应用数学和力学，第9卷第10期(1988年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应数用学和力学编委会编
重庆出版社出版

非梯度型弱连续映射的分歧定理及其应用*

马 天 余庆余

(兰州大学数学系，1987年11月19日收到)

摘 要

本文把M．A．Красносельский关于紧连续映射著名的局部分歧定理推广到弱连续映射，从而可用于应用中缺乏紧性的情形．最后给出对拟线性椭圆方程Dilichlet问题的应用．

分歧理论在近几十年来一直受到极大的重视，因为它与力学、理论物理、生物学等许多学科中的失稳、分叉现象密切相关，有着广泛的实际背景．

对全连续场，M．A．Красносельский[1]用拓扑度理论得出了著名的局部分歧定理，指出线性化算子的奇代数重数特征值必是歧点．以后一些作者，如H．Amann继续在这个方向上做了不少工作[2]，但仍是考虑全连续场的情形．[3]把[1]推广到严格集压缩情形．这些结果有着众多的应用．但是，在实际中也有大量问题所导出的映射的非线性项不紧，甚至不满足严格集压缩的条件，于是无法运用Красносельский定理，从而过去对这类问题所得到的结果较少．在这篇短文中，我们注意到相应非线性映射常常弱连续，而且用到的空间常常是弱紧的这两个事实，把Красносельский定理推广到非线性项弱连续的映射，在一定条件下，克服了缺少紧性的困难．最后给出了它的应用．

我们先建立抽象结果，然后再运用到椭圆边值问题．

定义 设X是Banach空间，$f:X\times R^1\to X$，若对任何有界序列$\{x_n\}\subset X$，有界实数列$\{\lambda_n\}$，当$\lim\limits_{n\to\infty}\langle f(x_n,\lambda_n),x_n\rangle=0$且$x_n\rightharpoonup 0$（弱收敛）时，$\{x_n\}$必有收敛于零的子列，则称$f$满足(A)条件．

以下总设X是Hilbert空间．考虑如下方程的分歧问题

$$f^\lambda(x)=f(x,\lambda)=Ax-\lambda Lx+g(x,\lambda)=0$$

其中，$L:X\to X$是线性全连续算子，$A:X\to X$弱连续且连续可微，$A'(0)=id$（或等价地，$A'(0):X\to X$是线性同胚），

$g:X\times R^1\to X$弱连续且连续可微，而且当$x\to 0$时$\|g(x,\lambda)\|=o(\|x\|)$对有界的$\lambda$一致．

---

* 叶开沅推荐．

中国科学院科学基金资助的课题．

我们有如下结论

定理1 设$f: X\times R^1\to X$如上定义且满足(A)条件，再设$x=0$是$f(x,\lambda_0)$的孤立零点，其中λ_0是L的奇代数重数特征值，则λ_0是方程$f(x,\lambda)=0$的歧点。

说明 因为$f(x,\lambda)=x-\lambda Lx+g(x,\lambda)+Ax-x$，而由$A'(0)=id$知$\|Ax-x\|=o(\|x\|)$，因此我们只需讨论$f(x,\lambda)=x-\lambda Lx+g(x,\lambda)$这种形式的映射。

取$\{e_i\}\subset X$为规范直交基，$X_n=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$，并且不妨设当$n$充分大时，$L$对应于$\lambda_0$的不变子空间（其维数等于$\lambda_0$的代数重数）都属于$X_n$，$P_n: X\to X_n$为标准投影算子。记

$$f_n^\lambda=id-\lambda P_nL+P_ng$$

我们把定理1的证明分解成如下几个部份：

结论1 对任何$\varepsilon>0$充分小，存在$\rho>0$及$N>0$，使当$n\geqslant N$时，$f_n^{\lambda_0\pm\varepsilon}$在$B_\rho^n=\{x\in X_n|\|x\|<\rho\}$中只有唯一零点$x=0$。

证 因为λ_0是L的孤立特征值，因此存在$\varepsilon>0$充分小，使得$\lambda_0\pm\varepsilon$都不是L的特征值。若结论1不成立，则对任何自然数n，存在$x_n\in X_n$，$x_n\neq 0$及$x_n\to 0$（当$n\to\infty$），使$f_n^{\lambda_0\pm\varepsilon}(x_n)=0$，即

$$f_n^{\lambda_0\pm\varepsilon}(x_n)=x_n-(\lambda_0\pm\varepsilon)P_nLx_n+P_ng(x_n,\lambda_0\pm\varepsilon)=0$$

