

中心裂纹夹紧矩形板的拉伸*

汤任基 王怡清

(兰州大学) (江苏化工学院)

(1987年4月6日收到)

摘 要

本文利用单裂纹基本解及无限板条的 Fourier 变换解, 将含有中心裂纹的夹紧矩形板的拉伸问题, 化归为解一组奇异积分方程, 进而使用 Gauss-Jacobi 求积公式, 计算了中心裂纹的应力强度因子及夹紧边的法向应力, 在应力强度因子表中还作了数值结果比较。

一、引 言

含有中心裂纹的夹紧矩形板的拉伸, 在断裂力学的试验中有重要意义, 由于数学上的困难, 还没有精确解法, 本文利用单裂纹基本解^[1]及无限板条的 Fourier 变换解, 将含中心裂纹的夹紧矩形板的拉伸问题, 化归为解一组奇异积分方程, 进而使用 Gauss-Jacobi 求积公式, 计算了裂纹的应力强度因子及矩形板夹紧边界上的法向应力, 数值结果与 Bowie^[2]的比较符合很好。

二、两个基本解

为了将已知结果直接用于图1所示的裂纹问题, 下面给出两个基本解:

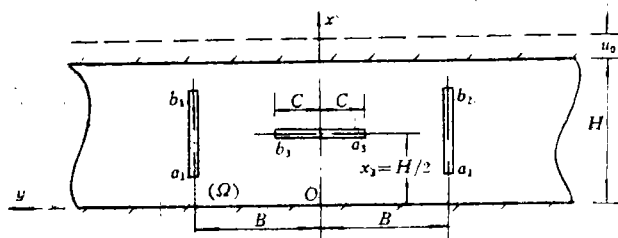


图 1

* 本文项目得到中国科学院基金委员会的资助。

1. 裂纹解

若裂纹关于Ox轴对称(图1),则在板条上边界有拉伸位移 u_0 时,可对裂纹 (a_i, b_i) ($i=1, 2, 3$)定义如下非零未知位错密度函数:

$$g_i(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [v_i(x, y+0) - v_i(x, y-0)] \quad (2.1)$$

$$(x, y \in a_i, b_i; i=1, 2)$$

$$h_i(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} [u_i(x, y+0) - u_i(x, y-0)] \quad (2.2)$$

$$g_3(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} [u_3(x+0, y) - u_3(x-0, y)], \quad (x, y \in a_3, b_3) \quad (2.3)$$

由对称性可知, $g_1(x, B) = g_2(x, -B)$ 及 $h_1(x, B) = -h_2(x, -B)$.

利用文[1]的结果,以上位错密度函数各自产生的位移为:

$$u_i(x, y) = -\frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{a_i}^{b_i} \left\{ \frac{\kappa-1}{4} \ln[(x-t)^2 + (y-y_i)^2] - \frac{(x-t)^2}{(x-t)^2 + (y-y_i)^2} \right\} g_i(t, y_i) dt - \frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{a_i}^{b_i} \left\{ \frac{\kappa+1}{2} \cdot \arctan \frac{y-y_i}{x-t} + \frac{(x-t)(y-y_i)}{(x-t)^2 + (y-y_i)^2} \right\} h_i(t, y_i) dt \quad (2.4)$$

$$v_i(x, y) = -\frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{a_i}^{b_i} \left\{ \frac{\kappa+1}{2} \arctan \frac{y-y_i}{x-t} - \frac{(x-t)(y-y_i)}{(x-t)^2 + (y-y_i)^2} \right\} \cdot g_i(t, y_i) dt + \frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{a_i}^{b_i} \left\{ \frac{\kappa-1}{4} \ln[(x-t)^2 + (y-y_i)^2] + \frac{(x-t)^2}{(x-t)^2 + (y-y_i)^2} \right\} h_i(t, y_i) dt \quad (2.5)$$

$$u_3(x, y) = -\frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{a_3}^{b_3} \left\{ \frac{\kappa+1}{2} \arctan \frac{x-x_3}{t-y} - \frac{(t-x)(x-x_3)}{(t-y)^2 + (x-x_3)^2} \right\} \cdot g_3(x_3, t) dt + \frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{a_3}^{b_3} \left\{ \frac{\kappa-1}{4} \ln[(t-y)^2 + (x-x_3)^2] + \frac{(t-y)^2}{(t-y)^2 + (x-x_3)^2} \right\} h_3(x_3, t) dt \quad (2.6)$$

