

# 应用功的互等定理计算弹性圆 薄板挠曲面方程

李 农 付宝连

(燕山大学, 1986年11月27日收到)

## 摘 要

本文在文献[1], [2]的基础上, 进一步将功的互等定理推广应用于弹性圆薄板, 提出一种求解具有复杂边界条件, 受复杂载荷作用的圆板挠曲面方程的简便, 通用的新方法。

## 一、引 言

迄今为止, 求解弹性矩形薄板的方法不下十几种, 如伽辽金法, 叠加法等等。然而求解弹性圆薄板的方法却不是很多。主要原因是, 除了载荷对称, 结构对称这种特殊情形以外, 一般情况下, 圆板的平衡微分方程和边界条件难以同时得到精确满足。

文献[1]首先应用功的互等定理于悬臂矩形板的对称弯曲; 文献[2]则进一步指出, 在一定条件下, 功的互等定理等价于叠加原理, 并且给出了悬臂矩形板非对称弯曲的一般表达式。本文将把功的互等定理运用到圆薄板挠曲面方程计算。计算实例表明, 该方法简便, 有效。从而为求解弹性圆薄板弯曲找到了一种新的计算方法。

## 二、基本原理和方程

功的互等定理是弹性力学中一个著名定理, 它指出<sup>[3]</sup>, 在两个线弹性体之间, 不管它们的边界条件是否相同, 也不管它们所作用的载荷是否相同, 只要它们具有相同的弹性和相同的形状, 则作用在第一个弹性体上的载荷在第二个弹性体相应位移上做的功等于第二个弹性体上的载荷在第一个弹性体相应位移上做的功。

据[1], [2], 假设具有单位集中载荷作用的系统为第一弹性体, 并设其位移分量和表面力分量为 $U_1, V_1, W_1$ 和 $P_{z1}, P_{y1}, P_{x1}$ , 而真实系统为第二弹性体, 且其位移分量为 $U_2, V_2, W_2$ , 表面力分量和体力分量为 $P_{z2}, P_{y2}, P_{x2}$ 及 $X_2, Y_2, Z_2$ , 并用 $\Delta_2(\xi, \eta, \zeta)$ 表示它的位移方程。这时, 功的互等定理可表示为

\* 钱伟长推荐。

$$\begin{aligned}
& \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) + \iint_S (P_{x1}U_2 + P_{y1}V_2 + P_{z1}W_2)_{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)} dS \\
& = \iiint_D (X_2U_1 + Y_2V_1 + Z_2W_1)_{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)} d\Omega \\
& \quad + \iint_{\bar{S}} (P_{z2}U_1 + P_{y2}V_1 + P_{x2}W_1)_{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)} dS \tag{2.1}
\end{aligned}$$

将(2.1)应用于弹性圆薄板, 假设在流动极坐标 \$(\xi, \varphi)\$ 处作用一单位集中载荷, 且具有固定边界条件的圆板为第一弹性体, 而具有真实边界条件, 受真实载荷作用的具有同样大小的圆板为第二弹性体, 在这两个弹性体之间运用功的互等定理, 则(2.1)成为

$$\begin{aligned}
W_2(\xi, \varphi) &= \iint_A q_2(\mathbf{r}, \theta) W_1(\xi, \varphi, \mathbf{r}, \theta) r dr d\theta \\
&+ \sum_{i=1}^m P_{2i} W_1(\xi, \varphi, r_i, \theta_i) \\
&+ \sum_{j=1}^n M_{2rj} \left[ \frac{\partial}{\partial r} W_1(\xi, \varphi, \mathbf{r}, \theta) \right]_{\substack{r=r_j \\ \theta=\theta_j}} \\
&+ \sum_{k=1}^p M_{2r\theta k} \left[ \frac{\partial}{\partial s} W_1(\xi, \varphi, \mathbf{r}, \theta) \right]_{\substack{r=r_k \\ \theta=\theta_k}} \\
&- \int_C \left( \frac{\partial M_{1r\theta}}{\partial s} + Q_{1r} \right)_{(r,\theta,\xi,\varphi)} W_2(\mathbf{r}, \theta) ds \\
&+ \int_C (M_{1r})_{(r,\theta,\xi,\varphi)} \frac{\partial}{\partial r} W_2(\mathbf{r}, \theta) ds \tag{2.2}
\end{aligned}$$

