应用数学和力学, 第 25 卷 第 8 期(2004 年 8 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 08_0787_09

具有对称循环结构线性大系统的分散镇定特征*

金朝永[1], 张湘伟[2]

(1. 广东工业大学 应用数学学院, 广州 510090;
2. 广东工业大学 机电工程学院, 广州 510090)

(我刊编委张湘伟来稿)

摘要: 研究一类具有对称循环结构的连续和离散线性大系统的分散镇定特征, 充分利用对称循环的特点, 建立了判断这类系统可分散镇定的充分条件• 在连续情形下, 通过引进耦合结构模这一概念, 揭示了这类系统分散镇定的重要特征, 这就是当整个系统的耦合结构模给定之后, 系统的分散镇定特性可以完全由各孤立子系统的结构所决定• 这表明在这类系统的实际设计中, 不管系统内中各子系统之间的耦合结构多么复杂, 只要按一定的条件适当设计或修正各孤立子系统的结构参数, 就能使所设计的大系统具有分散镇定特征, 并提供了相应的分散镇定算法• 对离散情形也进行了讨论, 结果表明, 连续系统与离散系统的分散镇定特征有着很大的差异•

关 键 词: 线性大系统; 分散镇定; 对称循环结构; 耦合结构模; Ricatti 方程
中图分类号: O231.1 文献标识码: A

引 言

近 20 年来, 分散镇定问题, 即如何用局部状态反馈使具有关联耦合的线性大系统镇定的问题一直是大系统理论研究中一个倍受关注的研究领域, 具有重要的理论和实际意义• 一般来说, 即使各孤立子系统能控能观, 也不能保证整个大系统可分散镇定, 换句话说, 为了得到所期望的镇定特性, 我们必须对各子系统之间的关联耦合结构作一些假设或限制, 近年来, 这方面的研究取得了许多有意义的成果[1~6]•

本文研究一类具有对称循环结构的线性大系统的分散镇定特征, 这类系统在实际中非常普遍, 如造纸机、分布网络、以及由并行工作单元组成的耦合系统等• 近年来国内外许多专家学者也对此类系统进行了深入研究[7~9]• 本文通过引进耦合结构模这一概念, 建立了这类系统可分散镇定的充分条件, 并提供了相应的分散镇定算法• 在连续情形下, 研究表明, 不管各子系统之间的耦合结构多么复杂, 整个系统的分散镇定性均可以完全由各孤立子系统的结构 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 所决定• 我们对离散情形也进行了讨论, 结果表明, 在分散镇定问题上, 连续系统和离

* 收稿日期: 2002_11_25; 修订日期: 2004_04_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272033)
作者简介: 金朝永(1962—), 男, 湖北江陵人, 副教授, 硕士(E_mail: cyjin8@hotmail.com);
张湘伟(联系人. Tel: + 86_20_37628870; Fax: + 86_20_37626119; E_mail: xwzhang@gdut.edu.cn)•

散系统存在着较大差异•

本文内容安排如下: 在第 1 节中给出具有对称循环结构线性大系统的模型• 在第 2 节中讨论了连续情形下系统的分散镇定特征, 并在第 3 节中对离散情形也作了相应的讨论• 例题分析安排在第 4 节中, 用以说明文中主要结论和算法的应用•

1 预 备 知 识

定义 1.1　若分块矩阵 $\boldsymbol{H} \in R^{Nm\times Np}$ 具有以下结构

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_2 & \cdots & \boldsymbol{H}_N \\ \boldsymbol{H}_N & \boldsymbol{H}_1 & \cdots & \boldsymbol{H}_{N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_3 & \cdots & \boldsymbol{H}_1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

其中子块 $\boldsymbol{H}_i \in R^{m\times p}(i = 1, 2, 3, \dots, N)$ 满足关系式 $\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{H}_{N-i+2}(i = 2, 3, \dots, N)$, 则称 $\boldsymbol{H}$ 为块对称循环矩阵, 简记为 $\mathrm{scl}[\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \dots, \boldsymbol{H}_N]$•

