。

记

$$\Delta(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)$$

由根与系数的关系知：

$$-a(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)$$
$$b(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_3(t)\lambda_1(t)$$

---

* 李骊推荐.
1984年5月30日第一次收到.

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)$$

下面我们只讨论$\Delta(t)\neq 0$的情形。

二、特征方程有三个具有正实部的根

定理 1 如果方程(1.1)满足下列条件：

1. $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大），即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|a(t)|\leqslant M,\ |b(t)|\leqslant M,\ |c(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根均具有正实部，即$\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0$ $(i=1,2,3)$对所有的$t\geqslant t_0$都成立，其中δ是与t无关的一个正常数；

3. $\max\limits_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\dfrac{da(t)}{dt}\right|,\left|\dfrac{db(t)}{dt}\right|,\left|\dfrac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定。

证 由条件 2，设

$\lambda_i(t)\geqslant\delta>0$ $(i=1,2,3)$ 或 $\lambda_1(t)\geqslant\delta>0$，$\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant\delta>0$ $(i=2,3)$

于是有

$$-a(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)=\lambda_1(t)+[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\geqslant 3\delta$$

$$b(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_3(t)\lambda_1(t)=\lambda_1(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]+\lambda_2(t)\lambda_3(t)\geqslant 3\delta^2$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=\lambda_1(t)[\lambda_2(t)\lambda_3(t)]\geqslant\delta^3$$

$$\begin{aligned}\Delta(t)&=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)=c(t)[a(t)b(t)-c(t)]\\&=-\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\{-[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)+\lambda_3(t)][\lambda_1(t)\lambda_2(t)\\&\quad+\lambda_2(t)\lambda_3(t)+\lambda_3(t)\lambda_1(t)]+\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\}\\&=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\{\lambda_1^2(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]+\lambda_1(t)[\lambda_2(t)\\&\quad+\lambda_3(t)]^2+\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\}\geqslant 8\delta^6\end{aligned}$$

应用巴尔巴欣公式[2]，取

$$\begin{aligned}V(t;x_1,x_2,x_3)&=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2\\&\quad+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2\end{aligned}$$

其中

$$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3,\ V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2,\ V_{13}(t)=-ab+c$$

$$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2,\ V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2,\ V_{33}(t)=-a-c-bc$$

这里a，b，c均为t的实函数。则

$$\begin{aligned}V(t;x_1,x_2,x_3)&=(-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3)x_1^2+2(-a^2b-c^2-bc^2)x_1x_2\\&\quad+2(-ab+c)x_1x_3+(-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2)x_2^2\\&\quad+2(-a^2-ac-c^2)x_2x_3+(-a-c-bc)x_3^2\end{aligned}$$

$$=(-ab^2-a^2c+bc)x_1^2-2a^2bx_1x_2+2(-ab+c)x_1x_3-(a^3+c)x_2^2$$
$$-2a^2x_2x_3-ax_3^2-c(ax_2+x_3)^2-\frac{c}{b}[(bx_2+cx_1)^2+(abc-c^2)x_1^2]$$
$$-c\,(cx_1+bx_2)^2-\frac{c}{b}[(bx_3+cx_2)^2+(abc-c^2)x_2^2]$$
$$\geqslant(-ab^2-a^2c+bc)x_1^2-2a^2bx_1x_2+2(-ab+c)x_1x_3$$
$$-(a^3+c)x_2^2-2a^2x_2x_3-ax_3^2$$

对于任意给定的无论多么大的$\bar{t}(\bar{t}\geqslant t_0)$，考察二次型

$$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)=-ax_3^2-2a^2x_3x_2-(a^3+c)x_2^2+2(-ab+c)x_3x_1$$
$$-2a^2bx_2x_1+(-ab^2-a^2c+bc)x_1^2$$

其系数行列式是

$$\left|\begin{matrix} -a & -a^2 & (-ab+c) \\ -a^2 & -(a^3+c) & -a^2b \\ (-ab+c) & -a^2b & (-ab^2-a^2c+bc) \end{matrix}\right|_{t=\bar{t}}$$

其主子行列式是

$$-a(\bar{t})\geqslant3\delta>0$$

$$\left|\begin{matrix} -a & -a^2 \\ -a^2 & -(a^3+c) \end{matrix}\right|_{t=\bar{t}}=a(\bar{t})c(\bar{t})\geqslant3\delta^4>0$$

$$\left|\begin{matrix} -a & -a^2 & (-ab+c) \\ -a^2 & -(a^3+c) & -a^2b \\ (-ab+c) & -a^2b & (-ab^2-a^2c+bc) \end{matrix}\right|_{t=\bar{t}}=-c(\bar{t})[a(\bar{t})b(\bar{t})c(\bar{t})-c^2(\bar{t})]\geqslant8\delta^9>0$$

根据塞尔维斯特定理[3]，可知二次型$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$是正定的。除此而外，因为

$$V(\bar{t};x_1,x_2,x_3)\geqslant U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$$

所以函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值。

其次证明函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$对于时间t的由扰动运动方程构成的全导数dV/dt在$t_0\leqslant t<+\infty$内是正定的函数。