图1所示圆板, 周边固定, 在流动坐标 \$A(\xi, \varphi)\$ 处作用一单位集中载荷. 根据文献[4], 修正以后, 其挠曲方程可写成

$$W_1(\xi, \varphi, \mathbf{r}, \theta) = \begin{cases} R_0^1 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m^1 \cos m(\theta - \varphi) & (0 \leq r \leq \xi) \\ R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m(\theta - \varphi) & (\xi \leq r \leq a) \end{cases} \tag{2.3}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R_0^1 &= \frac{1}{8\pi D} \left[ (r^2 + \xi^2) \ln \frac{\xi}{a} + \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - \xi^2)}{2a^2} \right] \\ R_0 &= \frac{1}{8\pi D} \left[ (r^2 + \xi^2) \ln \frac{r}{a} + \frac{(a^2 + \xi^2)(a^2 - r^2)}{2a^2} \right] \end{aligned} \right\}$$

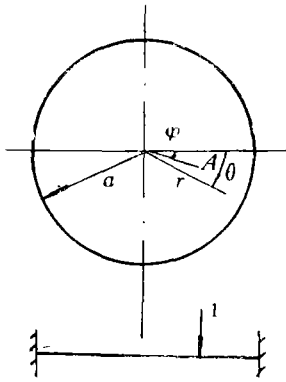


图 1

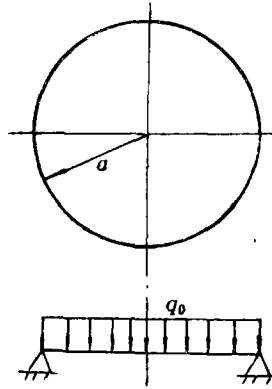


图 2

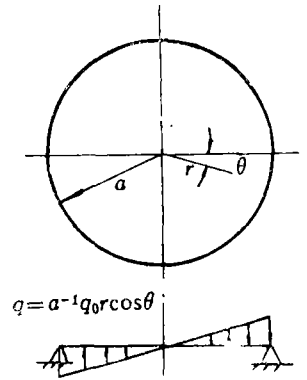


图 3

$$\left. \begin{aligned}
 R_1^1 &= -\frac{\xi^3}{16\pi D} \left[ \frac{2(a^2 - \xi^2)r}{a^2 \xi^2} + \frac{(a^2 - \xi^2)^2 r^3}{a^4 \xi^4} - \frac{4r}{\xi^2} \ln \frac{a}{\xi} \right] \\
 R_1 &= -\frac{\xi^3}{16\pi D} \left[ \frac{1}{r} + \frac{2(a^2 - \xi^2)r}{a^2 \xi^2} - \frac{(2a^2 - \xi^2)r^3}{a^4 \xi^2} - \frac{4r}{\xi^2} \ln \frac{a}{r} \right] \\
 R_m^1 &= 8m(m-1)\pi D \left\{ \frac{r^m}{a^{2m}} \left[ (m-1)\xi^2 - ma^2 + \frac{a^{2m}}{\xi^{2m-2}} + (m-1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{r^{m+2}}{a^{2m}} \left[ 1 - \frac{m}{m+1} \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{1}{m+1} \left( \frac{a}{\xi} \right)^{2m} \right] \right\} \\
 R_m &= 8m(m-1)\pi D \left\{ \frac{r^m}{a^{2m}} \left[ (m-1)\xi^2 - ma^2 + (m-1)r^2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{m(m-1)}{m+1} \frac{\xi^2 r^2}{a^2} \right] + \frac{1}{r^m} \left( r^2 - \frac{m-1}{m+1} \xi^2 \right) \right\} \\
 &\quad (m=2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