$$v_3(x, y) = \frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{a_3}^{b_3} \left\{ \frac{\kappa-1}{4} \ln[(t-y)^2 + (x-x_3)^2] - \frac{(t-y)^2}{(t-y)^2 + (x-x_3)^2} \right\} g_3(x_3, t) dt + \frac{1}{\pi(1+\kappa)} \int_{a_3}^{b_3} \left\{ \frac{\kappa+1}{2} \cdot \arctan \frac{x-x_3}{t-y} + \frac{(t-y)(x-x_3)}{(t-y)^2 + (x-x_3)^2} \right\} h_3(x_3, t) dt \quad (2.7)$$

以上公式中 $\kappa=3-4\nu$ 为平面应变, $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ 为平面应力, ν 为泊松比.

2. Fourier 变换解

对平面应变问题的位移微分方程作 Fourier 变换

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.9)$$

则得图 1 中完整无限板条的 Fourier 变换通解为:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y) = & \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \left\{ \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} + x \right) A_2 \right] \exp[-\alpha x] \right. \\ & \left. + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\alpha} - x \right) A_4 \right] \exp[\alpha x] \right\} \cos \alpha y d\alpha \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\bar{v}(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \left[(A_1 + A_2 x) \exp[-\alpha x] + (A_3 + A_4 x) \exp[\alpha x] \right] \sin \alpha y d\alpha \quad (2.11)$$

以上公式中系数 $A_1 \sim A_4$ 为关于参变量 α 的未知函数, 由问题给定的边界条件确定。

三、裂纹问题的建立

现在考虑图 1 所示裂纹问题, 设此无限板条的上边界有一垂直均匀位移 u_0 , 裂纹表面均无外力作用, 从断裂力学的角度来说, 只需研究它的摄动问题。很明显, 此问题的解可由上面给出的两个基本解叠加构造, 所以区域 Ω 中的位移可表为:

$$u(x, y) = \bar{u}(x, y) + \sum_{j=1}^3 u_j(x, y) \quad (3.1)$$

$$v(x, y) = \bar{v}(x, y) + \sum_{j=1}^3 v_j(x, y) \quad (3.2)$$

另外, 此裂纹问题的边界条件为:

$$u(0, y) = v(0, y) = u(H, y) = v(H, y) = 0 \quad (3.3)$$

$$\sigma_{yy}(x, y_1) = -p_1(x), \quad \sigma_{zy}(x, y_1) = 0, \quad (y_1 = B, x \in a_1 b_1) \quad (3.4)$$

$$\sigma_{yy}(x, y_2) = -p_2(x), \quad \sigma_{zy}(x, y_2) = 0, \quad (y_2 = -B, x \in a_2 b_2) \quad (3.5)$$

$$\sigma_{zz}(x_3, y) = -p_3(y), \quad (x_3 = H/2, y \in a_3 b_3) \quad (3.6)$$

式中 $\sigma_{ij}(i, j = x, y)$ 为由位移(3.1)~(3.2)方程计算得到的应力, $p_j(j=1, 2, 3)$ 为作用于裂纹表面的法向摄动载荷, 由以下公式给出。

$$p_1(x) = p_2(x) = \frac{3-\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{\mu u_0}{H} \quad (3.7)$$

$$p_3(y) = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \cdot \frac{\mu u_0}{H} \quad (3.8)$$

式中 μ 为剪切弹性模量。

若将位移代入第一个边界条件(3.3), 再对此作 Fourier 逆变换, 则系数 $A_1 \sim A_4$ 由以下公式确定:

$$\begin{aligned} A_1(\alpha) = & D^{-1}(\alpha) \{ -2\alpha^2 H^2 L_1 + (\kappa R_2 - 2\alpha^2 H^2) L_2 + \kappa \alpha H R_3 L_3 \\ & - [(\kappa^2 - \kappa \alpha H) R_3 - 2\kappa \alpha H \exp[-\alpha H]] L_4 \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$A_2(\alpha) = D^{-1}(\alpha) [-\alpha R_1 L_1 - \alpha R_2 L_2 - \alpha(\kappa R_3 + 2\alpha H \exp[\alpha H]) L_3 + \alpha(\kappa R_3 - 2\alpha H \exp[\alpha H]) L_4] \quad (3.10)$$

