应用数学和力学，第 9 卷第 9 期(1988年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

非线性向量边值问题的奇异摄动*

康盛亮 陈 琪

(同济大学，1987年 6 月10日收到)

摘 要

本文研究摄动边值问题

$$dx/dt=f(x,y,t;\varepsilon),\qquad \varepsilon\,dy/dt=g(x,y,t;\varepsilon),$$
$$a_1(\varepsilon)x(0,\varepsilon)+a_2(\varepsilon)y(0,\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)$$
$$b_1(\varepsilon)x(1,\varepsilon)+\varepsilon b_2(\varepsilon)y(1,\varepsilon)=\beta(\varepsilon)$$

这里$x,f,\beta\in E^m$，$y,g,\alpha\in E^n$，$0<\varepsilon\ll 1$，$a_1(\varepsilon)$，$a_2(\varepsilon)$，$b_1(\varepsilon)$，$b_2(\varepsilon)$为适当阶数的矩阵．在$g_y(t)$是非奇异矩阵及其它的适当限制下，证明了解的存在唯一性，作出了解的n阶渐近近似式，并得出余项估计．

一、引 言

一阶非线性微分方程组初边值问题曾有许多作者研究过。例如，1970 年 O'Malley[1]、1983年江福汝[2]讨论过纯量边值问题

$$dx/dt=f(x,y,t;\varepsilon),\ \ \varepsilon\,dy/dt=g(x,y,t;\varepsilon)$$
$$A(x(0,\varepsilon),\ \varepsilon y(0,\varepsilon),\varepsilon)=0,\ \ B(x(1,\varepsilon),\ y(1,\varepsilon),\varepsilon)=0$$

F. Hoppensteadt[3]，K. W. Chang 和 W. A. Coppel[4] 等人讨论过有限域上向量初值问题

$$dx/dt=f(x,y,t;\varepsilon),\ \ \varepsilon dy/dt=g(x,y,t;\varepsilon)$$
$$x(0,\varepsilon)=\xi(\varepsilon),\ \ y(0,\varepsilon)=\eta(\varepsilon)$$

本文在文章[3]的基础上，研究非线性向量方程第三类边值问题

$$dx/dt=f(x,y,t;\varepsilon)\tag{1.1}$$
$$\varepsilon\,dy/dt=g(x,y,t;\varepsilon)\tag{1.2}$$
$$a_1(\varepsilon)x(0,\varepsilon)+a_2(\varepsilon)y(0,\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)\tag{1.3}$$
$$b_1(\varepsilon)x(1,\varepsilon)+\varepsilon b_2(\varepsilon)y(1,\varepsilon)=\beta(\varepsilon)\tag{1.4}$$

这里 $x,f,\beta\in E^m$，$y,g,\alpha\in E^n$，$a_1(\varepsilon)$，$a_2(\varepsilon)$，$b_1(\varepsilon)$，$b_2(\varepsilon)$分别是$n\times m$，$n\times n$，$m\times m$，$m\times n$阶矩阵，ε是实的正的小参数．在适当的假设下，我们证明了解的存在唯一性，建立了解的n阶渐近近似式，并给出了相应的余项估计．在一定程度上拓广了文章[3]的结果．

本文为了克服在始端和终端同时构造边界层的某些困难，利用边界层函数的某些特点，

* 江福汝推荐．

先讨论一个特殊的边值问题，找出这个问题的解，然后把上述问题(1.1)～(1.4)化成特殊问题来解。

二、特殊情形的讨论

我们考虑问题(1.1)～(1.4)当$b_1(\varepsilon)=I$，$b_2(\varepsilon)=0$时的特殊情形，即

$$dx/dt=f(x,y,t;\varepsilon) \tag{2.1}$$

$$\varepsilon\, dy/dt=g(x,y,t;\varepsilon) \tag{2.2}$$

$$a_1(\varepsilon)x(0,\varepsilon)+a_2(\varepsilon)y(0,\varepsilon)=\alpha(\varepsilon) \tag{2.3}$$

$$x(1,\varepsilon)=\beta(\varepsilon) \tag{2.4}$$

其相应的退化问题为

$$\left.\begin{array}{l} dx_0/dt=f(x_0,y_0,t,0) \\ 0=g(x_0,y_0,t,0) \\ x_0(1,0)=\beta(0) \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