### 三、若干算例

#### (一) 周边简支, 受均布载荷作用的圆板

作为第一个例子, 我们考虑一个周边简支, 受均布载荷作用的圆板。假设其边界转角为  $\theta_0$  (常数)。在图 1 和图 2 之间运用功的互等定理, 则(2.2)成为

$$W_2(\xi, \varphi) = \iint_A q_0 W_1(\xi, \varphi, r, \theta) dA + \int_0^{2\pi} M_{1r}|_{r=a} \theta_0 ds \quad (3.1)$$

式中

$$M_{1r}|_{r=a} = -D \left[ \frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{\partial W_1}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial \theta^2} \right) \right]_{r=a}$$

将(2.4)代入上式, 得

$$M_{1r}|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi} \left( 1 - \frac{\xi^2}{a^2} \right) \quad (3.2)$$

将(2.3)(3.2)代入(3.1), 积分后得

$$W_2(\xi, \varphi) = \frac{q_0(a^2 - \xi^2)^2}{64D} - \frac{(a^2 - \xi^2)\theta_0}{2a}$$

式中  $\theta_0$  可由下列边界条件确定

$$M_{2\xi}|_{\xi=a} = -D \left[ \frac{\partial^2 W_2}{2\xi^2} + \mu \left( \frac{\partial W_2}{\xi \partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2 W_2}{\partial \varphi^2} \right) \right]_{\xi=a} = 0$$

结果得

$$\theta_0 = -\frac{q_0 a^3}{8D(1+\mu)}$$

故

$$W_2(\xi, \varphi) = \frac{q_0(a^2 - \xi^2)}{64D} \left[ \frac{a^2(5+\mu)}{1+\mu} - \xi^2 \right]$$

## (二) 周边简支, 受线性载荷作用的圆板

如图 3 所示, 设其边界转角为

$$\theta_a = \sum_{m=0,1}^{\infty} \theta_m \cos m\theta$$

这里  $\theta_m$  为待定参数.

在图 1 与图 3 之间运用功的互等定理, 则 (2.2) 成为

$$W_2(\xi, \varphi) = \iint_A q W_1(\xi, \varphi, r, \theta) dA + \int_0^a M_{1r}|_{r=a} \theta_a ds \quad (3.3)$$

式中

$$\begin{aligned} M_{1r}|_{r=a} &= -D \left[ \frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{\partial W_1}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W_1}{r^2 \partial \theta^2} \right) \right]_{r=a} \\ &= -\frac{1}{4\pi a^2} (a^2 - \xi^2) - \frac{1}{2\pi a^2} \sum_{m=1,2}^{\infty} \left( \frac{\xi}{a} \right)^m (a^2 - \xi^2) \cos m(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

将其代入 (3.3), 并注意到

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \cos m(\theta - \varphi) d\theta = \begin{cases} \pi \cos \varphi & (m=1) \\ 0 & (m \neq 1) \end{cases}$$

最后 (3.3) 成为

$$W_2(\xi, \varphi) = \frac{q_0 \xi}{192Da} (a^2 - \xi^2)^2 \cos \varphi - \frac{1}{2a} \sum_{m=0,1}^{\infty} \left( \frac{\xi}{a} \right)^m (a^2 - \xi^2) \theta_m \cos m\varphi$$

由边界条件

$$M_{2\xi}|_{\xi=a} = -D \left[ \frac{\partial^2 W_2}{2\xi^2} + \mu \left( \frac{\partial W_2}{\xi \partial \xi} + \frac{\partial^2 W_2}{\xi^2 \partial \varphi^2} \right) \right]_{\xi=a} = 0$$

确定出

$$\begin{cases} \theta_m = 0 & (m \neq 1) \\ \theta_1 = -\frac{q_0 a^3}{24D(3+\mu)} \end{cases}$$