设 $\boldsymbol{m}_j = (1, v_j, v_j^2, \dots, v_j^{N-1})^{\mathrm{T}}, j = 1, 2, \dots, N$, 其中 $v_j = \exp\left[(2\pi(j-1)\sqrt{-1})/N\right]$, 即 v_j 为代数方程 $v^N = 1$ 的第 j 个根• 又记 $\boldsymbol{R}_N = N^{-1/2}[\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N]$, 其中 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{m}_1 = [1, 1, \dots, 1]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{r}_p = 2^{-1/2}(\boldsymbol{m}_p + \boldsymbol{m}_{N+2-p})$, $\boldsymbol{r}_{N+2-p} = 2^{-1/2}\sqrt{-1}(\boldsymbol{m}_p - \boldsymbol{m}_{N+2-p})$, $p = 2, 3, \dots, l$, 其中当 N 为奇数时, $l = (N+1)/2$; 当 N 为偶数时, $l = N/2$, 且 $\boldsymbol{r}_{N/2+1} = \boldsymbol{m}_{N/2+1}$•

引理 1.1[8,9]　上面构造的 $\boldsymbol{R}_N$ 为一实正交矩阵, 且具有性质

$$\boldsymbol{E}_k^{-1} = \boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{E}_k = \boldsymbol{R}_N \otimes \boldsymbol{I}_k$, $\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积, $\boldsymbol{I}_k$ 为 k 阶单位阵, $\boldsymbol{E}_k^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{E}_k$ 的转置•

引理 1.2[8,9]　设 $\boldsymbol{H} = \mathrm{scl}[\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2, \dots, \boldsymbol{H}_N]$, 其中 $\boldsymbol{H}_i \in R^{m\times p}(i = 1, 2, \dots, N)$, 又记 $\boldsymbol{H}_d = \boldsymbol{E}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{E}_p$, 则 $\boldsymbol{H}_d = \text{block diag}\left\{\boldsymbol{H}_{d_1}, \boldsymbol{H}_{d_2}, \dots, \boldsymbol{H}_{d_N}\right\}$, 其中 $\boldsymbol{H}_{d_i} = \boldsymbol{H}_{d_{N+2-i}}(i = 2, 3, \dots, l)$, 且 $\boldsymbol{H}_i$ 与 $\boldsymbol{H}_{d_i}$ 之间具有如下换算关系

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{d_1} \\ \boldsymbol{H}_{d_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{d_N} \end{pmatrix} = (\sqrt{N}\boldsymbol{F}_N \otimes \boldsymbol{I}_m)^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_N \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_N \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}}\boldsymbol{F}_N(\otimes \boldsymbol{I}_m) \begin{pmatrix} \boldsymbol{H}_{d_1} \\ \boldsymbol{H}_{d_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{H}_{d_N} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中　$\boldsymbol{F}_N^{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}[\boldsymbol{m}_1\ \boldsymbol{m}_2 \cdots \boldsymbol{m}_N]$•

同时考虑连续线性定常大系统

$$\Sigma_i: \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i(t) + \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{x}_j(t), \\ \boldsymbol{y}_i(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \tag{4}$$

和离散线性定常大系统

$$\Sigma_i: \begin{cases} \boldsymbol{x}_i(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i(k) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i(k) + \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{N} \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{x}_j(k), \\ \boldsymbol{y}_i(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_i(k) \qquad (i = 1, 2, \dots, N)• \end{cases} \tag{5}$$

在上述两个模型中, $\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{C} \in R^{r\times n}$, $\boldsymbol{D}_{ij} \in R^{n\times n}(i \neq j = 1, 2, \dots, N)$ 均为常

数矩阵•

记 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{y}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{u}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \cdots, \boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{B} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{B})$, $\boldsymbol{C} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, \cdots, \boldsymbol{C})$, $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}_{ij}) \in R^{Nn\times Nn}$, 其中 $\boldsymbol{D}_{ii} = \boldsymbol{0}(i = 1, 2, \cdots, N)$• 并取系统(4)和(5)的分散状态反馈分别为

$$\boldsymbol{u}_i(t) = \boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}_i(t) \qquad (\text{连续情形})(i = 1, 2, \cdots, N), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{u}_i(k) = \boldsymbol{K}_i\boldsymbol{x}_i(k) \qquad (\text{离散情形})(i = 1, 2, \cdots, N), \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{K}_i \in R^{m\times n}$, 又记 $\boldsymbol{K} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \cdots, \boldsymbol{K}_N)$, 则系统(4)和(5)的闭环系统分别为