我们假设

(H_1) 退化问题 (2.5) 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上有连续解 $x=x_0(t)$，$y=y_0(t)$，且 $\gamma(0)\equiv\alpha(0)-a_1(0)x_0(0)-a_2(0)y_0(0)$充分小。

(H_2) 函数 f,g 在(t,x_0,y_0)的某邻域内关于(t,x,y)有直至 $R+2$ 阶的连续导数，且 $\alpha(\varepsilon)$，$\beta(\varepsilon)$，$a_1(\varepsilon)$，$a_2(\varepsilon)$在 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 上是 ε 的光滑函数。

(H_3) Jacobian 矩阵 $g_y(t)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(t,x_0(t),y_0(t),0)$ 是在 $0\leqslant t\leqslant 1$上的非奇异矩阵。

(H_4) 存在一个光滑的非奇异矩阵$P(t)$，使得

$$P^{-1}(t)g_y(t)P(t)=A(t)$$

这里$A(t)=(A_{ij}(t))$是一个分块三角形矩阵，每个$A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,N)$是一个$d_i\times d_j$ 矩阵，且 $A_{ij}=\begin{cases}0, & i>j,\\ \text{非奇异}, & i=j.\end{cases}$ 另外，基本解矩阵$\phi_i(s)$，$\psi_i(s)$定义为

$$\varepsilon\, d\phi_i/dt=A_{ii}(t)\phi_i,\quad \phi_i(s)=I_{d_i\times d_i}\qquad (i=1,\cdots,M)$$

$$\varepsilon\, d\psi_j/dt=A_{jj}(t)\psi_j,\quad \psi_j(s)=I_{d_j\times d_j}\qquad (j=M+1,\cdots,N)$$

满足

$$|\phi_i(t,s;\varepsilon)|\leqslant K\qquad (0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\ i=1,\cdots,M)$$

$$|\psi_j(t,s;\varepsilon)|\leqslant K\qquad (0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\ j=M+1,\cdots,N)$$

这里K是与 t，s，ε 无关的正常数$(0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$。

(H_5) 矩阵函数 $g_y(t)$有k个特征值$(1\leqslant k\leqslant n)$具有负的实部，即 $\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant-\mu<0$，而其余的特征值满足$\mathrm{Re}\lambda(t)>-\mu(0\leqslant t\leqslant 1)$。

我们先在(H_1)～(H_4)条件下，研究下述问题的解

$$dx/dt=f(x,y,t;\varepsilon) \tag{2.6}$$

$$\varepsilon\, dy/dt=g(x,y,t;\varepsilon) \tag{2.7}$$

$$x(1,\varepsilon)=\beta(\varepsilon) \tag{2.8}$$

我们把这问题的解$(x^*,\ y^*)$称为(2.1)～(2.4)的外部解。设(2.6)～(2.8)有如下形式的解

$$(x^*,y^*)=(x_0^*,y_0^*)+\sum_{r=1}^{R}(x_r^*,\ y_r^*)\varepsilon^r+\varepsilon^{R+1}\mathscr{R}(t,\varepsilon) \tag{2.9}$$

把(2.6)～(2.8)在变换 $t'=1-t$ 下化为

$$dx/dt'=-f(x,y,1-t',\varepsilon)\equiv F(x,y,t',\varepsilon) \tag{2.10}$$

$$\varepsilon\, dy/dt'=-g(x,y,1-t',\varepsilon)\equiv G(x,y,t',\varepsilon) \tag{2.11}$$

$$x(0,\varepsilon)=\beta(\varepsilon) \tag{2.12}$$

把(2.9)代入(2.10)～(2.12)且比较同次幂系数得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_0^*}{dt'}=F(x_0^*,y_0^*,t',0)\\&0=G(x_0^*,y_0^*,t',0)\\&x_0^*(0)=\beta_0\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

和 $r=1,2,\cdots,R$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_r^*}{dt'}=F_x^*(t')x_r^*+F_y^*(t')y_r^*+p_r(t',\varepsilon)\\&\frac{dy_{r-1}^*}{dt'}=G_x^*(t')x_r^*+G_y^*(t')y_r^*+q_r(t',\varepsilon)\\&x_r^*(0)=\beta_r\end{aligned}\right\} \tag{2.13$_r$}$$