事实上，

$$\frac{dV}{dt}=\dot{V}_{11}(t)x_1^2+2\dot{V}_{12}(t)x_1x_2+2\dot{V}_{13}(t)x_1x_3+\dot{V}_{22}(t)x_2^2+2\dot{V}_{23}(t)x_2x_3+\dot{V}_{33}(t)x_3^2$$
$$+2\left[V_{11}(t)x_1\frac{dx_1}{dt}+V_{12}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_2+x_1\frac{dx_2}{dt}\right)+V_{13}(t)\left(\frac{dx_1}{dt}x_3+x_1\frac{dx_3}{dt}\right)\right.$$
$$\left.+V_{22}(t)x_2\frac{dx_2}{dt}+V_{23}(t)\left(\frac{dx_2}{dt}x_3+x_2\frac{dx_3}{dt}\right)+V_{33}(t)x_3\frac{dx_3}{dt}\right]$$
$$=\dot{V}_{11}(t)x_1^2+2\dot{V}_{12}(t)x_1x_2+2\dot{V}_{13}(t)x_1x_3+\dot{V}_{22}(t)x_2^2+2\dot{V}_{23}(t)x_2x_3$$
$$+\dot{V}_{33}(t)x_3^2+2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$
$$\geqslant2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[|\dot{V}_{11}(t)|x_1^2+|\dot{V}_{12}(t)|(x_1^2+x_2^2)+|\dot{V}_{13}(t)|(x_1^2+x_3^2)$$
$$+|\dot{V}_{22}(t)|x_2^2+|\dot{V}_{23}(t)|(x_2^2+x_3^2)+|\dot{V}_{33}(t)|x_3^2]$$
$$=2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[(|\dot{V}_{11}(t)|+|\dot{V}_{12}(t)|+|\dot{V}_{13}(t)|)x_1^2+(|\dot{V}_{12}(t)|+|\dot{V}_{22}(t)|$$
$$+|\dot{V}_{23}(t)|)x_2^2+(|\dot{V}_{13}(t)|+|\dot{V}_{23}(t)|+|\dot{V}_{33}(t)|)x_3^2]$$
$$\geqslant2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\varepsilon[(2|a|^2+|b|^2+5|c|^2+4|a||b|+4|a||c|+2|b||c|+|a|$$

$$+2|b|+3|c|+1)x_1^2+(5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|+4|b||c|$$

$$+4|a||c|+3|a|+|b|+6|c|+1)x_2^2+(4|a|+2|b|+4|c|+3)x_3^2]$$

$$\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\varepsilon[(18M^2+6M+1)x_1^2+(18M^2+10M+1)x_2^2+(10M+3)x_3^2]$$

$$\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\varepsilon[(18M^2+10M+1)x_1^2+(18M^2+10M+1)x_2^2+(10M+3)x_3^2]$$

$$\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[\eta|\Delta(t)|x_1^2+\eta|\Delta(t)|x_2^2+\eta|\Delta(t)|x_3^2]$$

$$=(2-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\geqslant 8(2-\eta)\delta^6(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以dV/dt是正定的。由条件1容易证明$V(t;x_1,x_2,x_3)$具有无穷小上界。

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[2]，可知方程(1.1)的零解不稳定。

三、特征方程有两个具有正实部的根

定理2 在方程(1.1)中设

1．$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|a(t)|\leqslant M,\quad |b(t)|\leqslant M,\quad |c(t)|\leqslant M$$

2．特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$ 满足

$$\delta_1<\lambda_2(t)<\delta_2,\quad -\delta_4<\lambda_1(t)<-\delta_3,\quad \delta_5<\lambda_3(t)$$

其中δ_i $(i=1,2,3,4,5)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5$；

3．$a(t)+c(t)+b(t)c(t)<0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4．$\max\limits_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定。

证 由条件2，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=-|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|<-\delta_3\delta_1\delta_5=-\delta_1\delta_3\delta_5<0$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<-\delta_3+\delta_2=-(\delta_3-\delta_2)<0,\qquad \lambda_2(t)+\lambda_3(t)>\delta_1+\delta_5>0$$

$$\lambda_3(t)+\lambda_1(t)>\delta_5-\delta_4>0$$

而 $$\Delta(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)\{\lambda_1^2(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]+\lambda_1(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]^2+\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_2(t)+\lambda_3(t)]\}$$

$$=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)[\lambda_1(t)+\lambda_2(t)][\lambda_2(t)+\lambda_3(t)][\lambda_3(t)+\lambda_1(t)]$$

所以

$$\Delta(t)=|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$

$$>\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_3-\delta_2)(\delta_1+\delta_5)(\delta_5-\delta_4)>0$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)<-\delta_1\delta_3\delta_5<0$$

根据巴尔巴欣公式[2]，取

$$V(t;x_1,x_2,x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

其中

$$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3,\quad V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2,\quad V_{13}(t)=-ab+c$$

$$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2,\ V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2,\quad V_{33}(t)=-a-c-bc$$