故

$$W_2(\xi, \varphi) = \frac{q_0 a^4 \rho(1-\rho^2)}{192D(3+\mu)} [7+\mu - (3+\mu)\rho^2] \cos \varphi$$

这里  $\rho = \xi/a$

### (三) 周边简支, 受反对称均载作用的圆板

如图 4 所示, 设其边界转角为

$$\theta_a = \sum_{m=1,3}^{\infty} \theta_m \sin m\theta$$

这里  $\theta_m$  为待定参数。

在图 1 与图 4 之间运用功的互等定理, (2.2) 成为

$$W_2(\xi, \varphi) = \iint_{\substack{0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq a}} q_0 W_1(\xi, \varphi, r, \theta) dA + \iint_{\substack{\pi \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a}} (-q_0) W_1(\xi, \varphi, r, \theta) dA + \int_c M_{1r}|_{r=a} \theta_a ds \quad (3.4)$$

式中 
$$M_{1r}|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi a^2} (a^2 - \xi^2) - \sum_{m=1,2}^{\infty} \left(\frac{\xi}{a}\right)^m (a^2 - \xi^2) \cos(\theta - \varphi)$$

注意到

$$\int_0^{\pi} \cos m(\theta - \varphi) d\theta = \begin{cases} \frac{2}{m} \sin m\varphi & (m=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos m(\theta - \varphi) d\theta = \begin{cases} -\frac{2}{m} \sin m\varphi & (m=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m(\theta - \varphi) \cos m\theta d\theta = \begin{cases} \pi \sin m\varphi & (m=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (\text{其它}) \end{cases}$$

最后 (3.4) 成为

$$W_2(\xi, \varphi) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{2q_0 \xi^m}{\pi D m} \left[ \frac{2\xi^{-m+4}}{(16-m^2)(4-m^2)} - \frac{\xi^2 a^{-m+2}}{(m+4)(4-m^2)} \right]$$

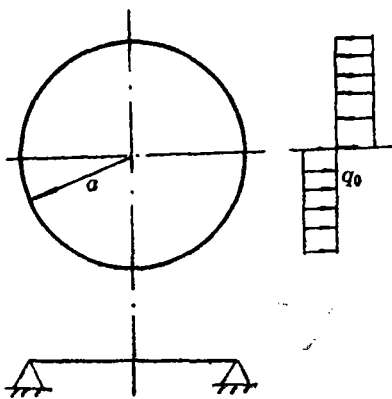


图 4

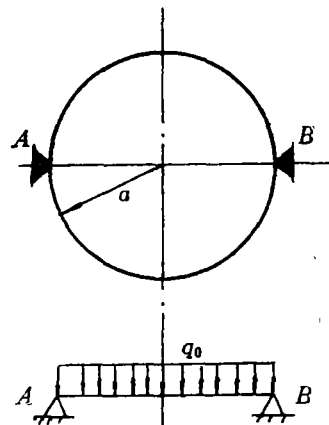


图 5

$$+ \left[ \frac{a^{-m+4}}{(m+2)(16-m^2)} \right] \sin m\varphi - \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{\theta_m}{2a} \left( \frac{\xi}{a} \right)^m (a^2 - \xi^2) \sin m\varphi$$

由边界条件

$$M_{2\xi}|_{\xi=a} = -D \left[ \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} + \mu \left( \frac{\partial W_2}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} \right) \right]_{\xi=a} = 0$$

确定出

$$\theta_m = \frac{2q_0 a^3 (m-3)(m-4)}{(4-m^2)(16-m^2) \left( m + \frac{1+\mu}{2} \right)}$$

故

$$W_2(\xi, \varphi) = \frac{2q_0 a^4}{\pi D} \sum_{m=1,2}^{\infty} \left[ 2 \left( \frac{\xi}{a} \right)^4 \frac{1}{m(16-m^2)(4-m^2)} - \left( \frac{\xi}{a} \right)^{m+2} \frac{m+3+\mu}{m(m+4)(4-m^2)(2m+1+\mu)} + \left( \frac{\xi}{a} \right)^m \frac{m+5+\mu}{m(m+2)(16-m^2)(2m+1+\mu)} \right] \sin m\varphi$$

我们注意到, (一)(二)(三)所得  $W_2(\xi, \varphi)$  均与文献[4]相同.