这里$\beta(\varepsilon)=\sum\limits_{r=0}^{R}\beta_r\varepsilon^r+\Theta(\varepsilon)$， $F_x^*(t')=F_x(x_0^*(t'),\ y_0^*(t'),\ t',\ 0)$，其余类似， $p_r(t',\ \varepsilon)$， $q_r(t',\varepsilon)$是x_i^*，y_i^* $(i\leqslant r-1)$的多项式，其系数依赖于t'，x_0^*，y_0^*。

由条件(H_1)～(H_4)知，可以逐个地确定x_r^*，y_r^* $(r=0,1,\cdots,R)$，于是得到

引理 1 若(H_1)～(H_4)成立，则外部问题(2.6)～(2.8)有解$x=x^*(t,\varepsilon)$，$y=y^*(t,\varepsilon)$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 且满足

$$\left.\begin{aligned}&x^*(t,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}x_r^*(t)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1})\\&y^*(t,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}y_r^*(t)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1})\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

这里 $O(\varepsilon^{R+1})$在 $0\leqslant t\leqslant 1$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$上一致成立。

详细证明参见[3]。

现设外部解(x^*,y^*)已求得，作变换

$$X=x-x^*,\quad Y=y-y^*,\quad \tau=t/\varepsilon$$

则(2.1)～(2.4)变为

$$dX/d\tau=\varepsilon\hat{f}(\varepsilon\tau,X,Y,\varepsilon) \tag{2.15}$$

$$dY/d\tau=\hat{g}(\varepsilon\tau,X,Y,\varepsilon) \tag{2.16}$$

$$X(1/\varepsilon,\ \varepsilon)=0 \tag{2.17}$$

$$a_1(\varepsilon)X(0,\varepsilon)+a_2(\varepsilon)Y(0,\varepsilon)=\gamma(\varepsilon) \tag{2.18}$$

这里 $\hat{f}=f(\varepsilon\tau,\ x^*+X,\ y^*+Y,\ \varepsilon)-f(\varepsilon\tau,\ x^*,\ y^*,\ \varepsilon)$，$\hat{g}$ 类似，且

$$\hat{f}(t,0,0,\varepsilon)=0,\quad \hat{g}(t,0,0,\varepsilon)=0 \tag{2.19}$$

$$\gamma(\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)-a_1(\varepsilon)x^*(0,\varepsilon)-a_2(\varepsilon)y^*(0,\varepsilon)$$

由假设(H_5)和文献[4]可知，存在二个常数 δ，ν，使得

$$A_\delta(t)=\frac{\partial \hat{g}}{\partial Y}(t,0,0,0)+\delta I$$

有 k 个特征值满足 $\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant-\nu$，和 $n-k$ 个特征值满足 $\mathrm{Re}\lambda(t)\geqslant\nu$ $(0\leqslant t\leqslant1)$。且存在一个光滑的非奇异矩阵$Q(t)$，使得

$$Q^{-1}(t)A_\delta(t)Q(t)=\mathrm{diag}(D(t),\ E(t))$$

这里 D 是 $k\times k$ 阶矩阵，它的所有特征值的实部具有 $\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant-\nu(0\leqslant t\leqslant1)$，$E$是$(n-k)\times(n-k)$阶矩阵，其特征值的实部有$\mathrm{Re}\lambda(t)\geqslant\nu$。

为了研究(2.15)～(2.18)的解，我们考虑下述问题的解

$$dX/d\tau=\varepsilon\hat{f}(\varepsilon\tau,X,Y,\varepsilon) \tag{2.20}$$

$$dY/d\tau=\hat{g}(\varepsilon\tau,X,Y,\varepsilon) \tag{2.21}$$

$$X(0,\varepsilon)=\xi^*(\varepsilon) \tag{2.22}$$

$$Y(0,\varepsilon)=a_2^{-1}(\varepsilon)\gamma(\varepsilon)-a_2^{-1}(\varepsilon)a_1(\varepsilon)\xi^*\equiv\hat{\eta} \tag{2.23}$$

这里取$\xi^*(0)=0$，$\xi^*\in E^m$。引进变换

$$X=U\exp[-\delta\tau] \tag{2.24}$$

$$Y=Q(\varepsilon\tau)\begin{pmatrix}V\\W\end{pmatrix}\exp[-\delta\tau]-A_\delta^{-1}(\varepsilon\tau)\hat{g}_X(\varepsilon\tau,0,0,0)U\exp[-\delta\tau] \tag{2.25}$$