这里a，b，c均为t的实函数。

对于任意给定的无论多么大的$\bar{t}(\bar{t}\geqslant t_0)$，考察二次型

$$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)=V_{33}(\bar{t})x_3^2+2V_{23}(\bar{t})x_3x_2+2V_{13}(\bar{t})x_3x_1+V_{22}(\bar{t})x_2^2+2V_{12}(\bar{t})x_2x_1+V_{11}(\bar{t})x_1^2$$

显然其系数行列式是

$$\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) & V_{13}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) \\ V_{13}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) & V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}$$

其主子行列式是

$$V_{33}(\bar{t})=-a(\bar{t})-c(\bar{t})-b(\bar{t})c(\bar{t})>0$$

$$\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) \end{vmatrix}=V_{33}(\bar{t})V_{22}(\bar{t})-V_{23}^2(\bar{t})=\text{定值}k$$

$$\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) & V_{13}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) \\ V_{13}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) & V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}-c(abc-c^2)[(a+c)^2(a^2+c^2+1)+ \\ +(b+1)^2(b^2+c^2+1)+a^2(b^2+c^2)+b^2]\end{matrix}\right\}\Bigg|_{t=\bar{t}}<0$$

根据塞尔维斯特定理[3]，可知$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$不是恒正型。

同理，$-U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$ 的系数行列式是

$$\begin{vmatrix} -V_{33}(\bar{t}) & -V_{23}(\bar{t}) & -V_{13}(\bar{t}) \\ -V_{23}(\bar{t}) & -V_{22}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) \\ -V_{13}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) & -V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}$$

其主子行列式是

$$-V_{33}(\bar{t})<0$$

$$\begin{vmatrix} -V_{33}(\bar{t}) & -V_{23}(\bar{t}) \\ -V_{23}(\bar{t}) & -V_{22}(\bar{t}) \end{vmatrix}=(-1)^2\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) \end{vmatrix}=\text{定值}k$$

$$\begin{vmatrix} -V_{33}(\bar{t}) & -V_{23}(\bar{t}) & -V_{13}(\bar{t}) \\ -V_{23}(\bar{t}) & -V_{22}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) \\ -V_{13}(\bar{t}) & -V_{12}(\bar{t}) & -V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}=(-1)^3\begin{vmatrix} V_{33}(\bar{t}) & V_{23}(\bar{t}) & V_{13}(\bar{t}) \\ V_{23}(\bar{t}) & V_{22}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) \\ V_{13}(\bar{t}) & V_{12}(\bar{t}) & V_{11}(\bar{t}) \end{vmatrix}>0$$

所以$-U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$ 也不是恒正型。故所以$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$既不是恒正型也不是恒负型。

又因为$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$ 的系数行列式不等于零，所以二次型$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$ 是满秩的，于是它可以经实满秩线性变换化为标准形式[3]:

$$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)=A_1y_1^2+A_2y_2^2+A_3y_3^2$$

其中$A_i\neq 0$ $(i=1,2,3)$。

由于$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$不是恒正型，所以A_1，A_2，A_3中至少有一个为负，而$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$又不是恒负型，所以A_1，A_2，A_3中至少有一个为正，故所以$U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$是不定型。又因$V(\bar{t};x_1,x_2,x_3)=U(\bar{t};x_3,x_2,x_1)$，由此可见，函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$在任意小的$x_i$值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值。

根据条件 1 容易证明$V(t;x_1,x_2,x_3)$具有无穷小上界。

现在再考察dV/dt，类似于定理 1 有

$$\frac{dV}{dt}\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-\eta\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

$$=(2-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)>(2-\eta)\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_3-\delta_2)(\delta_1+\delta_5)(\delta_5-\delta_4)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以dV/dt是正定的。

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[2]，可知方程(1.1)的零解不稳定。

定理 3 对于方程(1.1)设

1．$a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|a(t)|\leqslant M,\ |b(t)|\leqslant M,\ |c(t)|\leqslant M$$

2．特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足

$$-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1,\ \delta_3<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)$$

其中 δ_i $(i=1,2,3)$是与 t 无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$；

3．$a(t)+c(t)+b(t)c(t)>0$ 对所有的 $t\geqslant t_0$ 都成立；

4．$\max\limits_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定。

证 由条件2，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=-|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|<-\delta_1\delta_3\delta_3=-\delta_1\delta_3^2<0$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)>-\delta_2+\delta_3>0,\ \lambda_2(t)+\lambda_3(t)>2\delta_3>0,\ \lambda_1(t)+\lambda_3(t)>-\delta_2+\delta_3>0$$

所以

$$\Delta(t)=-|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$

$$<-\delta_1\delta_3^2(\delta_3-\delta_2)(2\delta_3)(\delta_3-\delta_2)=-2\delta_1\delta_3^3(\delta_3-\delta_2)^2<0$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)<-\delta_1\delta_3^2<0$$

应用巴尔巴欣公式[2]，取

$$V(t;x_1,x_2,x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

其中

$$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3,\quad V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2,\quad V_{13}(t)=-ab+c$$

$$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2,\ V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2,\quad V_{33}(t)=-a-c-bc$$

