应用数学和力学，第9卷第10期(1988年10月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类捕食者-食饵系统的全局结构*

丁 孙 荭

（中国科学院成都分院数理科学研究室，1985年10月13日收到）

摘　要

本文中我们证明了关于一般捕食者-食饵系统不存在闭轨线的定理，即文中定理2.应用这一定理和关于捕食者-食饵系统极限环的存在唯一性定理[1]，我们完成了在各种参数条件对一个具体的捕食者-食饵系统模型[2]

$$\dot{x}=\gamma x(1-x/K)-yx^n/(a+x^n)$$
$$\dot{y}=y(\mu x^n/(a+x^n)-D)\qquad(n=1,2)$$

的研究.

捕食者-食饵系统是研究生态系统的最简单和最典型的数学模型．目前国内外不少生态学家和数学家都致力于建立各种捕食者-食饵系统的数学模型并研究这些数学模型，进而对这类生态系统作出科学的解释．然而完全彻底地研究清楚某一类捕食者-食饵系统并非是容易的工作．作者在文[1]和本文中对一般的捕食者-食饵系统给出存在唯一周期解和不存在周期解的两个定理．将这两个定理应用到文[2]提出的一类捕食者-食饵系统．彻底完成了对这类捕食者-食饵系统各种参数下全局结构的研究工作．

文[2]给出一类具体的捕食者-食饵系统的数学模型

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\gamma x\left(1-\frac{x}{K}\right)-y\frac{x^n}{a+x^n}\\ \dot{y}&=y\left(\mu\frac{x^n}{a+x^n}-D\right)\qquad(n=1,2)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

这里 x，y 都是 t 的函数，$\dot{x}=dx/dt$，$\dot{y}=dy/dt$，γ，a，μ 和 D 都是正参数．

我们可以把(1)推广为一般形式

$$\dot{x}=\varphi(x)-y\psi(x),\quad \dot{y}=y(\mu\psi(x)-D)\tag{2}$$

其中，$\varphi(0)=0$，$\varphi(x)\in C^1(0,\infty)$，$\psi(0)=0$，$\psi(x)\in C^1(0,\infty)$且$\psi'(x)>0$，$\mu$和$D$为正参数．令 $F(x)=\varphi(x)/\psi(x)$，在区域 $\Omega=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0\}$ 中(2)化为等价形式

$$\dot{x}=\varphi(x)(F(x)-y)=g(x,y),\quad \dot{y}=y(\mu\psi(x)-D)=h(x,y)\tag{3}$$

按照生态学的意义，我们仅须在区域 Ω 中研究(1)～(3)．设点 $P(\lambda,\ F(\lambda))$是(2)或(3)的奇点（如果存在奇点），其中 λ 是方程 $\mu\psi(x)-D=0$ 的正解．因为 $\psi'(x)>0$，所以方程至多存在一个正解．故(2)或(3)在 Ω 中至多存在一个奇点．文[1]中给出了(2)或(3)

* 钱伟长推荐．
国家自然科学基金资助的课题．

的极限环存在唯一性定理及定理的注。

定理1 (见[1]) 对于(3)，$P(\lambda,F(\lambda))$是Ω中的奇点，若$F'(\lambda)\neq 0$，$F'(x)\psi(x)/(\mu\psi(x)-D)$在区间$(0,\lambda)$和$(\lambda,+\infty)$中不增，那么(3)在$\Omega$中至多有一个稳定的极限环。