这里$V\in E^k$，$W\in E^{n-k}$，把(2.24)～(2.25)代入(2.20)～(2.23)得到

$$\frac{dU}{d\tau}=\delta U+\varepsilon\exp[\tau\delta]\mathscr{F}[\varepsilon\tau,\exp[-\delta\tau](U,V,W),\varepsilon] \tag{2.26}$$

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}V\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D(\varepsilon\tau)&0\\0&E(\varepsilon\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V\\W\end{pmatrix}+\exp[\delta\tau]\mathscr{G}[\varepsilon\tau,\exp[-\delta\tau](U,V,W),\varepsilon] \tag{2.27}$$

$$U(0)=\hat{\xi}^*(\varepsilon) \tag{2.28}$$

$$V(0)=\hat{\eta}^*(\delta) \tag{2.29}$$

$$W(0)=\hat{\zeta}^*(\varepsilon) \tag{2.30}$$

这里 $\mathscr{F}=\hat{f}=f(\varepsilon\tau,x^*+U\exp[-\delta\tau],\ y^*+\exp[-\delta\tau]Q(\varepsilon\tau)\begin{pmatrix}V\\W\end{pmatrix}$

$$-A_\delta^{-1}(\varepsilon\tau)\hat{g}_X(\varepsilon\tau,0,\ 0,\ 0)\cdot U\exp[-\delta\tau],\varepsilon)-f(\varepsilon\tau,x^*,y^*,\varepsilon),$$

$\mathscr{G}$类似得出，且$\mathscr{F}$，$\mathscr{G}=\begin{pmatrix}\mathscr{G}_1\\\mathscr{G}_2\end{pmatrix}=O(|U|+|V|+|W|+\varepsilon)(|U|+|V|+|W|)$，在 $0<\tau\leqslant 1/\varepsilon$上当$|U|+|V|+|W|+\varepsilon$充分小时，一致成立，$(\hat{\xi}^*,\ \hat{\eta}^*,\ \hat{\zeta}^*)$是$(\xi^*,\hat{\eta})$经变换(2.24)～(2.25)的结果，$\hat{\xi}^*=\xi^*\in E^m$，$\hat{\eta}^*\in E^k$，$\hat{\zeta}^*\in E^{n-k}$。

为了解问题(2.26)～(2.30)，考虑一个特殊初值的积分方程

$$U=-\varepsilon\int_\tau^{\frac{1}{\varepsilon}}\exp[\delta(\tau-\sigma)]\exp[\delta\sigma]\mathscr{F}[\varepsilon\sigma,\exp[-\delta\sigma](U,V,W),\varepsilon]d\sigma \tag{2.31}$$

$$V=\chi(\tau,0,\varepsilon)\hat{\eta}^*(\varepsilon)+\int_0^\tau\chi(\tau,\sigma,\varepsilon)\exp[\delta\sigma]\mathscr{G}_1[\varepsilon\sigma,\exp[-\delta\sigma](U,V,W),\varepsilon]d\sigma \tag{2.32}$$

$$W=-\int_{\tau}^{1/\varepsilon}\Psi(\tau,\sigma,\varepsilon)\exp[\delta\sigma]\mathcal{G}_2[\varepsilon\sigma,\exp[-\delta\sigma](U,V,W),\varepsilon]d\sigma \tag{2.33}$$

则由文献[3]知下列引理成立。

引理2　若$(H_1)\sim(H_6)$成立，则(2.31)～(2.33)有唯一解$U(\tau,\varepsilon)$，$V(\tau,\varepsilon)$，$W(\tau,\varepsilon)$，它们关于ε的直到$R+1$阶导数在$\varepsilon=0$处连续，且

$$|U(\tau,\varepsilon)|+|V(\tau,\varepsilon)|+|W(\tau,\varepsilon)|\leqslant K_1|\hat{\eta}^*(\varepsilon)|\exp[-\delta_1\tau],$$

$$|U^{(r)}(\tau,\varepsilon)|+|V^{(r)}(\tau,\varepsilon)|+|W^{(r)}(\tau;\varepsilon)|\leqslant K'\left|\sum_{i=0}^{R+1}\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right)^i\hat{\eta}^*(\varepsilon)\right|\exp[-\delta'\tau],$$

$$(r=1,2,\cdots,R+1;\ 0\leqslant\tau\leqslant1/\varepsilon;\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon')$$