由$\|P_ng(x_n,\lambda_0\pm\varepsilon)\|\leqslant\|g(x_n,\lambda_0\pm\varepsilon)\|$，我们有

$$\|(id-(\lambda_0\pm\varepsilon)P_nL)x_n\|=o(\|x_n\|)$$

另一方面，$id-(\lambda_0\pm\varepsilon)L$有有界逆，而$id-(\lambda_0\pm\varepsilon)P_nL$一致收敛于$id-(\lambda_0\pm\varepsilon)L$。因此，当$n$充分大时，存在与$n$无关的常数$C>0$，使

$$\|(id-(\lambda_0\pm\varepsilon)P_nL)x_n\|\geqslant C\|x_n\|$$

此与上式相矛盾，结论1得证。

结论2 对任$\varepsilon>0$充分小，存在$\rho_1>0$及$N>0$，使当$n\geqslant N$，$|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon$时，$f_n^\lambda$在$\partial B_{\rho_1}^n$上无零点。

证 取$\rho_1>0$使$f(x,\lambda_0)$在$\bar{B}_{\rho_1}$中只有唯一零点$x=0$。若结论2不真，则存在$\varepsilon_n>0$，$\varepsilon_n\to 0$（当$n\to\infty$）及$x_n\in\partial B_{\rho_1}^n$使得$f_n^{\lambda_0\pm\varepsilon_n}(x_n)=0$，从而

$$\langle f_n^{\lambda_0\pm\varepsilon_n}(x_n),\ y\rangle=0,\qquad\forall y\in X_n$$

由f_n^λ的定义易知

$$\langle f^{\lambda_0\pm\varepsilon_n}(x_n),y\rangle=\langle f_n^{\lambda_0\pm\varepsilon_n}(x_n),\ y\rangle=0,\qquad\forall y\in X_n$$

不妨设$x_n\rightharpoonup x_0$，由f^λ的弱连续性，于是

$$\langle f^{\lambda_0}(x_0),y\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle f^{\lambda_0\pm\varepsilon_n}(x_n),y\rangle=0,\qquad\forall y\in X_k,\qquad k=1,2,\cdots$$

再由$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}X_k$在$X$中稠密知$f^{\lambda_0}(x_0)=0$。另一方面，因$x_n\in X_n$，有

$$\langle f^{\lambda_0\pm\varepsilon_n}(x_n),\ x_n\rangle=0$$

由(A)条件及$x_n\in\partial B_{\rho_1}$故$x_0\neq 0$，此与$f^{\lambda_0}(x)$在$\bar{B}_{\rho_1}$中只有唯一零点$x=0$矛盾。结论2成立。

结论3 λ_0是$f(x,\lambda)=0$的歧点。

证 任取$\varepsilon>0$充分小，取$\rho_1>\rho>0$分别如结论2和结论1。由结论2和拓扑度的同伦不变性可得

$$\deg(f_n^{\lambda_0-\varepsilon},\ B_{\rho_1}^n,\ 0)=\deg(f_n^{\lambda_0+\varepsilon},\ B_{\rho_1}^n,\ 0)$$

先假定 $f_n^{\lambda_0-\varepsilon}$ 在 $B_{\rho_1}^n$ 中只有唯一零点$x=0$，则由孤立不动点指数公式[4]知

$$\deg(f_n^{\lambda_0-\varepsilon},\ B_{\rho_1}^n,0)=\mathrm{index}[f_n^{\lambda_0-\varepsilon},0]$$
$$=\mathrm{index}[id-(\lambda_0-\varepsilon)P_nL,0]=(-1)^{\beta_n}$$

其中β_n为$(\lambda_0-\varepsilon)P_nL$在$(0,1)$内所有特征值代数重数之和。当$n$充分大时，$\beta_n$等于$(\lambda_0-\varepsilon)L$在$(0,1)$内所有特征值的代数重数之和$\beta$。