这里a，b，c 均为 t 的实函数。

根据条件 1 容易证明$V(t;x_1,x_2,x_3)$具有无穷小上界。

类似于定理 2 可以证明函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$在任意小的x_i值和任意大的t $(t\geqslant t_0)$值时，可以取负的值。

再考察dV/dt：

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}=&\dot V_{11}(t)x_1^2+2\dot V_{12}(t)x_1x_2+2\dot V_{13}(t)x_1x_3+\dot V_{22}(t)x_2^2+2\dot V_{23}(t)x_2x_3+\dot V_{33}(t)x_3^2\\&+2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\\&\leqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[|\dot V_{11}(t)|x_1^2+|\dot V_{12}(t)|(x_1^2+x_2^2)+|\dot V_{13}(t)|(x_1^2+x_3^2)\\&+|\dot V_{22}(t)|x_2^2+|\dot V_{23}(t)|(x_2^2+x_3^2)+|\dot V_{33}(t)|x_3^2]\\&=2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[(|\dot V_{11}(t)|+|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{13}(t)|)x_1^2\\&+(|\dot V_{12}(t)|+|\dot V_{22}(t)|+|\dot V_{23}(t)|)x_2^2+(|\dot V_{13}(t)|+|\dot V_{23}(t)|+|\dot V_{33}(t)|)x_3^2]\\&\leqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\varepsilon[(2|a|^2+|b|^2+5|c|^2+4|a||b|+4|a||c|\\&+2|b||c|+|a|+2|b|+3|c|+1)x_1^2+(5|a|^2+|b|^2+2|c|^2+2|a||b|\\&+4|b||c|+4|a||c|+3|a|+|b|+6|c|+1)x_2^2+(4|a|+2|b|+4|c|+3)x_3^2]\\&\leqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\varepsilon[(18M^2+10M+1)x_1^2+(18M^2\\&+10M+1)x_2^2+(10M+3)x_3^2]\\&\leqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[\eta|\Delta(t)|x_1^2+\eta|\Delta(t)|x_2^2+\eta|\Delta(t)|x_3^2]\\&=(2-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)<-2(2-\eta)\delta_1\delta_3^2(\delta_3-\delta_2)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\end{aligned}$$

所以dV/dt是负定的。

应用非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[2]，可知方程(1.1)的零解不稳定。

附注 在定理3中，如果条件1、3、4为真，用特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足下列条件之一者来代替条件2：

1) $\delta_1<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<\delta_2$, $\quad\lambda_1(t)<-\delta_3$

其中δ_i $(i=1,2,3)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$，或

2) $\lambda_1(t)<-\delta_1'$, $\lambda_2(t)=p(t)+q(t)i$, $\lambda_3(t)=p(t)-q(t)i$, 且

$$p(t)>\delta_2',\quad |q(t)|>\delta_3'$$

其中 δ_i' $(i=1,2,3)$是与t无关的正常数.

则类似于定理3的证明方法可以证明方程(1.1)的零解不稳定.

四、特征方程有一个具有正实部的根

定理4 在方程(1.1)中设

1. $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$ 在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|a(t)|\leqslant M,\quad |b(t)|\leqslant M,\quad |c(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$ 满足：

$$-\delta_2<\lambda_3(t)<-\delta_1,\quad \delta_3<\lambda_1(t)<\delta_4,\quad \lambda_2(t)<-\delta_5$$

其中δ_i $(i=1,2,3,4,5)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3<\delta_4<\delta_5$；

3. $a(t)+c(t)+b(t)c(t)>0$，对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4. $\max\limits_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\dfrac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\dfrac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\dfrac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定。

证 由条件2，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|>\delta_3\delta_5\delta_1=\delta_1\delta_3\delta_5>0$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<\delta_4-\delta_5<0,\ \lambda_2(t)+\lambda_3(t)<-\delta_5-\delta_1<0,\ \lambda_3(t)+\lambda_1(t)>-\delta_2+\delta_3>0$$

所以

$$\Delta(t)=|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$
$$>\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_5-\delta_4)(\delta_5+\delta_1)(\delta_3-\delta_2)>0$$
$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)>\delta_1\delta_3\delta_5>0$$

根据巴尔巴欣公式[2]，取

$$V(t;x_1,x_2,x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3$$
$$+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

其中

$$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3,\qquad V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2,\ V_{13}(t)=-ab+c$$
$$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2,\quad V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2,\quad V_{33}(t)=-a-c-bc$$

这里a，b，c均为t的实函数。

根据条件1容易证明$V(t;x_1,x_2,x_3)$具有无穷小上界。

类似于定理2可以证明函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$在任意小的x_i值和任意大的$t(t\geqslant t_0)$值时，可以取正的值。

再考察dV/dt，类似于定理1有

$$\frac{dV}{dt}\geqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-[\eta|\Delta(t)|x_1^2+\eta|\Delta(t)|x_2^2+\eta|\Delta(t)|x_3^2]$$
$$=(2-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)>(2-\eta)\delta_1\delta_3\delta_5(\delta_5-\delta_4)(\delta_5$$
$$+\delta_1)(\delta_3-\delta_2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以dV/dt是正定的。