如果　$\xi^*(\varepsilon)=U(0,\varepsilon;\hat{\eta}^*)$，$\zeta^*(\varepsilon)=W(0,\varepsilon;\hat{\eta}^*)$　(2.34)

$$\begin{pmatrix}\hat{\eta}^*(\varepsilon)\\ W(0,\varepsilon;\hat{\eta}^*)\end{pmatrix}=Q^{-1}(0)[a_2^{-1}(\varepsilon)(\gamma(\varepsilon)-a_1(\varepsilon)\xi^*(\varepsilon))+A_8^{-1}(0)g_X(0,0,0,0)\xi^*(\varepsilon)] \tag{2.35}$$

成立，则(2.26)～(2.30)存在唯一解$U=U(\tau,\varepsilon;\hat{\eta}^*)$，$V=V(\tau,\varepsilon;\hat{\eta}^*)$，$W=W(\tau,\varepsilon;\hat{\eta}^*)$，且方程(2.34)定义了一个$k$维流形$S^*(\varepsilon)\subset E^{m+n}$，

即　$S^*(\varepsilon)=\{(\xi^*,\hat{\eta}^*,\zeta^*),\ \xi^*=U(0,\varepsilon,\hat{\eta}^*),\ \zeta^*=W(0,\varepsilon;\hat{\eta}^*)\}$。

显然，有　$U\left(1/\varepsilon,\ \varepsilon\right)=0$。

另外，可以证明（见文献[3]）

$$\left|\frac{\partial U}{\partial\xi^*}(0,\varepsilon;\hat{\eta}^*)\right|=O(\varepsilon) \tag{2.36}$$

令

$$\Omega(\xi^*,\varepsilon)=\xi^*-U(0,\varepsilon;\hat{\eta}^*).$$

由　$\xi^*(0)=0$，$\varepsilon=0$，　得到　$\Omega(0,0)=0$，

又由　$\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi^*}=I-\dfrac{\partial U}{\partial\xi^*}(0,\varepsilon,\hat{\eta}^*)$，

则有

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi^*}(0,0)=I.$$

因此，由隐函数存在唯一性定理知，对每个充分小的$\varepsilon>0$，方程$\Omega(\xi^*,\varepsilon)=0$确定唯一的$\xi^*$。

这样就推得下面的引理。

引理3　设条件$(H_1)\sim(H_6)$成立，则对充分小的$\varepsilon>0$，存在一个k维流形$S(\varepsilon)\subset E^{m+n}$，当$(\xi^*,\hat{\eta})\in S(\varepsilon)$时，(2.20)～(2.23)有唯一解$X=X(\tau,\varepsilon)$，$Y=Y(\tau,\varepsilon)$，从而(2.15)～(2.18)有唯一解$X=X(t,\varepsilon)$，$Y=Y(t,\varepsilon)$。而且，如果$(\xi^*,\hat{\eta})\in S(\varepsilon)$，则解可表为

$$X(\tau,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}X_r(\tau)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1})$$

$$Y(\tau,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}Y_r(\tau)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1})$$

这里$O(\varepsilon^{R+1})$当$\varepsilon\to 0$时，对$0\leqslant t\leqslant 1$一致成立．其中X_r，Y_r可由下列方程组唯一确定

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX_0}{d\tau}=0, \qquad X_0(0)=\xi^*(0)\\&\frac{dY_0}{d\tau}=g(0,X_0,Y_0,O), \quad Y_0(0)=\hat{\eta}(0)\end{aligned}\right\} \qquad (2.37)_0$$

对$r=1,2,\cdots,R+1$,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX_r}{d\tau}=P_r(\tau), \qquad X_r(0)=\xi^*_r\\&\frac{dY^r}{d\tau}=g_X(\tau)X_r+g_Y(\tau)Y_r+Q_r(\tau), \ Y_r(0)=\hat{\eta}_r\end{aligned}\right\} \qquad (2.37)_r$$

其中：$\xi^*(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{R}\xi^*_r\varepsilon^r+\hat{\Theta}$，等；$g_X(\tau)=\dfrac{\partial g}{\partial X}(0,X_0(\tau),Y_0(\tau),0)$，等．$P_r$，$Q_r$是$X_i$，$Y_i(1\leqslant i\leqslant r-1)$的多项式，其系数依赖于$\tau$，$X_0(\tau)$，$Y_0(\tau)$．最后，存在正常数$K_1$，$\delta_1$，$\varepsilon_0''$，使得

$$|X(t,\varepsilon)|+|Y(t,\varepsilon)|\leqslant K_1\exp\{-\delta_1 t/\varepsilon\} \qquad (0\leqslant t\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0'')$$