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{x}(t) \qquad (\text{连续情形}), \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Cx}(t); \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BK} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{x}(k) \qquad (\text{离散情形}), \\ \boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{Cx}(k)• \end{cases} \tag{9}$$

定义 1.2 在系统(4)(或(5))中, 若关联矩阵 $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}_{ij})$ 为一块对称循环矩阵, 即 $\boldsymbol{D} = \mathrm{scl}[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{D}_2, \cdots, \boldsymbol{D}_N]$, 则称系统(4)(或(5))为具有对称循环结构的连续(或离散)线性定常大系统, 简称为对称循环连续(或离散)系统•

定义 1.2 所描述的对称循环系统具有两个基本特征, 一是各孤立子系统具有完全相同的结构 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$, 二是整个系统的关联矩阵 $\boldsymbol{D}$ 为一块对称循环矩阵•

定义 1.3 对于大系统(4)(或(5)), 若存在分散状态反馈(6)(或(7)), 使其闭环系统(8)(或(9))渐近稳定, 则称大系统(4)(或(5))可分散镇定•

本文的目的是研究对称循环系统的分散镇定问题(包括连续和离散两种情形), 充分利用对称循环的结构, 揭示此类系统的分散镇定特征• 为此, 在下面的讨论中, 我们总假定 $\boldsymbol{D} = \mathrm{scl}[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{D}_2, \cdots, \boldsymbol{D}_N]$, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 完全可控, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$ 完全可观, 所以, 对任意给定的参数 $\beta > 0$, 下列矩阵 Ricatti 方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PA} - \boldsymbol{PBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \beta\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{0} \qquad (\text{连续情形}) \tag{10}$$

及

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB}(\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} + \beta\boldsymbol{I}_n \qquad (\text{离散情形}) \tag{11}$$

均存在唯一对称正定解 $\boldsymbol{P}$(简记为 $\boldsymbol{P} > \boldsymbol{0}$), 若记 $\boldsymbol{P} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}, \cdots, \boldsymbol{P})$, 则(10)和(11)式可分别写成

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{PA} - \boldsymbol{PBB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \beta\boldsymbol{I}_{Nn} = \boldsymbol{0} \qquad (\text{连续情形}) \tag{12}$$

和

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB}(\boldsymbol{I}_{Nm} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PA} + \beta\boldsymbol{I}_{Nn} \qquad (\text{离散情形})• \tag{13}$$

进一步, 由引理 1.1 和引理 1.2, 我们有以下一组式子

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_d \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{AE}_n = \boldsymbol{A} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}, \cdots, \boldsymbol{A}), \\ \boldsymbol{B}_d \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{BE}_m = \boldsymbol{B} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{B}), \\ \boldsymbol{C}_d \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{E}_r^{-1}\boldsymbol{CE}_n = \boldsymbol{C} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, \cdots, \boldsymbol{C}), \\ \boldsymbol{D}_d \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{DE}_n = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{D}_{d_1}, \boldsymbol{D}_{d_2}, \cdots, \boldsymbol{D}_{d_N}), \\ \boldsymbol{P}_d \overset{\mathrm{def}}{=} \boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{PE}_n = \boldsymbol{P} = \mathrm{block\ diag}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}, \cdots, \boldsymbol{P}), \end{cases} \tag{14}$$

式中, $\boldsymbol{D}_{d_i} = \boldsymbol{D}_{d_{N+2-i}}(i = 2, 3, \cdots, l)$• 此外, 在下面的讨论中, 我们用 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})$ 和 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})$ 分别表示对称方阵 $\boldsymbol{P}$ 的最大和最小特征值, 并取 $\|\boldsymbol{A}\| = (\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}))^{1/2}$•

定义 1.4 记 $\rho(\boldsymbol{D}) = \lambda_{\max}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D})$, 称 $\rho(\boldsymbol{D})$ 为大系统(4)(或(5))的耦合结构模•