$$A_3(\alpha) = D^{-1}(\alpha) \{2\alpha^2 H^2 L_1 + (\kappa R_5 - 2\alpha^2 H^2) L_2 - \kappa \alpha H R_3 L_3 + [(\kappa^2 + \kappa \alpha H) R_3 - 2\kappa \alpha H \exp[\alpha H]] L_4\} \quad (3.11)$$

$$A_4(\alpha) = D^{-1}(\alpha) [\alpha R_4 L_1 + \alpha R_5 L_2 + (\kappa \alpha R_3 + 2\alpha^2 H \exp[-\alpha H]) L_3 + [\kappa \alpha R_3 - 2\alpha^2 H \exp[-\alpha H]] L_4] \quad (3.12)$$

式中

$$D(\alpha) = \kappa^2 (\exp[2\alpha H] + \exp[-2\alpha H]) - 2\kappa^2 - 4\alpha^2 H^2 \quad (3.13)$$

$$R_1(\alpha) = -R_4(-\alpha) = -\kappa \exp[2\alpha H] - 2\alpha H + \kappa \quad (3.14)$$

$$R_2(\alpha) = R_6(-\alpha) = \kappa \exp[2\alpha H] - 2\alpha H - \kappa \quad (3.15)$$

$$R_3(\alpha) = \exp[\alpha H] - \exp[-\alpha H] \quad (3.16)$$

函数 $L_s (s=1, 2, 3, 4)$ 是由位错密度函数表示的积分, 因此问题已归结为寻找定义对于裂纹的三个未知位错密度函数 g_1, g_3 和 h_1 . L_s 列于附录1.

四、中心裂纹夹紧矩形板的积分方程

考察图1, 让裂纹 $(a_1 b_1, a_2 b_2)$ 与夹紧边相交, 即令 $a_1 = a_2 = 0, b_1 = b_2 = H$, 则未知位错密度函数具有 $g_1(x, B) = g_2(x, -B) = g_1(x), h_1(x, B) = -h_2(x, -B) = h_4(x)$, 及 $g_3(x, y) = g_3(y)$, 这样在用裂纹的边界条件后, 便得含中心裂纹的夹紧矩形板的积分方程为:

$$\int_0^H \left[\frac{1}{t-x} + K_{11s}(x, t) + K_{11}(x, t) \right] g_1(t) dt + \int_0^H K_{14}(x, t) h_4(t) dt + \int_{-c}^c K_{13}(x, s) g_3(s) ds = -\frac{\pi(1+\kappa) p_1(x)}{2\mu} \quad (x \in OH, 0 < x < H) \quad (4.1)$$

$$\int_0^H \left[K_{41}(x, t) g_1(t) dt + \int_0^H \left[\frac{1}{t-x} + K_{44s}(x, t) + K_{44}(x, t) \right] h_4(t) dt + \int_{-c}^c K_{43}(x, s) g_3(s) ds = 0 \quad (x \in OH, 0 < x < H) \quad (4.2)$$

$$\int_0^H K_{31}(y, t) g_1(t) dt + \int_0^H K_{34}(y, t) h_4(t) dt + \int_{-c}^c \left[-\frac{1}{s-y} + K_{33}(y, s) \right] g_3(s) ds = -\frac{\pi(1+\kappa) p_3(y)}{2\mu}, \quad (y \in a_3 b_3, -c < y < c) \quad (4.3)$$

式中 K_{ij} 均为有界核, 由于公式太长, 故未列出, 留下的 $K_{11s}(x, t)$ 和 $K_{44s}(x, t)$ 是奇异的, 称为广义柯西核, 表达式如下:

$$K_{11s}(x, t) = K_{44s}(x, t) = \frac{1}{2\kappa} \left[(3-\kappa^2) + 12x \frac{\partial}{\partial x} + 4x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{1}{t+x} - \frac{1}{2\kappa} \left[(3-\kappa^2) - 12(H-\kappa) \frac{\partial}{\partial x} + 4(H-x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{1}{2H-t-x} \quad (4.4)$$

此外, 因为板条的上下边界刚性夹紧, 所以积分方程(4.1)~(4.3)的解在各裂纹上(包括内裂纹 $a_3 b_3$) 满足以下单值性条件:

$$\int_0^H g_1(t) dt = \int_0^H h_4(t) dt = \int_{-c}^c g_3(s) ds = 0 \quad (4.5)$$