证明详见文献[3]．

这里流形$S(\varepsilon)$是由变换(2.24)～(2.25)作用在流形$S^*(\varepsilon)$上所得到的，其中$\hat{\eta}^*$可表为

$$\begin{pmatrix}\hat{\eta}^*\\W(0,\varepsilon;\hat{\eta}^*)\end{pmatrix}=Q^{-1}(0)[a_2^{-1}(\varepsilon)(\alpha(\varepsilon)-a_1(\varepsilon)x^*(0,\varepsilon))-y^*(0,\varepsilon)$$
$$-a_2^{-1}(\varepsilon)a_1(\varepsilon)\xi^*(\varepsilon)+A_3^{-1}(0)g_X(0,0,0,0)\xi^*] \qquad (2.38)$$

综合上述结果，我们得到

定理1 若条件(H_1)～(H_5)成立，则对任何一个$\varepsilon>0$，存在一个k维流形$S(\varepsilon)\subset E^n$，使得若$\alpha(\varepsilon)\in S(\varepsilon)$（即$\alpha(\varepsilon)$满足限制条件(2.38)），问题(2.1)～(2.4)有唯一解$x=x(t,\varepsilon)$，$y=y(t,\varepsilon)(0\leqslant t\leqslant 1)$．且解可表为外部解$(x^*,y^*)$与边界层解$(X(t/\varepsilon,\varepsilon)$，$Y(t/\varepsilon,\varepsilon))$之和，即

$$x(t,\varepsilon)=x^*(t,\varepsilon)+X(t/\varepsilon,\varepsilon),$$
$$y(t,\varepsilon)=y^*(t,\varepsilon)+Y(t/\varepsilon,\varepsilon),$$

这里外部解$x^*(t,\varepsilon)$，$y^*(t,\varepsilon)$在$0\leqslant t\leqslant 1$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$一致成立着

$$x^*(t,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}x^*_r(t)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1}),$$

$$y^*(t,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}y^*_r(t)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1}),$$

其中$x^*_r(t)$，$y^*_r(t)$由问题(2.13)所确定．

而边界层解在$0\leqslant t\leqslant 1$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$上一致成立着

$$X(t/\varepsilon,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}X_r(t/\varepsilon)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1}),$$

$$Y(t/\varepsilon,\varepsilon)-\sum_{r=0}^{R}Y_r(t/\varepsilon)\varepsilon^r=O(\varepsilon^{R+1}),$$

其中X_r，Y_r由问题(2.37)所确定．

三、一般情形的讨论

现在回过来考虑问题(1.1)～(1.4)。其相应的退化问题为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx_0}{dt}=f(x_0,y_0,t,0)\\&0=g(x_0,y_0,t,0)\\&b_1(0)x_0(1,0)=\beta(0)\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

为了叙述我们的结果，我们对于问题(1.1)～(1.4)作如下假设

$(H_0)^*$ $b_1(\varepsilon)$在$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$上存在逆矩阵，且$b_1(0)=I$。

$(H_1)^*$ 退化问题(3.1)在$0\leqslant t\leqslant 1$上有连续解$x_0=x_0(t)$，$y_0=y_0(t)$，且$\gamma(0)\equiv\alpha(0)-a_1(0)x_0(0)-a_2(0)y_0(0)$充分小。

$(H_2)^*$ 在(t,x_0,y_0)的某一邻域里函数f, g有关于(t,x,y)的直至$R+2$阶连续导数，且$\alpha(\varepsilon)$，$\beta(\varepsilon)$，$a_1(\varepsilon)$，$a_2(\varepsilon)$，$b_1(\varepsilon)$，$b_2(\varepsilon)$均为$\varepsilon(0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$的光滑函数$(0\leqslant t\leqslant 1)$。

$(H_3)^*$ Jacobian 矩阵$g_y(t)=\dfrac{\partial g}{\partial y}(t,x_0,y_0,0)$是在$0\leqslant t\leqslant 1$上的非奇异矩阵。