引理 1.3 $\rho(\boldsymbol{D}) = \|\boldsymbol{D}_d\|^2 = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\|\boldsymbol{D}_{d_i}\|^2$•

证明

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|\boldsymbol{D}_{d_i}\|^2 = \max_{1\leqslant i\leqslant N}\lambda_{\max}(\boldsymbol{D}_{d_i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{d_i}) = \lambda_{\max}(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d) =$$
$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}_n) = \lambda_{\max}(\boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}_n) =$$
$$\lambda_{\max}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}) = \rho(\boldsymbol{D})\text{•}$$

引理证毕•

2 连续系统的分散镇定特征

定理 2.1 若存在参数 $\beta > 0$, 使得由矩阵 Ricatti 方程(10)所确定的唯一对称正定解 $\boldsymbol{P}$ 满足

$$\beta > \|\boldsymbol{P}\|^2 + \rho(\boldsymbol{D}), \tag{15}$$

则在分散状态反馈

$$\boldsymbol{u}_i(t) = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{16}$$

下, 闭环系统(8)渐近稳定, 从而对称循环连续系统(4)可分散镇定•

证明 利用(16)式, 闭环系统(8)可写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{D})\boldsymbol{x}(t)\text{•} \tag{17}$$

取 $v(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 作为系统(17)的 Liapunov 函数, 并将 v 沿(17)的状态轨迹对 t 求全导数, 再利用(12)和(14)式可得

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x) = {} & \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{D})\boldsymbol{x} = \\
& \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\beta\boldsymbol{I}_{Nn} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{D})\boldsymbol{x} \leqslant \\
& \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\beta\boldsymbol{I}_{Nn} + \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{D})\boldsymbol{x} = \\
& \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_n(-\beta\boldsymbol{I}_{Nn} + \boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{x} = \\
& -\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\beta\boldsymbol{I}_{Nn} - \boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_d - \boldsymbol{P}_d\boldsymbol{D}_d)\boldsymbol{z} = \\
& -\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\beta\boldsymbol{I}_{Nn} + (\boldsymbol{P}_d - \boldsymbol{D}_d)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_d - \boldsymbol{D}_d) - \boldsymbol{P}_d^2 - \boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d)\boldsymbol{z} \leqslant \\
& -\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(\beta\boldsymbol{I}_{Nn} - \boldsymbol{P}_d^2 - \boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d)\boldsymbol{z},
\end{aligned}$$

其中, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{E}_n^{-1}\boldsymbol{x}$, 显然, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 等价于 $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, 又由(14)式 $\|\boldsymbol{P}_d\| = \|\boldsymbol{P}\| = \|\boldsymbol{P}\|$, 因此, 根据引理 1.3 和条件(15)知 $(\beta\boldsymbol{I}_{Nn} - \boldsymbol{P}_d^2 - \boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d) > \boldsymbol{0}$, 所以, 当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, 必有 $\dot{v}(x) < 0$; 当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时, $\dot{v}(\boldsymbol{x}) = 0$, 因此 $\dot{v}(x)$ 负定, 从而闭环系统(17)渐近稳定, 由定义 1.3 知, 系统(4)可分散镇定, 证毕•

为了验证条件(15), 需要首先计算 $\rho(\boldsymbol{D})$, 当系统的维数较高时, 直接计算 $\rho(\boldsymbol{D})$ 比较困难• 在实际设计中, 我们可以事先估计 $\rho(\boldsymbol{D})$ 的一个上界 ρ, 并在条件(15)中用 ρ 代替 $\rho(\boldsymbol{D})$•

推论 2.1 设 $\rho > 0$ 是任意给定的常数, $\rho(\boldsymbol{D}) \leqslant \rho$, 且由矩阵 Ricatti 方程(10)所确定的唯一对称正定解 $\boldsymbol{P}$ 满足

$$\beta > \|\boldsymbol{P}\|^2 + \rho, \tag{18}$$

则在分散状态反馈(16)下, 闭环系统(8)渐近稳定, 从而对称循环连续系统(4)可分散镇定•

关于定理 2.1 和推论 2.1 的几点注记:

注1　由于 $\rho(\boldsymbol{D})$ 或 ρ 可以利用整个系统的耦合结构 $\boldsymbol{D}$ 事先计算或估计, 而 Ricatti 方程(10) 表明, 参数 β 与矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的关系则完全由各孤立子系统的结构 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 所决定. 这表明, 在这类系统的实际设计中, 不管系统内部各孤立子系统之间的耦合结构 $\boldsymbol{D}$ 多么复杂, 只要我们能适当设计或修正孤立子系统的结构参数 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, 使条件(15)或(18)得到满足, 从而就能使设计的大系统具有分散镇定特征, 这是很有实际意义的. 显然, 对于一般的耦合大系统,这是难以实现的.

注2　由(16)式可以看出,各子系统的局部状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}_i\ (i=1,2,\cdots,N)$ 具有完全相同的形式,因此,在这类系统的实际设计中,我们可首先针对某个特殊子系统的结构参数进行设计或修正,使其满足条件(15)或(18),并按(16)式设计其局部状态反馈控制器,然后将其复制到其余各子系统中去. 此外,从定理2.1的证明过程可以看出,各孤立子系统具有完全相同的结构的假设是必要的.

注3　由于 Ricatti 方程(10)中参数 β 与矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的关系是非线性的, 因此, 选取满足条件(15)或(18)的参数 β 是比较困难的. 根据 Ricatti 方程(10)的特点, 一般来说, β 值越大, 条件(15)或(18)就越容易得到满足. 但另一方面, β 值越大, 由 Ricatti 方程(10)的唯一正定解 $\boldsymbol{P}$ 所确定的反馈增益就越高, 因此, 在实际应用中, 我们应在保证条件(15)或(18)成立的前提下, 使 β 的值尽可能小.

综上所述, 关于对称循环连续系统(4),我们提出如下分散镇定算法:

步1　按定义1.4计算系统(4)的耦合结构模 $\rho(\boldsymbol{D})$ 或估计 $\rho(\boldsymbol{D})$ 的一个上界 ρ;

步2　给定参数 β 的值, 并求解矩阵 Ricatti 方程(10);

步3　验证条件(15)或(18)是否成立, 若是,则执行步6, 否则, 转步4;

步4　按注3的原则增大 β 的值,并转回步2;

步5　若对充分大的 β(比如 $\beta\geqslant M$, M 为事先给定的界值),条件(15)或(18)仍不成立, 则按注1和注2的原则, 适当修正各孤立子系统的结构参数 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, 再转回步2;

步6　取各子系统的局部状态反馈规律为

$$\boldsymbol{u}_i(t)=-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_i(t)\qquad(i=1,2,\cdots,N).$$

需要指出的是, 当整个系统的耦和结构 $\boldsymbol{D}$ 给定之后, 满足条件(15)或(18)的参数 β 不一定总是存在. 为此我们进一步研究一类由下列耦合条件所刻划的对称循环连续系统(4)[1]

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}_i=\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{C},\\ \boldsymbol{L}_i=\boldsymbol{L}_{N+2-i}\in R^{m\times r}\qquad(i=2,3,\cdots,N).\end{cases}\tag{19}$$

记 $\boldsymbol{L}=\mathrm{scl}[\boldsymbol{0},\boldsymbol{L}_2,\boldsymbol{L}_3,\cdots,\boldsymbol{L}_N]$, 则

$$\boldsymbol{L}_d\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{E}_m^{-1}\boldsymbol{L}\boldsymbol{E}_r=\text{block diag}(\boldsymbol{L}_{d_1},\boldsymbol{L}_{d_2},\cdots,\boldsymbol{L}_{d_N}),\tag{20}$$

其中　$\boldsymbol{L}_{d_i}=\boldsymbol{L}_{d_{N+2-i}}\ (i=2,3,\cdots,l).$

定理2.2　所有满足耦合条件(19)的对称循环连续系统(4)均可分散镇定,且分散状态反馈矩阵 $\boldsymbol{K}_i$ 可由下列关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\beta\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{K}_i=-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\qquad(i=1,2,\cdots,N)\end{cases}\tag{21}$$