使用文[3]中的函数理论, 可以证明解答 g_1 和 h_4 必取以下形式

$$g_1(t) = \frac{g_1^*(t)}{t^\alpha (H-t)^\alpha}, \quad h_4(t) = \frac{h_4^*(t)}{t^\alpha (H-t)^\alpha} \quad (4.6)$$

式中 $g_1^*(t)$ 和 $h_4^*(t)$ 均为 Hölder 连续函数, 奇性指数 α 由以下特徵方程决定^[4]

$$2\kappa \cos \alpha \pi + 4(\alpha-1)^2 - (\kappa^2 + 1) = 0 \quad (4.7)$$

因为中心裂纹 ($a_3 b_3$) 是内裂纹, 故解 $g_3(s)$ 可表为:

$$g_3(s) = \frac{g_3^*(s)}{\sqrt{(s+c)(c-s)}} \quad (4.8)$$

式中 $g_3^*(s)$ 在裂纹线 ($-c, c$) 上亦为 Hölder 连续函数.

在目前情形, 以上方程 (4.1)~(4.3) 是一组广义柯西奇异积分方程, 它可利用 Gauss-Jacobi 求积公式进行求解^[4], 在求得未知函数 $g_3(s)$ 后, 即可按以下公式计算中心裂纹 ($a_3 = -c, b_3 = c$) 的应力强度因子:

$$k_1(a_3) = k_1(b_3) = \lim_{y \rightarrow a_3-0} \sqrt{2(a_3-y)} \sigma_{zz}(y, 0) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \lim_{y \rightarrow a_3} \sqrt{2(y-a_3)} g_3(y) \quad (4.9)$$

五、数值方法

为了使积分线段 ($a_1 b_1$) 和 ($a_3 b_3$) 标准化, 令

$$t = -\frac{H}{2} (\tau+1), \quad x = \frac{H}{2} (\rho+1); \quad s = c\xi, \quad y = cr \quad (5.1)$$

且记

$$\tilde{K}_{11}(\rho, \tau) = H[K_{11s}(x, t) + K_{11}(x, t)]/2, \quad \tilde{K}_{14}(\rho, \tau) = HK_{14}(x, t)/2 \quad (5.2)$$

$$\tilde{K}_{13}(\rho, \xi) = cK_{13}(x, s), \quad \tilde{K}_{41}(\rho, \tau) = HK_{41}(x, t)/2 \quad (5.3)$$

$$\tilde{K}_{44}(\rho, \tau) = H[K_{44s}(x, t) + K_{44}(x, t)]/2, \quad \tilde{K}_{43}(\rho, \xi) = cK_{43}(x, s) \quad (5.4)$$

$$\tilde{K}_{31}(r, \tau) = HK_{31}(g, t)/2, \quad \tilde{K}_{34}(r, \tau) = HK_{34}(y, t)/2 \quad (5.5)$$

$$\tilde{K}_{33}(r, \xi) = cK_{33}(y, s) \quad (5.6)$$

及

$$\phi(\tau) = g_1(t), \quad \psi(\tau) = h_4(t), \quad G(\xi) = g_3(s) \quad (5.7)$$

$$\tilde{p}_1(\rho) = \frac{1+\kappa}{2\mu} p_1(x), \quad \tilde{p}_3(r) = \frac{1+\kappa}{2\mu} p_3(y) \quad (5.8)$$

于是方程 (4.1)~(4.3) 及单值性条件 (4.5) 便化为以下标准形式

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\tau-\rho} + \tilde{K}_{11}(\rho, \tau) \right] \phi(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 \tilde{K}_{14}(\rho, \tau) \psi(\tau) d\tau \\ + \int_{-1}^1 \tilde{K}_{13}(\rho, \xi) G(\xi) d\xi = -\pi p_1(\rho) \quad (-1 < \rho < 1) \quad (5.9)$$

$$\int_{-1}^1 \tilde{K}_{41}(\rho, \tau) \phi(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\tau-\rho} + \tilde{K}_{44}(\rho, \tau) \right] \psi(\tau) d\tau$$

$$+\int_{-1}^1 \bar{K}_{43}(\rho, \xi) G(\xi) d\xi = 0 \quad (-1 < \rho < 1) \quad (5.10)$$

$$\int_{-1}^1 \bar{K}_{31}(r, \tau) \phi(\tau) d\tau + \int_{-1}^1 \bar{K}_{34}(r, \tau) \psi(\tau) d\tau \\ + \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\xi - r} + \bar{K}_{33}(r, \xi) \right] G(\xi) d\xi = -\pi \bar{p}_3(r) \quad (-1 < r < 1) \quad (5.11)$$

$$\int_{-1}^1 \phi(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 \psi(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi = 0 \quad (5.12)$$