$(H_4)^*$ 存在一个光滑的非奇异矩阵$P(t)$，使得

$$P^{-1}(t)g_y(t)P(t)=A(t).$$

这里$A(t)$的性质及基本解矩阵$\phi_i(s)$，$\psi_i(s)$的性质同(H_4)的条件。

$(H_5)^*$ 函数$g_y(t)$有k个特征值$(1\leqslant k\leqslant n)$具有负实部，即$\mathrm{Re}\lambda(t)\leqslant-\mu<0$，而其余的特征值满足$\mathrm{Re}\lambda(t)>-\mu$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$。

定理2 若$(H_0)^*$～$(H_5)^*$条件成立，则问题(1.1)～(1.4)存在唯一的解$x=x(t,\varepsilon)$，$y=y(t,\varepsilon)$ $(0\leqslant t\leqslant 1$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0)$，且解可表为外部解$(x^*(t,\varepsilon)$，$y^*(t,\varepsilon))$与边界层解$(X(t/\varepsilon,\varepsilon)$，$Y(t/\varepsilon,\varepsilon))$之和，即在$0\leqslant t\leqslant 1$，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$上有

$$x(t,\varepsilon)=x^*(t,\varepsilon)+X(t/\varepsilon,\varepsilon),\quad y(t,\varepsilon)=y^*(t,\varepsilon)+Y(t/\varepsilon,\varepsilon).$$

证 令

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{X}=b_1(\varepsilon)x+\varepsilon b_2(\varepsilon)y\\&\tilde{Y}=y\end{aligned}\right\}\qquad(3.2)$$

显然这是一个可逆的线性变换。于是，问题(1.1)～(1.4)就化为

$$\frac{d\tilde{X}}{dt}=b_1(\varepsilon)f(x,y,t,\varepsilon)+b_2(\varepsilon)g(x,y,t,\varepsilon)\equiv\tilde{f}(x,y,t,\varepsilon)\qquad(3.3)$$

$$\varepsilon\frac{d\tilde{Y}}{dt}=g(x,y,t,\varepsilon)\equiv\tilde{g}(x,y,t,\varepsilon)\qquad(3.4)$$

$$\tilde{X}(1,\varepsilon)=\beta(\varepsilon)\qquad(3.5)$$

$$a_1(\varepsilon)b_1^{-1}(\varepsilon)\tilde{X}(0,\varepsilon)+[a_2(\varepsilon)-\varepsilon b_1^{-1}(\varepsilon)b_2(\varepsilon)]\tilde{Y}(0,\varepsilon)=\alpha(\varepsilon)\qquad(3.6)$$

由条件$(H_0)^*$～$(H_5)^*$成立，可验证特殊情形边值问题(2.1)～(2.4)的假设条件(H_1)～(H_5)成立，由定理1即可证得定理2结论成立。

参 考 文 献

[1] O'Malley, R. E., Singular perturbation of a boundary value problem for a system of nonlinear differential equations, *J. Differential Equations*, **8** (1970), 431—446.
[2] 江福汝，关于常微分方程非线性边值问题的奇异摄动，中国科学(A辑)，3 (1985)，232—242.
[3] Hoppensteadt, F., Properties of solutions of ordinary differential equations with small parameters, *Comm. Pure Appl. Math.*, **26** (1971), 807—840.
[4] Chang, K. W. and W. A. Coppel, Singular perturbations of initial value problems over a finite interval, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **32** (1969), 268—280.

Singular Perturbation of Nonlinear Vector Boundary Value Problem

Kang Sheng-liang Chen Qi

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

In this paper we study the perturbed boundary value problem of the form

$$\frac{dx}{dt}=f(x,y,t;\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=g(x,y,t;\varepsilon),$$

$$a_1(\varepsilon)x(0,\varepsilon)+a_2(\varepsilon)y(0,\varepsilon)=\alpha(\varepsilon),$$

$$b_1(\varepsilon)x(1,\varepsilon)+\varepsilon b_2(\varepsilon)y(1,\varepsilon)=\beta(\varepsilon),$$

in which x, f, $\beta\in E^m$, y, g, $\alpha\in E^n$, $0<\varepsilon\ll 1$ and $a_1(\varepsilon)$, $a_2(\varepsilon)$, $b_1(\varepsilon)$ and $b_2(\varepsilon)$ are matrices of the appropriate size. Under the condition that $g_y(t)$ is nonsingular and other suitable restrictions, the existence of the solution is proved, the asymptotic expansion of solution of order n is constructed, and the remainder term is estimated.