应用定理1及其注我们在[1]中证明了方程(1)，$n=1$时，当$K>2\lambda+a$和$n=2$时$K>2D\lambda/(2D-\mu)$在区域Ω中存在唯一的稳定的极限环。本文给出关于方程(2)或(3)在Ω中不存在周期解的定理2，并用这个定理完成了对系统(1)在各种参数下的全局结构的研究。如同文[1]定义函数

$$H(x)=\int_{\lambda}^{x}\frac{(\mu\psi(\xi)-D)d\xi}{\psi(\xi)},\qquad x>0$$

定理2 若方程组

$$H(x)=H(y),\ F(x)=F(y) \tag{4}$$

的一切正解x，y，都满足$x=y$，那么方程(3)在Ω中没有闭轨线。

证明 因为$\psi(0)=0$，$\psi'(x)>0$。所以当$x>0$时，$\psi(x)>0$。λ是方程$\mu\psi(x)-D=0$在$(0,+\infty)$中的唯一正解，所以$H(x)$在$(0,\lambda)$中单调下降，在$(\lambda,+\infty)$中单调上升。$H(x)$在区间$(0,\lambda]$和$[\lambda,+\infty)$中分别有反函数，分别记为$x_2(H)$和$x_1(H)$。设方程(3)在Ω中有闭轨Γ,Γ必环绕$P(\lambda,F(\lambda))$。令Γ的曲线方程为

$$x=\Gamma_1(y),\qquad 当\ \lambda\leqslant x$$
$$x=\Gamma_2(y),\qquad 当\ 0<x\leqslant\lambda$$

且存在$y_{\min}$和$y_{\max}$，使得$\Gamma_1(y_{\min})=\Gamma_2(y_{\min})=\Gamma_1(y_{\max})=\Gamma_2(y_{\max})=\lambda$。由方程(3)，对于闭轨$\Gamma$成立($y_{\min}\leqslant y\leqslant y_{\max}$)：

$$\frac{dH(\Gamma_1(y))}{dy}=\frac{F(x_1(H(\Gamma_1(y))))-y}{y} \tag{5}$$

$$\frac{dH(\Gamma_2(y))}{dy}=\frac{F(x_2(H(\Gamma_2(y))))-y}{y} \tag{5$'$}$$

(5)和(5)$'$可以等价地表示为边值问题

$$\frac{dH}{dy}=\frac{F(x_1(H))-y}{y},\ H|_{y_{\min}}=H|_{y_{\max}}=0 \tag{6}$$

和

$$\frac{dH}{dy}=\frac{F(x_2(H))-y}{y},\ H|_{y_{\min}}=H|_{y_{\max}}=0 \tag{6$'$}$$

都有解。可以证明$F(x_1(H))\neq F(x_2(H))$，当$H>0$。因此，由微分方程比较定理，边值问题(6)和(6)$'$不能同时有解，这与(3)在Ω中存在闭轨的假设矛盾。以下证明$F(x_1(H))\neq F(x_2(H)$，当$H>0$。设存在$H^*>0$，使得$F(x_1(H^*))=F(x_2(H^*))$。令$x^*=x_1(H^*)$，$y^*=x_2(H^*)$。故而$F(x^*)=F(y^*)$，$H(x^*)=H(y^*)=H^*$，且$x^*>\lambda>y^*>0$，与定理$F(x_1(H))\neq F(x_2(H))$，当$H>0$的条件矛盾。定理证毕。

定理3 捕食者-食饵系统模型(1)在Ω中的全局结构只有三种类型：

(a) Ω中有唯一的稳定的极限环，Ω中的轨线都渐近于这个极限环。

(b) Ω中有稳定奇点$P(\lambda,F(\lambda))$，Ω中一切轨线都渐近于$P(\lambda,F(\lambda))$。

(c) Ω中没有奇点，Ω中轨道渐近于x轴上的点$(K,0)$。

各种参数条件下(1)的全局结构的类型是：

当 $n=1$

参数分布	$\mu>D>0$		$D\geqslant\mu>0$
	$K>(\mu+D)a/(\mu-D)$	$K\leqslant(\mu+D)a/(\mu-D)$	
全局结构类型	(a) 型	(b) 型	(c) 型

当 $n=2$

参数分布	$\mu\geqslant 2D>0$	$2D>\mu>D>0$		$D\geqslant\mu>0$
		$K>K^*$	$K\leqslant K^*$	
全局结构类型	(b) 型	(a) 型	(b) 型	(c) 型