确定,其中参数 β 满足

$$\beta>\max_{1\leqslant i\leqslant N}\|\boldsymbol{L}_{d_i}\|^2.\tag{22}$$

证明　由条件(19)知 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}$, 仍取 $v(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ 作为闭环系统(17)的 Liapunov 函数, 则

$$\begin{aligned}\dot{v}(x)=&\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\beta\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\\ &\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(-\beta\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{E}_r^{-1}\boldsymbol{y}(t)$, 其中 $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$, 则

$$\begin{aligned}\dot{v}(x) = &-y^{\mathrm T}(\beta I_{Nr}-L^{\mathrm T}L)y-x^{\mathrm T}G^{\mathrm T}Gx = \\ &-y^{\mathrm T}E_r(\beta I_{Nr}-E_r^{-1}L^{\mathrm T}E_mE_m^{-1}LE_r)E_r^{-1}y-x^{\mathrm T}G^{\mathrm T}Gx = \\ &-z^{\mathrm T}(\beta I_{Nr}-L_d^{\mathrm T}L_d)z-x^{\mathrm T}G^{\mathrm T}Gx \leqslant \\ &-z^{\mathrm T}(\beta I_{Nr}-L_d^{\mathrm T}L_d)z\cdot \end{aligned}\tag{23}$$

由条件(22)式有 $\beta I_{Nr}-L_d^{\mathrm T}L_d>\mathbf{0}$, 所以 $\dot{v}(x)\leqslant 0$, 这说明系统(4)的闭环系统(17)是稳定的, 为证明其渐近稳定性, 即要证明不存在非零的初始状态 $x(0)=x_0\neq\mathbf{0}$ 使得由闭环系统(17)的非零状态轨迹 $x(t)=\exp\{(A-BG)t\}x_0$, 导致 $\dot{v}(x(t))\equiv 0$, $\forall t\geqslant 0$• 若不然, 则由(23)式必有

$$\begin{cases} x^{\mathrm T}G^{\mathrm T}Gx=0, \\ z^{\mathrm T}(\beta I_{Nr}-L_d^{\mathrm T}L_d)z=0, \end{cases} \qquad \forall t\geqslant 0,\tag{24}$$

因此, $Gx(t)=\mathbf{0}$, $z(t)=\mathbf{0}$, $\forall t\geqslant 0$, 注意到 $z(t)=E_r^{-1}y(t)$, 和 $y(t)=Cx(t)$, 这表明非零的初始状态 x_0 对应的系统输出 $y(t)=\mathbf{0}$, $\forall t\geqslant 0$, 即非零的初始状态 x_0 为系统的不能观测状态, 这与 (A, C) 完全可观测的假设矛盾, 定理证毕•

3 离散系统的分散镇定特征

本节的目的是将上一节中关于连续系统(4)分散镇定的若干结论推广到离散系统(5)中去, 仿照前面的讨论、分析和推导, 我们不难归纳出以下结论•

定理 3.1 若存在参数 $\beta>0$, 使得由 Ricatti 方程(11)确定的唯一对称正定解 P 满足

$$\beta I_n-A^{\mathrm T}PA-D_{d_i}^{\mathrm T}(2P+PBB^{\mathrm T}P)D_{d_i}>\mathbf{0}\qquad (i=1,2,\cdots,N),\tag{25}$$

则在分散状态反馈

$$u_i(k)=-(I_m+B^{\mathrm T}PB)^{-1}B^{\mathrm T}PAx_i(k)\qquad (i=1,2,\cdots,N)\tag{26}$$

下, 闭环系统(9)渐近稳定, 从而对称循环系统(5)可分散镇定•

对于由耦合条件(19)刻划的对称循环离散系统(5), 我们亦有:

定理 3.2 若存在参数 $\beta>0$, 使得由 Ricatti 方程(11)确定的唯一对称正定解 P 满足

$$\beta I_r-L_{d_i}^{\mathrm T}(I_m+B^{\mathrm T}PB)L_{d_i}>\mathbf{0}\qquad (i=1,2,\cdots,N),\tag{27}$$