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[2]，可知方程(1.1)的零解不稳定。

定理5 在方程(1.1)中设

1. $a(t)$，$b(t)$，$c(t)$在$t_0\leqslant t<+\infty$上可微有界（其中t_0足够大）即存在一个正常数$M>0$，使得

$$|a(t)|\leqslant M,\ |b(t)|\leqslant M,\ |c(t)|\leqslant M$$

2. 特征方程(1.3)的根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足

$$\delta_1<\lambda_1(t)<\delta_2,\qquad \lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<-\delta_3$$

其中δ_i $(i=1,2,3)$是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$；

3. $a(t)+c(t)+b(t)c(t)<0$对所有的$t\geqslant t_0$都成立；

4. $$\max_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

其中

$$\varepsilon=\min_{t_0\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$$

η是一个常数，且$0<\eta<2$，

则方程(1.1)的零解不稳定。

证　由条件2，有

$$\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)=|\lambda_1(t)||\lambda_2(t)||\lambda_3(t)|>\delta_1\delta_3\delta_3=\delta_1\delta_3^2>0$$

$$\lambda_1(t)+\lambda_2(t)<\delta_2-\delta_3<0,\ \lambda_2(t)+\lambda_3(t)<-2\delta_3<0,\ \lambda_3(t)+\lambda_1(t)<-\delta_3+\delta_2<0$$

所以

$$\Delta(t)=-|\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)||\lambda_1(t)+\lambda_2(t)||\lambda_2(t)+\lambda_3(t)||\lambda_3(t)+\lambda_1(t)|$$
$$<-\delta_1\delta_3^2(\delta_3-\delta_2)(2\delta_3)(\delta_3-\delta_2)=-2\delta_1\delta_3^3(\delta_3-\delta_2)^2<0$$

$$-c(t)=\lambda_1(t)\lambda_2(t)\lambda_3(t)>\delta_1\delta_3^2>0$$

根据巴尔巴欣公式[2]，取

$$V(t;\ x_1,\ x_2,\ x_3)=V_{11}(t)x_1^2+2V_{12}(t)x_1x_2+2V_{13}(t)x_1x_3+V_{22}(t)x_2^2+2V_{23}(t)x_2x_3+V_{33}(t)x_3^2$$

其中

$$V_{11}(t)=-ab^2-a^2c+bc-ac^2-c^3,\qquad V_{12}(t)=-a^2b-c^2-bc^2,\ V_{13}(t)=-ab+c$$
$$V_{22}(t)=-a^3-c-a^2c-bc-b^2c-ac^2,\ V_{23}(t)=-a^2-ac-c^2,\qquad V_{33}(t)=-a-c-bc$$

这里a，b，c均为t的实函数。

根据条件1容易证明$V(t;x_1,x_2,x_3)$具有无穷小上界。

类似于定理2可以证明函数$V(t;x_1,x_2,x_3)$在任意小的x_i值和任意大的t ($t\geqslant t_0$)值时，可以取负的值。

再考察dV/dt，类似于定理3有

$$\frac{dV}{dt}\leqslant 2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[\eta|\Delta(t)|x_1^2+\eta|\Delta(t)|x_2^2+\eta|\Delta(t)|x_3^2]$$
$$=2\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+[-\Delta(t)\eta(x_1^2+x_2^2+x_3^2)]$$
$$=(2-\eta)\Delta(t)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)<-2(2-\eta)\delta_1\delta_3^3(\delta_3-\delta_2)^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)$$

所以dV/dt是负定的。

根据非定常运动的李雅普诺夫不稳定定理[2]，可知方程(1.1)的零解不稳定。

附注　在定理5中，如果条件1、3、4为真，且用特征方程(1.3)的根 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$ 满足下列条件之一者来代替条件2：

1) $-\delta_2<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<-\delta_1$，$\delta_3<\lambda_1(t)$

其中δ_i ($i=1,2,3$)是与t无关的正常数，且$0<\delta_1<\delta_2<\delta_3$，或

2) $\lambda_1(t)>\delta_1'$，$\lambda_2(t)=p(t)+q(t)i$，$\lambda_3(t)=p(t)-q(t)i$

且　$p(t)<-\delta_2'$，$|q(t)|>\delta_3'$

其中δ_i ($i=1,2,3$)是与t无关的正常数.

则类似于定理5的证明方法可以证明方程(1.1)的零解不稳定.