其中，$K^*=2D\sqrt{aD/(\mu-D)}/(2D-\mu)$。

证明定理 3 之前我们给出

引理 4 设 $0<y\leqslant x$，那么有不等式

$$\frac{x-y}{x+y}\leqslant\frac{1}{2}(\ln x-\ln y) \tag{7}$$

等号当且仅当$x=y$时成立。

证明 设 $s\geqslant 1$，则 $(s-1)^2\geqslant 0$，进而有

$(s+1)^2>4s$，故

$$2/(s+1)^2\leqslant 1/2s$$

积分上式，

$$\int_1^r\frac{2ds}{(s+1)^2}\leqslant\frac{1}{2}\int_1^r\frac{ds}{s}$$

得

$$1-\frac{2}{r+1}\leqslant\frac{1}{2}\ln r \tag{8}$$

令$r=x/y$代入(8)式，即可得(7)。如果$x=y$，则(7)式等号成立。反之(7)式等号成立，则(8)式的等号亦成立，故必有$r=1$，$x=y$。引理证毕。

定理 3 的证明 当 $n=1$，$K>2\lambda+a=(\mu+D)a/(\mu-D)$ 和 $n=2$，$2D>\mu>D>0$，$K>2D\sqrt{aD/(\mu-D)}/(2D-\mu)$时(1)在 Ω 中有唯一的稳定极限环(见[1])。即属于(a)型。现在证明其他情况：

(i) 当 $n=1$，$\mu>D>0$，$K\leqslant 2\lambda+a=(\mu+D)a/(M-D)$

$$H(x)=(\mu-D)(x-\lambda)-Da(\ln x-\ln\lambda)$$

方程组(4)化为

$$(\mu-D)(x-y)-Da(\ln x-\ln y)=0,\ (K-a)(x-y)-(x^2-y^2)=0 \tag{9}$$

如果方程组(9)有解 x^*，y^*，$x^*\neq y^*$，不妨设 $0<y^*<x^*$，那么

$$(\mu-D)(x^*-y^*)-Da(\ln x^*-\ln y^*)=0,\ (K-a)-(x^*+y^*)=0 \tag{10}$$

由于 $K\leqslant(\mu+D)a/(\mu-D)$，故由(10)得

$$\frac{x^*-y^*}{x^*+y^*}=\frac{Da}{(\mu-D)(K-a)}(\ln x^*-\ln y^*)\geqslant\frac{1}{2}(\ln x^*-\ln y^*)$$

与引理 4 矛盾。故方程组(9)没有这样的正解 x，y，$x\neq y$。由定理 2，(1)在 Ω 中没有闭

轨，不难看出这时 $P(\lambda, F(\lambda))$ 为稳定奇点．故(1)的全局结构是(b)型．

(ii) $n=1$, $\mu\leqslant D$

这时(1)在 Ω 中没有奇点，而 $(K, 0)$ 是(1)在 $\overline{\Omega}=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ 中的稳定结点，$(0, 0)$ 是鞍点．Ω 中的轨线渐近趋于点 $(K, 0)$．全局结构是(c)型．

(iii) $n=2$, $0<D<\mu<2D$, $K\leqslant K^*$ 方程组(4)为

$$\left.\begin{aligned}&\left(1-\frac{x}{K}\right)\frac{a+x^2}{x}=\left(1-\frac{y}{K}\right)\frac{a+y^2}{y}\\&(\mu-D)(x-\lambda)+Da\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\lambda}\right)=(\mu-D)(y-\lambda)+Da\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

方程组(11)没有这样的正解 x^*, y^*, $x^*\neq y^*$．若不然不妨设 $0<y^*<x^*$，方程组(11)化为

$$-a+x^*y^*-(x^*+y^*)x^*y^*/K=0,\quad x^*y^*=\lambda^2\tag{12}$$

由(12)得

$$x^*+y^*=(\lambda^2-a)K/\lambda^2=(2D-\mu)K/D\leqslant 2\sqrt{\frac{aD}{\mu-D}}=2\lambda\tag{13}$$