考虑到关系式(4.6)和(4.8), 则新的未知函数具有以下形式

$$\phi(\tau) = \frac{\phi^*(\tau)}{(\tau+1)^\alpha(1-\tau)^\alpha}, \quad \psi(\tau) = \frac{\psi^*(\tau)}{(\tau+1)^\alpha(1-\tau)^\alpha} \quad (5.13)$$

$$G(\xi) = \frac{G^*(\xi)}{\sqrt{(\xi+1)(1-\xi)}} \quad (5.14)$$

式中 α 由方程(4.7)求出的指数。最后可使用文献[4]中的Gauss-Jacobi求积公式, 将以上已标准化的方程(5.9)~(5.12)化为以下一组代数方程:

$$\sum_{k=1}^N \phi^*(\tau_k) W_k \left[\frac{1}{\tau_k - \rho_j} + \bar{K}_{11}(\rho_j, \tau_k) \right] + \sum_{k=1}^N \psi^*(\tau_k) W_k \bar{K}_{14}(\rho_j, \tau_k) \\ + \sum_{l=1}^M G^*(\xi_l) W_l^* \bar{K}_{13}(\rho_j, \xi_l) = -\pi \bar{p}_1(\rho_j) \quad (j=1, 2, \dots, N-1) \quad (5.15)$$

$$\sum_{k=1}^N \phi^*(\tau_k) W_k \bar{K}_{41}(\rho_j, \tau_k) + \sum_{k=1}^N \psi^*(\tau_k) W_k \left[\frac{1}{\tau_k - \rho_j} + \bar{K}_{44}(\rho_j, \tau_k) \right] \\ + \sum_{l=1}^M G^*(\xi_l) W_l^* \bar{K}_{43}(\rho_j, \xi_l) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N-1) \quad (5.16)$$

$$\sum_{k=1}^N \phi^*(\tau_k) W_k \bar{K}_{31}(r_m, \tau_k) + \sum_{k=1}^N \psi^*(\tau_k) W_k \bar{K}_{34}(r_m, \tau_k) \\ + \sum_{l=1}^M G^*(\xi_l) W_l^* \left[\frac{1}{\xi_l - r_m} + K_{33}(r_m, \xi_l) \right] \\ = -\pi \bar{p}(r_m), \quad (m=1, 2, \dots, M-1) \quad (5.17)$$

$$\sum_{k=1}^N \phi^*(\tau_k) W_k = \sum_{k=1}^N \psi^*(\tau_k) W_k = \sum_{l=1}^M G^*(\xi_l) W_l^* = 0 \quad (5.18)$$

式中 (τ_k, ρ_j) 和 (ξ_l, r_m) 为雅可比多项式的根:

$$P_N^{(-\alpha, -\alpha)}(\tau_k) = 0, \quad P_{N-1}^{(-\alpha+1, -\alpha+1)}(\rho_j) = 0 \quad (5.19)$$

$$P_M^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(\xi_l) = 0, \quad P_{M-1}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(r_m) = 0 \quad (5.20)$$

权 W_k 和 W_l^* 由以下公式给出:

$$W_k = - \frac{(2N-2\alpha+2)\Gamma^2(N-\alpha+1)}{(N+1)!(N-2\alpha+1)\Gamma(N-2\alpha+1)} \cdot \frac{1}{2^{2\alpha} P_N^{(-\alpha, -\alpha)}(\tau_k) P_{N+1}^{(-\alpha, -\alpha)}(\tau_k)} \quad (5.21)$$

$$W_l^* = - \frac{(2M+1)\Gamma^2\left(M+\frac{1}{2}\right)}{(M+1)!M\Gamma(M)} \cdot \frac{1}{2P_M^{(-1/2, -1/2)}(\xi_l) P_{M+1}^{(-1/2, -1/2)}(\xi_l)} \quad (5.22)$$