五、　例

例1　考察方程

$$\dddot{x}-8\ddot{x}+\left(20+\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\dot{x}-\left(16+4\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)x=0 \tag{5.1}$$

的零解的稳定性。

容易证明方程(5.1)的特征方程是

$$\lambda^3-8\lambda^2+\left(20+\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\lambda-\left(16+4\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=4,\ \lambda_2(t)=2+\frac{\sin t}{t}i,\ \lambda_3(t)=2-\frac{\sin t}{t}i$$

下面验证方程(5.1)满足定理1的条件

1．方程(5.1)的系数

$$a(t)=-8,\ b(t)=20+\frac{\sin^2 t}{t^2},\ c(t)=-\left(16+4\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)$$

在$8\leqslant t<+\infty$上可微有界，且

$$|a(t)|\leqslant 21,\quad |b(t)|\leqslant 21,\quad |c(t)|\leqslant 21$$

$$\left|\frac{da(t)}{dt}\right|=0,\quad \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\leqslant\left|\frac{2\sin t\cos t}{t^2}\right|+\left|\frac{2\sin^2 t}{t^3}\right|\leqslant\frac{4}{t^2}\leqslant\frac{1}{16},\quad \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{4}$$

2．$\mathrm{Re}(\lambda_i(t))\geqslant 2\qquad (i=1,2,3)$

3．(i) $\max\limits_{8<t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}\leqslant\max\left\{0,\frac{1}{16},\ \frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4}$

(ii) $\Delta(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)$

$$=[-8]\left[20+\frac{\sin^2 t}{t^2}\right]\left[-\left(16+4\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\right]-\left[-\left(16+4\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)\right]^2$$

$$=2304+640\frac{\sin^2 t}{t^2}+16\frac{\sin^4 t}{t^4}\geqslant 2304$$

(iii) $\varepsilon=\min\limits_{8<t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$

$$=\min_{8<t<+\infty}\left\{\frac{|\Delta(t)|}{8149},\ \frac{|\Delta(t)|}{213}\right\}\qquad(\text{其中}\eta=1,\ M=21)$$

$$=\min_{8<t<+\infty}\frac{|\Delta(t)|}{8149}\geqslant\frac{2304}{8149}>\frac{1}{4}$$

从而可知

$$\max_{8<t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理1的全部条件均被满足，根据定理1可知方程(5.1)的零解不稳定．

例2 考察方程

$$\dddot{x}-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2t}\right)\ddot{x}-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4t}\right)\dot{x}+\left(1+\frac{1}{4t}\right)x=0 \tag{5.2}$$

的零解的稳定性．

方程(5.2)的特征方程是

$$\lambda^3-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2t}\right)\lambda^2-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4t}\right)\lambda+\left(1+\frac{1}{4t}\right)=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=-1,\quad \lambda_2(t)=\frac{1}{2},\quad \lambda_3(t)=2+\frac{1}{2t}$$

下面验证方程(5.2)满足定理 2 的条件

1．方程(5.2)的系数

$$a(t)=-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2t}\right),\quad b(t)=-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4t}\right),\quad c(t)=1+\frac{1}{4t}$$

在$10\leqslant t<+\infty$上可微有界，且

$$|a(t)|\leqslant 2.5,\quad |b(t)|\leqslant 2.5,\quad |c(t)|\leqslant 2.5$$

$$\left|\frac{da(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{200},\quad \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{400},\quad \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{400}$$

2．当$10\leqslant t<+\infty$时，特征根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足不等式

$$\delta_1<\lambda_2(t)<\delta_2,\quad -\delta_4<\lambda_1(t)<-\delta_3,\quad \delta_5<\lambda_3(t)$$

其中 $\delta_1=\frac{1}{3}$，$\delta_2=\frac{3}{5}$，$\delta_3=\frac{4}{5}$，$\delta_4=\frac{3}{2}$，$\delta_5=2$

3．当$10\leqslant t<+\infty$时

$$a(t)+c(t)+b(t)c(t)=-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2t}\right)+\left(1+\frac{1}{4t}\right)-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4t}\right)\left(1+\frac{1}{4t}\right)$$

$$=-2-\frac{7}{8t}-\frac{1}{(4t)^2}<-2<0$$

4．(i) $\max\limits_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}$

$$\leqslant\max\left\{\frac{1}{200},\frac{1}{400},\frac{1}{400}\right\}=\frac{1}{200}$$

(ii) $\Delta(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)$

$$=\left[-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2t}\right)\right]\left[-\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4t}\right)\right]\left[1+\frac{1}{4t}\right]-\left[1+\frac{1}{4t}\right]^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{4t}\right)\left[\frac{5}{4}+\frac{7}{8t}+\frac{1}{8t^2}\right]>\frac{5}{4}$$

(iii) $\varepsilon=\min\limits_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{|\Delta(t)|}{138.5},\frac{|\Delta(t)|}{28}\right\}\quad（其中\ \eta=1,\ M=2.5）$$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\frac{|\Delta(t)|}{138.5}>\frac{1}{138.5}\times\frac{5}{4}>\frac{1}{200}$$

从而可知

$$\max_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理 2 的全部条件均被满足，根据定理 2 可知方程(5.2)的零解不稳定。

例 3 考察方程

$$\dddot{x}-\left(3+\frac{1}{t^2}\right)\ddot{x}+\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)\dot{x}+\left(4+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)x=0 \tag{5.3}$$

的零解的稳定性。

方程(5.3)的特征方程是

$$\lambda^3-\left(3+\frac{1}{t^2}\right)\lambda^2+\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)\lambda+\left(4+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=-1,\quad \lambda_2(t)=\lambda_3(t)=2+\frac{1}{2t^2}$$