再考虑 $f_n^{\lambda_0+\varepsilon}$，由于 $f_n^{\lambda_0+\varepsilon}$ 在B_ρ^n内只有唯一零点（结论1），因此当n充分大时有

$$\deg(f_n^{\lambda_0+\varepsilon},B_\rho^n,0)=\mathrm{index}[id-(\lambda_0+\varepsilon)P_nL,\ 0]=(-1)^{\beta_n+\beta_0}$$

这里β_0为λ_0的代数重数（因为当n充分大时L对应于λ_0的不变子空间属于X_n，故λ_0也是 P_nL的特征值，而且其代数重数等于λ_0关于L的代数重数）。由以上三式，我们有

$$\deg(f_n^{\lambda_0+\varepsilon},\ B_{\rho_1}^n,0)\neq\deg(f_n^{\lambda_0+\varepsilon},B_\rho^n,0)$$

这说明 $f_n^{\lambda_0+\varepsilon}(x)=0$在 $B_{\rho_1}^n\backslash B_\rho^n$内至少还有一个非零解$x_n\neq0$。令$x_n\rightharpoonup x_0$。由等式

$$\langle f^{\lambda_0+\varepsilon}(x_n),x_n\rangle=\langle f_n^{\lambda_0+\varepsilon}(x_n),x_n\rangle=\langle 0,x_n\rangle=0$$

和(A)条件，可知$x_0\neq0$。再由

$$\langle f^{\lambda_0+\varepsilon}(x_n),\ y\rangle=\langle f_n^{\lambda_0+\varepsilon}(x_n),y\rangle=\langle 0,y\rangle=0,\qquad \forall y\in X_n$$

及$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ 在X中稠，可知 $f^{\lambda_0+\varepsilon}(x_n)=0$。再用$f^\lambda$的弱连续性，得$f(x_0,\lambda_0+\varepsilon)=0$。

若$f_n^{\lambda_0-\varepsilon}$ 在 $B_{\rho_1}^n$ 内有非零解，则由结论1，该解 $x_n\in B_{\rho_1}^n\backslash B_\rho^n$。令$x_n\rightharpoonup x_0$，同样可得$x_0\neq0$，$f(x_0,\ \lambda_0-\varepsilon)=0$。

注意到在结论 2 中，当 $\varepsilon\to0$ 时可取 $\rho_1\to0$。前面已由 Hilbert 空间中闭球是弱闭的指出$x_\varepsilon\in\overline{B}_{\rho_1}^n$（$x_\varepsilon'\in\overline{B}_{\rho_1}^n$），故$\|x_\varepsilon\|\leqslant\rho_1$（$\|x_\varepsilon'\|\leqslant\rho_1$）。

总之，λ_0是方程$f(x,\lambda)=0$的歧点。定理证毕。

下面考虑定理1对如下形式的拟线性椭圆Dilichlet问题的应用。

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=n}(-1)^nD_\alpha[a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u)D_\beta u]+\sum_{|\gamma|\leqslant n}(-1)^{|\gamma|}D_\gamma b_\gamma(x,\Lambda u)$$
$$-\lambda\sum_{|\gamma|\leqslant n-1}(-1)^{|\gamma|}D_\gamma g_\gamma(x,\Lambda u)=0,\qquad x\in\Omega \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0,\ \cdots,\ D^{n-1}u|_{\partial\Omega}=0 \tag{2}$$

这里$\Lambda u=(u,\cdots,D^{n-1}u)$，$\Omega\subset R^m$为有界区域，$a_{\alpha,\beta}$，$b_\gamma$，$g_\gamma$都满足Caratheodory 条件，而且存在$\lambda>0$使

$$\lambda|\xi|^2\leqslant a_{\alpha,\beta}(x,\eta)\xi_\alpha\xi_\beta,\qquad \forall\xi\in R^m \tag{3}$$

还假定

(A₁) 存在一组函数$B_i(x,\eta)$，$i=0,1,\cdots,m$，$B_i(x,0)=0$，使

$$\sum_{|\alpha|=n}b_\alpha(x,\ \Lambda u)D_\alpha u=\sum_{i=1}^{m}D_iB_i(x,\Lambda u)+B_0(x,\Lambda u)$$