式中 Γ 为伽马函数。

应该指出, 以上得到的代数方程组是封闭的, 所以可求出未知值 $G^*(\xi_\rho)$, 它在裂纹端点上的值由以下外推公式计算:

$$G^*(1) = \frac{(1-\xi_2)(1-\xi_3)}{(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)} G^*(\xi_1) + \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} G^*(\xi_2) + \frac{(1-\xi_1)(1-\xi_2)}{(\xi_3-\xi_1)(\xi_3-\xi_2)} G^*(\xi_3) \quad (5.23)$$

$$G^*(-1) = \frac{(1-\xi_{M-1})(1+\xi_M)}{(\xi_{M-2}-\xi_{M-1})(\xi_{M-2}-\xi_M)} G^*(\xi_{M-2}) + \frac{(1+\xi_{M-2})(1+\xi_M)}{(\xi_{M-1}-\xi_{M-2})(\xi_{M-1}-\xi_M)} \cdot G^*(\xi_{M-1}) + \frac{(1+\xi_{M-2})(1+\xi_{M-1})}{(\xi_M-\xi_{M-2})(\xi_M-\xi_{M-1})} G^*(\xi_M) \quad (5.24)$$

联立方程(4.9), (5.7)和(5.14), 便可求出中心裂纹的应力强度因子, 用以上方法得到的一些数值结果将在下面给出。

六、数值结果

利用上面的数值方法, 本文计算了一些例子, 但由于篇幅限制, 这里只列出部分结果。

例1 完整夹紧矩形板的拉伸。

在夹紧边 $x=0$ 上的总应力 $\sigma_{xx}(0, y/B)$ 和 $\sigma_{xy}(0, y/B)$ 的分布见图2和图3。

例2 带有中心裂纹的夹紧矩形板的拉伸。

在夹紧边 $x=0$ 上的总正应力 $\sigma_{xx}(0, y/B)$ 的分布绘制于图4。

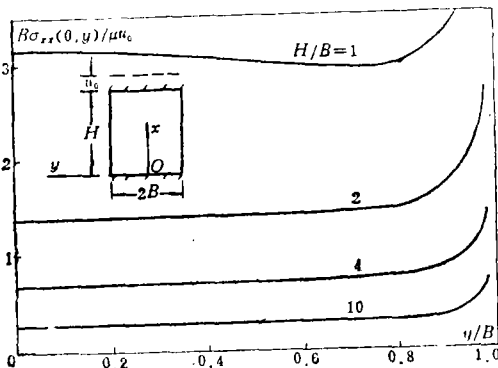


图2 作用在夹紧边($x=0$)的应力 $\sigma_{xx}(0, y)$ 分布($\nu=0.3$)

中心裂纹的应力强度因子列于表1, 其中还对本文得到的结果。与由 Bowie^[2] 得到的

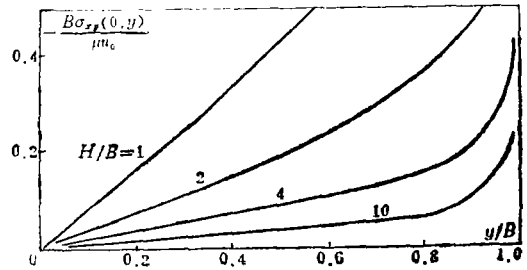


图3 作用在夹紧边($x=0$)的应力 $\sigma_{xy}(0, y)$ 分布($\nu=0.3$)

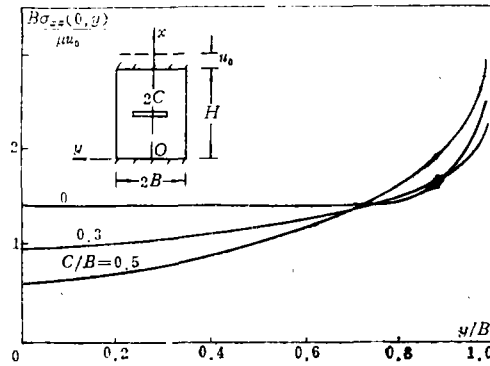


图4 作用在夹紧边(\$y=0\$)的应力\$\sigma_{xx}(0, y)\$分布(\$\nu=0.3, H/B=2\$)

结果作了比较。

表 1 中心裂纹的应力强度因子(\$H/B=2\$)