现在验证方程(5.3)满足定理3的条件。

1．方程(5.3)的系数

$$a(t)=-\left(3+\frac{1}{t^2}\right),\ b(t)=\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4t^4},\ c(t)=4+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}$$

在$10\leqslant t<+\infty$上可微有界，且

$$|a(t)|\leqslant 5,\qquad |b(t)|\leqslant 5,\qquad |c(t)|\leqslant 5$$

$$\left|\frac{da(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{2}{1000},\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{201}{100000},\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{401}{100000}$$

2．当$10\leqslant t<+\infty$时，特征根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足不等式

$$-\delta_2<\lambda_1(t)<-\delta_1,\ \delta_3<\lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)$$

其中　$\delta_1=\frac{1}{2}$，$\delta_2=\frac{3}{2}$，$\delta_3=2$

3．当$10\leqslant t<+\infty$时，

$$a(t)+c(t)+b(t)c(t)=-\left(3+\frac{1}{t^2}\right)+\left(4+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)+\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)\left(4+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)$$

$$=1+\frac{5}{t^2}+\frac{13}{4t^4}+\frac{3}{4t^6}+\frac{1}{16t^8}>1>0$$

4．(i) $\max\limits_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}$

$$\leqslant\max\left\{\frac{2}{1000},\ \frac{201}{100000},\ \frac{401}{100000}\right\}=\frac{401}{100000}$$

(ii) $\Delta(t)=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)$

$$=\left[-\left(3+\frac{1}{t^2}\right)\right]\left[\frac{1}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right]\left[4+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right]-\left[4+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right]^2$$

$$=-16-4\left(\frac{5}{t^2}+\frac{2}{t^4}+\frac{1}{4t^6}\right)-4\left(\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)$$

$$-\left(\frac{2}{t^2}+\frac{1}{4t^4}\right)\left(\frac{5}{t^2}+\frac{2}{t^4}+\frac{1}{4t^6}\right)<-16<0$$

所以当$10\leqslant t<+\infty$时，$|\Delta(t)|>16$。

(iii) $\varepsilon=\min\limits_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\left\{\frac{|\Delta(t)|}{501},\ \frac{|\Delta(t)|}{53}\right\}\qquad(\text{其中}\eta=1,\ M=5)$$

$$=\min_{10\leqslant t<+\infty}\frac{|\Delta(t)|}{501}>\frac{16}{501}>\frac{401}{100000}$$

从而可知

$$\max_{10<t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理 3 的全部条件均被满足，根据定理 3 可知方程(5.3)的零解不稳定。

例 4 考察方程

$$\dddot{x}+(3-e^{-t})\ddot{x}-(6+5e^{-t})\dot{x}-(8+4e^{-t})x=0 \tag{5.4}$$

的零解的稳定性。

容易证明方程(5.4)的特征方程是

$$\lambda^3+(3-e^{-t})\lambda^2-(6+5e^{-t})\lambda-(8+4e^{-t})=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=2+e^{-t},\ \lambda_2(t)=-4,\ \lambda_3(t)=-1$$

下面验证方程(5.4)满足定理 4 的条件

1. 方程(5.4)的系数

$$a(t)=3-e^{-t},\ b(t)=-(6+5e^{-t}),\ c(t)=-(8+4e^{-t})$$

在$10\leqslant t<+\infty$上可微有界，且

$$|a(t)|\leqslant 12,\ |b(t)|\leqslant 12,\ |c(t)|\leqslant 12$$

$$\left|\frac{da(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{1024},\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{5}{1024},\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{4}{1024}$$

2. 当$10\leqslant t<+\infty$时，特征根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足不等式

$$-\delta_2<\lambda_3(t)<-\delta_1,\ \delta_3<\lambda_1(t)<\delta_4,\ \lambda_2(t)<-\delta_5$$

其中 $\delta_1=\dfrac{1}{2}$，$\delta_2=\dfrac{6}{5}$，$\delta_3=\dfrac{3}{2}$，$\delta_4=3$，$\delta_5=\dfrac{7}{2}$

3. 当$10\leqslant t<+\infty$时：

$$\begin{aligned}a(t)+c(t)+b(t)c(t)&=(3-e^{-t})-(8+4e^{-t})+(6+5e^{-t})(8+4e^{-t})\\&=43+59e^{-t}+20e^{-2t}>43>0\end{aligned}$$

4. (i) $\displaystyle\max_{10<t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}\leqslant\max\left\{\frac{1}{1024},\ \frac{5}{1024},\ \frac{4}{1024}\right\}=\frac{5}{1024}$

(ii)
$$\begin{aligned}\Delta(t)&=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)\\&=(3-e^{-t})[-(6+5e^{-t})][-(8+4e^{-t})]-[-(8+4e^{-t})]^2\\&=80+80e^{-t}-20e^{-2t}-20e^{-3t}\\&=80+40e^{-t}+20(e^{-t}-e^{-2t})+20(e^{-t}-e^{-3t})>80\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}\varepsilon&=\min_{10<t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}\\&=\min_{10<t<+\infty}\left\{\frac{\Delta(t)}{2713},\ \frac{\Delta(t)}{123}\right\}\quad(\text{其中}\eta=1,\ M=12)\\&=\min_{10<t<+\infty}\frac{\Delta(t)}{2713}>\frac{80}{2713}>\frac{5}{1024}\end{aligned}$$