则由条件(19)所刻划的一类对称循环离散系统(5)可分散镇定, 且分散状态反馈仍取为(26)式•

上述两个定理的证明与上一节中定理 2.1 和定理 2.2 的证明相类似, 限于篇幅, 故在此略去• 同连续情形相比较, 对称循环离散系统的分散镇定有以下几个特征:

1. 由于条件(25)与关联矩阵 D 直接相关, 因此, 与连续情形不同的是, 当整个系统的耦合结构模 $\rho(D)$ 给定之后, 我们一般不能仅仅通过设计或修正各孤立子系统的结构参数 (A, B) 来达到使对称循环离散系统(5)具有分散镇定性的目的•

2. 定理 2.2 表明, 由条件(19)所刻划的一类对称循环连续系统(4)一定可分散镇定, 而定理 3.2 则表明, 这一结论对离散情形一般不成立•

3. 以上两点充分说明, 连续系统与离散系统的分散镇定特征有着很大的差异, 一般说来, 后者较前者复杂, 我们在实际系统的分析或设计中, 应充分注意这一特征•

4 例 题 分 析

例 1 考虑一类对称循环连续系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = -\delta \boldsymbol{x}_i(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_i(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{x}_j(t), \\ \boldsymbol{y}_i(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N), \end{cases} \tag{28}$$

其中，$\delta > 0$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I}_n$, $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}_{ij})$ 为一块对称循环矩阵, 则 Ricatti 方程(10) 变成为

$$\boldsymbol{P}^2 + 2\delta\boldsymbol{P} - \beta\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{0}. \tag{29}$$

该方程有唯一对称正定解 $\boldsymbol{P} = (\sqrt{\delta^2 + \beta} - \delta)\boldsymbol{I}_n$, 经过计算可知, 当参数 β 满足

$$\beta > \left(1 + \frac{\rho(\boldsymbol{D})}{4\delta^2}\right)\rho(\boldsymbol{D}) \tag{30}$$

时, 条件(15) 成立. 因此, 对任意的参数 $\delta > 0$ 及耦合结构 $\boldsymbol{D}$, 系统(28) 都是可分散镇定的, 且各子系统的局部状态反馈可取为

$$\boldsymbol{u}_i(t) = -(\sqrt{\delta^2 + \beta} - \delta)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N),$$

其中, β 为满足条件(30) 式的常数.

例2　考虑由 N 个 2 维子系统耦合而成的对称循环连续系统

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_i(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u}_i(t) + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \boldsymbol{D}_{ij}\boldsymbol{x}_j(t), \\ \boldsymbol{y}_i(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N). \end{cases} \tag{31}$$

直接计算可知, $\forall \beta > 0$, Ricatti 方程

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} + \beta\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{0}$$

的唯一对称正定解为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{\beta^2 + 2\beta\sqrt{\beta}} & \sqrt{\beta} \\ \sqrt{\beta} & \sqrt{\beta + 2\sqrt{\beta}} \end{bmatrix}.$$

容易验证 $\beta < \|\boldsymbol{P}\|^2$, 所以对于该系统来说, 定理 2.1 中的条件(15) 对任意的 $\beta > 0$ 均不成立. 因此, 为了保证系统(31) 的分散镇定性, 我们将子系统的结构$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 修正为$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\alpha} \end{bmatrix},$$

其中, $\alpha > 0$ 为待定参数, 再取 $\beta = \alpha$, 则相应的 Ricatti 方程为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{\alpha} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\alpha} \end{bmatrix}\boldsymbol{P} + \alpha\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{0},$$

其唯一对称正定解为

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

易知 $\|\boldsymbol{P}\|^2 = 7.4641$, 所以取 $\beta = \alpha > 7.4641 + \rho(\boldsymbol{D})$, 则由定理 2.1 知, 修正后的系统对任意的耦合结构 $\boldsymbol{D}$ 都是分散镇定的.