(A₂) $\displaystyle\int_\Omega[B_0(x,\Lambda u)+\sum_{|\gamma|\leqslant n-1}b_\gamma(x,\Lambda u)D_\gamma u]dx\geqslant0,\quad \forall u\in C_0^\infty(\Omega)$

(A_3) $a_{\alpha,\beta}(x,\eta), b_\alpha(x,\eta), g_\alpha(x,\eta)$关于$\eta$连续可微，而且$\partial b_\alpha(x,0)/\partial\eta_\gamma=0$，而在$\partial g_\alpha(x,0)/\partial\eta_\gamma$中至少有一项不为零，这里$\eta_\gamma$为$\eta$中对应于$D_\gamma u$的分量。

(A_4) 结构性条件：存在C_1，$C_2>0$，使

$$|a_{\alpha,\beta}(x,\eta)|\leqslant C_1 \tag{4}$$

$$|b_\alpha(x,\eta)|\leqslant C_1|\eta|^{p_\alpha}+C_2 \tag{5}$$

$$|g_\alpha(x,\eta)|\leqslant C_1|\eta|^{q}+C_2 \tag{6}$$

这里$1\leqslant q<(m+2)/(m-2)$，当$|\alpha|=n$时$p_\alpha=m/(m-2)$，当$|\alpha|<n$时 $p_\alpha=(m+2)/(m-2)$。

注 结构性条件(4)～(6)的指数可根据不同的α及分量η_α放宽，这里为了简便兹规定如上。

定理2 在以上假设下，若λ_0是下面线性椭圆 Dilichlet 问题(7)，(2)的奇代数重数特征值，则λ_0是问题(1)，(2)的歧点。

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=n}(-1)^n D_\alpha \bar{a}_{\alpha,\beta}(x)D_\beta u-\lambda\sum_{|\gamma|,|\theta|\leqslant n-1}(-1)^{|\gamma|}D_\gamma g_{\gamma,\theta}(x)D_\theta u=0,\qquad x\in\Omega \tag{7}$$

这里 $\bar{a}_{\alpha,\beta}(x)=a_{\alpha,\beta}(x,0)$，$g_{\gamma,\theta}(x)=\dfrac{\partial g_\gamma(x,0)}{\partial\eta_\theta}$

证明 取$X=W_0^{n,2}(\Omega)$，由(A_2)易知(7)是(1)在$u=0$处的线性化。分别定义映射 A,G: $X\to X$如下：

$$\langle Au,v\rangle=\int_\Omega\Big[\sum_{|\alpha|=|\beta|=n}a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u)D_\beta uD_\alpha v+\sum_{|\gamma|<n}b_\gamma(x,\Lambda u)D_\gamma v\Big]dx$$

$$\langle Gu,v\rangle=\int_\Omega\sum_{|\gamma|\leqslant n-1}g_\gamma(x,\Lambda u)D_\gamma v\,dx$$

为用定理1，只需验证$A,G:X\to X$弱连续，$G'(\theta)$全连续，而且$f=A-\lambda G$满足(A)条件。

首先，由条件(A_3)，(A_4)及Sobolev嵌入定理不难证得A，G是有界映射且连续可微。要证A，G弱连续只需证明，对任$v\in C_0^\infty(\Omega)$，当$u_n\rightharpoonup u_0$时（在X中），$\lim\limits_{n\to\infty}\langle Au_n,v\rangle=\langle Au_0,v\rangle$，$\lim\limits_{n\to\infty}\langle Gu_n,v\rangle=\langle Gu_0,v\rangle$即可。我们只对映射$A$证明（$G$的证明类似）。实则只需验证

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_n)D_\beta u_nD_\alpha v\,dx=\int_\Omega a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_0)D_\beta u_0D_\alpha v\,dx \tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega b_\gamma(x,\Lambda u_n)D_\gamma v\,dx=\int_\Omega b_\gamma(x,\Lambda u_0)D_\gamma v\,dx \tag{9}$$