从而可知

$$\max_{10<t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理 4 的全部条件均被满足，根据定理 4 可知方程(5.4)的零解不稳定。

例 5　考察方程

$$\dddot{x}+(5-2e^{-t})\ddot{x}+(3-4e^{-t}+e^{-2t})\dot{x}-(9-6e^{-t}+e^{-2t})x=0 \tag{5.5}$$

方程(5.5)的特征方程是

$$\lambda^3+(5-2e^{-t})\lambda^2+(3-4e^{-t}+e^{-2t})\lambda-(9-6e^{-t}+e^{-2t})=0$$

它的特征根是

$$\lambda_1(t)=1,\ \lambda_2(t)=\lambda_3(t)=-3+e^{-t}$$

现在验证方程(5.5)满足定理 5 的条件

1. 方程(5.5)的系数

$$a(t)=5-2e^{-t},\ b(t)=3-4e^{-t}+e^{-2t},\ c(t)=-(9-6e^{-t}+e^{-2t})$$

在$10\leqslant t<\infty$上可微有界，且

$$|a(t)|\leqslant 16,\quad |b(t)|\leqslant 16,\quad |c(t)|\leqslant 16$$

$$\left|\frac{da(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{1}{512},\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{3}{512},\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\leqslant\frac{4}{512}$$

2. 当$10\leqslant t<+\infty$时，特征根$\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\lambda_3(t)$满足不等式

$$\delta_1<\lambda_1(t)<\delta_2,\ \lambda_2(t)\leqslant\lambda_3(t)<-\delta_3$$

其中　$$\delta_1=\frac{1}{2},\ \delta_2=\frac{3}{2},\ \delta_3=\frac{11}{6}$$

3. 当$10\leqslant t<+\infty$时，

$$\begin{aligned}a(t)+c(t)+b(t)c(t)&=(5-2e^{-t})-(9-6e^{-t}+e^{-2t})\\&\quad-(3-4e^{-t}+e^{-2t})(9-6e^{-t}+e^{-2t})\\&=-31+58e^{-t}-37e^{-2t}+10e^{-3t}-e^{-4t}\\&=-31+58e^{-t}-27e^{-2t}-10(e^{-2t}-e^{-3t})-e^{-4t}\\&<-31+58e^{-t}<-31+\frac{58}{2^{10}}<-30<0\end{aligned}$$

4. (i) $\max\limits_{10<t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}\leqslant\max\left\{\frac{1}{512},\frac{3}{512},\frac{4}{512}\right\}=\frac{4}{512}$

(ii) $$\begin{aligned}\Delta(t)&=a(t)b(t)c(t)-c^2(t)\\&=[5-2e^{-t}][3-4e^{-t}+e^{-2t}][-(9-6e^{-t}+e^{-2t})]-[-(9-6e^{-t}+e^{-2t})]^2\\&=-216+432e^{-t}-342e^{-2t}+134e^{-3t}-26e^{-4t}+2e^{-5t}\\&<-216+432e^{-t}+134e^{-3t}+2e^{-5t}\\&<-216+(432+134+2)e^{-t}=-216+\frac{568}{e^t}\\&<-216+\frac{568}{2^{10}}<-215\end{aligned}$$

所以当$10\leqslant t<+\infty$时，　$|\Delta(t)|>215$

(iii) $$\varepsilon=\min_{10<t<+\infty}\left\{\frac{\eta|\Delta(t)|}{18M^2+10M+1},\ \frac{\eta|\Delta(t)|}{10M+3}\right\}$$

$$=\min_{10<t<+\infty}\frac{|\Delta(t)|}{4769}>\frac{215}{4769}>\frac{4}{512}\qquad(\text{其中}\eta=1,\ M=16)$$

从而可知

$$\max_{10<t<+\infty}\left\{\left|\frac{da(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{db(t)}{dt}\right|,\ \left|\frac{dc(t)}{dt}\right|\right\}<\varepsilon$$

所以定理5的全部条件均被满足，根据定理5可知方程(5.5)的零解不稳定。

参 考 文 献

[1] 秦元勋、王联、王慕秋，缓变系数动力系统的运动稳定性，中国科学，专辑(I)(1979)，242—253.
[2] 秦元勋、王慕秋、王联，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社（1981）.
[3] Курош А. Г.，《高等代数教程》，商务印书馆（1953）.

Instability of Solution for the Third Order Linear Differential Equation with Varied Coefficient

Liao Zong-huang　　Lu De-yuan

(*Guizhou Normal University, Guiyang*)

Abstract

In reference [1] asymptotic stability of dynamic system with slowly changing coefficients for all characteristic roots which have negative real part has been proved by means of Liapunov's second method. In this paper, we give some sufficient conditions of the instability for the third order linear differential equation with varied coefficient, at least one of the characteristic roots of which has positive real part, by means of Liapunov's second method.