故有

$$2\lambda=2\sqrt{x^*y^*}<(x^*+y^*)\leqslant 2\lambda,$$

矛盾．由定理 2，(1)在 Ω 中没有闭轨．全局渐近于稳定奇点 $P(\lambda, F(\lambda))$．全局结构是(b)型．

(iv) $n=2$, $\mu\geqslant 2D>0$

类似于情况(iii)，可得方程组(11)和(12)，由(12)得

$$0<x^*+y^*=(2D-\mu)K/D\leqslant 0,$$

矛盾．由定理 2，得到与(iii)类似的结论．

(v) $n=2$, $0<\mu\leqslant D$

与(ii)类似，结论相同．

定理证毕．

最后给出(a)，(b)，(c)三种类结构的定性图．

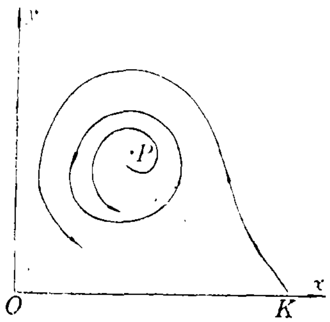

图 1　(a)型结构

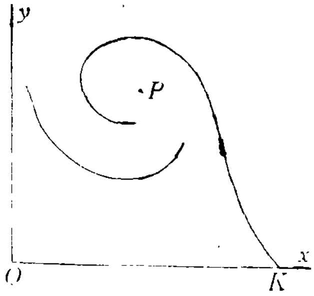

图 2　(b)型结构

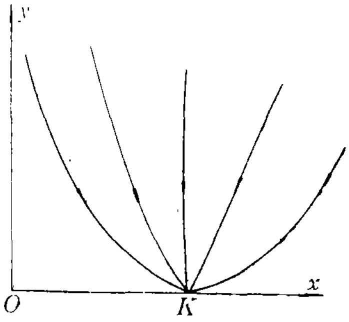

图 3　(c)型结构

(a)型结构，系统最终趋于动态平衡状态，出现捕食者和食饵数量周期变化现象．(b)型结构，系统最终趋于一个平衡点，是一种静态平衡．(c) 型结构，系统中捕食者的出生率小于死亡率，即

$$\dot{y}=y(\mu x^n/(a+x^n)-D)<0$$

捕食者数量逐渐减少，最终趋于消亡。食饵数量达到极值点，$\dot{x}=x(1-x/K)=0$，故 $x=K$。此时这个捕食者-食饵系统被破坏。

参 考 文 献

[1] 丁孙荭，捕食者-食饵(predator-prey)系统极限环的唯一性，科学通报，13 (1985),785—788.

[2] Hsu, S.B., S.P. Hubbell and P. Waltman, Competing predator, SIAM, *J. Appl. Math.*, 35 (1978), 617—625.

[3] Hastings, Alan, Global stability of two species systems, *J. Math. Biology*, 5 (1978), 399—403.

[4] Cheng Kuo-sheng, Uniqueness of limit cycle for a predator-prey system, SIAM, *J. Math. Anal.*, 12, 4 (1981), 541—548.

Global Structure of a Kind of Predator-Prey System

Ding Sun-hong

(Institute of Mathematical Sciences, Chengdu Branch, Academia Sinica, Chengdu)

Abstract

In this paper we prove a theorem, theorem 2, on nonexistence of closed trajectory for a general predator-prey system. Then, using this theorem and another theorem on existence and uniqueness of limit cycle for predator-prey system[1], we complete the investigation of a concrete model of predator-prey system[2]

$$\dot{x}=\gamma x(1-x/K)-yx^n/(a+x^n)$$
$$\dot{y}=y(\mu x^n/(a+x^n)-D) \qquad n=1,2$$

under the conditions of all kinds of parameters.