$\frac{b_3 - a_3}{H}$	$k_1(a_3, b_3) \cdot H / (\mu u_0 \sqrt{0.5(b_3 - a_3)})$		
	$\kappa=1.8$	$\kappa=2.2$	$\kappa=2.2$ (Bowie)
0.100	3.151346	2.600293	2.600000
0.200	3.005496	2.496017	2.500000
0.400	2.784737	2.179579	2.173913
0.500	2.343219	2.008289	2.017241
0.667	1.980951	1.732271	1.786632
0.800	1.715919	1.528830	1.648148

附 录 1

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^{b_i} \left\{ -i \left[\frac{\kappa-1}{2(1+\kappa)\alpha} + \frac{t}{1+\kappa} \right] g_i(t, y_i) + \left[\frac{1}{2\alpha} + \frac{t}{1+\kappa} \right] h_i(t, y_i) \right\} \\
 &\quad \cdot \exp[-\alpha(t-iy_i)] dt + \int_{a_3}^{b_3} \left[\frac{1}{2\alpha} + \frac{x_3}{1+\kappa} \right] g_3(t, x_3) \exp[-\alpha(x_3-it)] dt \\
 L_2 &= \sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^{b_i} \left\{ -i \left[\frac{1}{2\alpha} - \frac{t}{1+\kappa} \right] g_i(t, y_i) + \left[\frac{\kappa-1}{2(1+\kappa)\alpha} - \frac{t}{1+\kappa} \right] h_i(t, y_i) \right\} \\
 &\quad \cdot \exp[-\alpha(t-iy_i)] dt + \int_{a_3}^{b_3} \left[\frac{\kappa-1}{2(1+\kappa)\alpha} - \frac{x_3}{1+\kappa} \right] g_3(t, x_3) \exp[-\alpha(x_3-it)] dt \\
 L_3 &= \sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^{b_i} \left\{ -i \left[\frac{\kappa-1}{2(1+\kappa)\alpha} + \frac{H-t}{1+\kappa} \right] g_i(t, y_i) - \left[\frac{1}{2\alpha} + \frac{\alpha(H-t)}{(1+\kappa)\alpha} \right] h_i(t, y_i) \right\} \\
 &\quad \cdot \exp[-\alpha(H-t)] \cdot \exp[iay_i] dt + \int_{a_3}^{b_3} \left[-\frac{1}{2\alpha} - \frac{(H-x_3)}{1+\kappa} \right] \exp[-\alpha(H-x_3)] \\
 &\quad \cdot \exp[iat] \cdot g_3(t, x_3) dt \\
 L_4 &= \sum_{i=1}^2 \int_{a_i}^{b_i} \left\{ -i \left[\frac{1}{2\alpha} - \frac{H-t}{1+\kappa} \right] g_i(t, y_i) + \left[\frac{\kappa-1}{2(1+\kappa)\alpha} - \frac{H-t}{1+\kappa} \right] h_i(t, y_i) \right\} \\
 &\quad \cdot \exp[-\alpha(H-t)] \cdot \exp[iay_i] dt + \int_{a_3}^{b_3} \left[\frac{\kappa-1}{2(1+\kappa)\alpha} - \frac{H-x_3}{1+\kappa} \right] \\
 &\quad \cdot \exp[-\alpha(H-t)] \exp[iat] g_3(t, x_3) dt
 \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] 汤任基、王凯, 非对称载荷作用的 Griffith 裂纹问题, 力学学报, 3 (1980), 269—278.
- [2] Bowie, O. L., Solutions of plane crack problems by mapping technique, *Mechanics of Fracture*, 1 (edited by G. C. Sih) (1973).
- [3] 汤任基, 夹紧矩形板拉伸及角点应力奇异性分析的积分方程方法, 力学学报, 1 (1986), 93—96.
- [4] Erdogan, F., Mixed boundary value problem in mechanics, *Mechanics Today* (edited by S. Nemat-Nasser), 4 (1978).

Tension of a Clamped Rectangular Plate Containing a Central Crack

Tang Ren-ji

(Lanzhou University, Lanzhou)

Wang Yi-qing

(Jiangsu Chemical Engineering Institute, Changzhou)

Abstract

Using the fundamental solution of a single crack and the Fourier transform solution of an infinite strip, the tension problem of a clamped rectangular plate containing a central crack is reduced to solve a system of singular integral equations. Then, the normal stress on clamped side and the stress intensity factors of the central crack are carried out by means of Gauss-Jacobi integration formulas. The comparison of numerical results is shown in the "table of stress intensity factors".