值得一提的是参数组 α 和 β 的选取不是唯一的, 我们可依下面的方法任意选取: 首先令 $\beta = \gamma\alpha$, 然后对每一个给定的 γ 值, 求解 Ricatti 方程

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} + \gamma\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{0},$$

得一正定解 $\boldsymbol{P}_\gamma$, 最后取 $\beta > \|\boldsymbol{P}_\gamma\|^2 + \rho(\boldsymbol{D})$, $\alpha = \beta/\gamma$ 即可, 下表给出了当 $\rho(\boldsymbol{D}) = 1$ 时参数 α, β 和 γ 之间的几组关系(见表 1)•

表 1

γ	$\|\boldsymbol{P}\|^2$	β	α
0.25	1.991 8	2.991 8	11.967 2
0.5	3.673 0	4.673 0	9.346
1	7.464 1	8.464 1	8.464 1
2	17.124 7	18.124 7	9.062 4
4	44.784 2	45.784 2	11.446 1

从表 1 中可以看出, 随着 γ 值的增大, 参数 β 和 $\|\boldsymbol{P}\|$ 也随之增大, 而当 γ 值较小时, 修正参数 α 也增大, 因此, 可以根据实际需要, 适当调节 γ 值来获得合理的 β, $\|\boldsymbol{P}\|$ 和修正参数 α•

5 小 结

本文研究一类具有对称循环结构的连续和离散线性大系统的分散镇定问题• 对于连续系统, 通过引进耦合结构模这一概念, 建立了利用对各孤立子系统自身的结构参数进行适当设计和修正, 来实现整个系统分散镇定的理论和算法, 具有一定的理论和实际意义• 但遗憾的是它并不适用于离散系统, 这表明, 在分散镇定问题上, 离散系统比连续系统要复杂, 需要进一步加强研究•

[参 考 文 献]

[1] Geromel J C, Yamakami A. Stabilization of continuous and discrete linear systems subjected to control structure constraints[J]. Internat J Control, 1982, **36**(3): 429—444.

[2] Lee T N, Radovic U L. Decentralized stabilization of linear continuous and discrete_time systems with delays in interconnections[J]. IEEE Trans Automat Control, 1988, **33**(3): 757—761.

[3] Ikeda M, Šiljak D D, Yasuda K. Optimality of decentralized control for large_scale systems[J]. Automatica—J IFAC, 1983, **19**(3): 309—316.

[4] 金朝永. Vandermonde 矩阵的逆模与大系统的分散镇定性[J]. 高校应用数学学报, A 辑, 1997, **12**(2): 219—228.

[5] 金朝永. 一类含参数的分块对称矩阵的正定性及应用[J]. 高校应用数学学报, A 辑, 2001, **16**(1): 107—113.

[6] JIN Chao_yong. Decentralized stabilization of a class of interconnected systems[J]. Appl Math J Chinese Univ, Ser B, 2001, **12**(3): 330—338.

[7] Brockett R W, Willems J L. Discretezed partial differential equations: examples on control systems defined on modules[J]. Automatica, 1974, **10**(4): 507—515.

[8] Hovd M, Skogestad S. Control of symmetrically interconnected plants[J]. Automatica, 1994, **30**(6): 957—973.

[9] 黄守东, 张嗣瀛. 具有对称循环结构的大系统 Ricatti 方程的求解[J]. 控制理论与应用, 1998, **15**(1): 75—81.

On Decentralized Stabilization of Linear Large Scale Systems With Symmetric Circulant Structure

JIN Chao_yong[1], ZHANG Xiang_wei[2]

(1. College of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, P. R. China;

2. College of Electromechanical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, P. R. China)

Abstract: The decentralized stabilization of continuous and discrete linear large scale systems with symmetric circulant structure was studied. A few sufficient conditions on decentralized stabilization of such systems were proposed. For the continuous systems, by introducing a concept called the magnitude of interconnected structure, a very important property that the decentralized stabilization of such systems is fully determined by the structure of each isolated subsystem that is obtained when the magnitude of interconnected structure of the overall system is given. So the decentralized stabilization of such systems can be got by only appropriately designing or modifying the structure of each isolated subsystem, no matter how complicated the interconnected structure of the overall system is. A algorithm for obtaining decentralized state feedback to stabilize the overall system is given. The discrete systems were also discussed. The results show that there is a great dfference on decentralized stabilization between continuous case and discrete case.

Key words: large scale system; decentralized stabilization; symmetric circulant structure; magnitude of interconnected structure; Ricatti equation