由紧嵌入定理知，当$1\leqslant q<2m/(m-2)$时，在$W_0^{n-1,q}(\Omega)$中$\Lambda u_n\to\Lambda u_0$。再由条件$(A_4)$及Немыцкий 算子的连续性条件（[5]）知，在$L^1(\Omega)$中 $b_\gamma(x,\Lambda u_n)\to b_\gamma(x,\Lambda u_0)$，因此对任$v\in C_0^\infty(\Omega)$，(9)成立。为证(8)，改写

$$\int_\Omega[a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_n)D_\beta u_nD_\alpha v-a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_0)D_\beta u_0D_\alpha v]dx$$

$$=\int_\Omega a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_0)D_\alpha v(D_\beta u_n-D_\beta u_0)dx$$

$$+\int_\Omega D_\beta u_nD_\alpha v[a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_n)-a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_0)]dx$$

因为在$W_0^{n,2}(\Omega)$中$u_n\rightharpoonup u_0$，$a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_0)D_\alpha v\in L^2(\Omega)$。再由线性算子$Iu=D_\alpha u$，$|\alpha|\leqslant n$，$I$：$W_0^{n,2}(\Omega)\to L^2(\Omega)$有界，可知$D_\alpha u_n\rightharpoonup D_\alpha u_0$在$L^2(\Omega)$中，故

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_0)D_\alpha v(D_\beta u_n-D_\beta u_0)dx=0$$

再由(4)及Немыцкий算子的连续性条件知，在$L^q(\Omega)$中$(1\leqslant q<\infty)$ $a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_n)\to a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_0)$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega D_\beta u_n D_\alpha v[a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_n)-a_{\alpha,\beta}(x,\Lambda u_0)]dx=0$$

对一切$v\in C_0^\infty(\Omega)$成立，因此(8)成立。

下面证明$A-\lambda G$满足(A)条件。

由(3)，(A_1)，(A_2)我们可以得到，对任$u\in X$有

$$\langle Au,\ u\rangle\geqslant\lambda\int_\Omega|D^n u|^2dx+\int_\Omega\sum_{i=1}^m D_iB_i(x,\Lambda u)dx$$

$$+\int_\Omega\Big[B_0(x,\ \Lambda u)+\sum_{|\gamma|\leqslant n-1}b_\gamma(x,\Lambda u)D_\gamma u\Big]dx\geqslant\lambda\int_\Omega|D^n u|^2dx \tag{10}$$

假设在X中$u_n\rightharpoonup 0$，则在$W_0^{n-1,q}(\Omega)$中$(1\leqslant q<2m/(m-2))$，$u_n\to 0$。再由(6)可得

$$|g_\gamma(x,\eta)\eta_\gamma|\leqslant C_3|\eta|^{q+1}+C_4,\quad q+1<\frac{2m}{m-2} \tag{11}$$

从在$W_0^{n-1,q}(\Omega)$中$u_n\to 0$及(11)，我们可推得

$$\lim_{n\to\infty}\langle Gu_n,\ u_n\rangle=\int_\Omega\sum_{|\gamma|\leqslant n-1}g_\gamma(x,\Lambda u_n)D_\gamma u_n dx=0 \tag{12}$$

从(10)，(12)，再由Poincaré不等式可知$A-\lambda G$满足(A)条件。

$G'(\theta)$全连续由(A_3)及(6)保证。证毕。

说明　可类似考虑$\Omega\subset R^m$无界的情形。

参　考　文　献

[1] Красносельский М. А., *Топологические Методы в Теории Нелинейных Интегральных Уравнений*, Москва (1956).

[2] Amann, H., Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Review*, **18** (1976), 620—709.

[3] Thomas, J. W., A bifurcation theorem for k-set contractions, *Pacific J. of Math.*, **44**, 2 (1973), 749—756.

[4] 陈文嫄，《非线性泛函分析》，甘肃人民出版社 (1982).

[5] 郭大钧，《非线性泛函分析》，山东科学技术出版社 (1985).

A Bifurcation Theorem of Nongradient, Weakly Continuous Maps and Applications

Ma Tian Yu Qing-yu

(*Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou*)

Abstract

In this paper, M. A. Krasnosels'kii's local bifurcation theorem for compactly continuous mappings is extended to weakly continuous mappings. So we can surmount the difficulty of lacking compactness in application. Lastly, we apply it to Dilichlet problem of quasilinear elliptic equation.