#### (四) 边界两点支承, 受均布载荷作用的圆板

图5所示圆板在  $A$ 、 $B$  两点被支承, 并承受均布载荷  $q_0$  作用. 设其边界挠度和转角为

$$f_a = \sum_{m=0,2}^{\infty} A_m \cos m\theta$$

及

$$\theta_a = \sum_{m=0,2}^{\infty} B_m \cos m\theta$$

在图1与图5之间运用功的互等定理, 则(2.2)成为

$$W_2(\xi, \varphi) = \iint_A q_0 W_1(\xi, \varphi, r, \theta) dA + \int_c M_{1r}|_{r=a} \theta_a ds - \int_c \left( \frac{\partial M_{1r\theta}}{r \partial \theta} + Q_{1r} \right)_{r=a} f_a ds \quad (3.5)$$

式中

$$M_{1r}|_{r=a} = -\frac{1}{4\pi a^2} (a^2 - \xi^2) - \frac{1}{2\pi a^2} \sum_{m=1,2}^{\infty} \left( \frac{\xi}{a} \right)^m (a^2 - \xi^2) \cos m(\theta - \varphi)$$

$$\left( \frac{\partial M_{1r\theta}}{r \partial \theta} + Q_{1r} \right)_{r=a} = -\frac{1}{2\pi a} - \frac{1}{2\pi a^3} \sum_{m=1,2}^{\infty} \left( \frac{\xi}{a} \right)^m [(m+2)a^2 - m\xi^2] \cos m(\theta - \varphi)$$

将(3.5)积分后, 得

$$W_2(\xi, \varphi) = \frac{q_0 (a^2 - \xi^2)^2}{64D} - \sum_{m=0,2}^{\infty} \frac{B_m}{2a} \left( \frac{\xi}{a} \right)^m (a^2 - \xi^2) \cos m\varphi + \sum_{m=0,2}^{\infty} \frac{A_m}{2a^2} \left( \frac{\xi}{a} \right)^m [(m+2)a^2 - m\xi^2] \cos m\varphi \quad (3.6)$$

为使(3.6)满足全部边界条件,我们将支承点 $A, B$ 处的反力展开成富里哀级数

$$f(\theta) = q_0 a \left( \frac{1}{2} + \sum_{m=2,4}^{\infty} \cos m\theta \right)$$

这时(3.6)所需满足的边界条件成为

$$\left. \begin{aligned} M_{2\xi}|_{\xi=a} &= -D \left[ \frac{\partial^2 W_2}{\partial \xi^2} + \mu \left( \frac{\partial W_2}{\xi \partial \xi} + \frac{\partial^2 W_2}{\xi^2 \partial \varphi^2} \right) \right]_{r=a} = 0 \\ V_{2\xi}|_{\xi=a} &= \left( Q_{2\xi} + \frac{\partial M_{2\xi}}{\xi \partial \varphi} \right)_{\xi=a} = -f(\theta) \\ W_2 \Big|_{\xi=0} &= W_2 \Big|_{\xi=a} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

将(3.6)代入(3.7),经过一系列运算,可得

$$B_0 = -\frac{q_0 a^3}{8D(1+\mu)}, \quad A_0 = -\sum_{m=2,4}^{\infty} A_m$$

$$B_m = \frac{q_0 a^3 (m + \mu m + 2)}{D(3 + \mu)(1 - \mu)(m^2 - 1)m}$$

$$A_m = -\frac{q_0 a^4 (2m + 1 + \mu)}{D(3 + \mu)(1 - \mu)(m^2 - 1)m^2}$$

为验证(3.6)收敛快慢,令 $\xi=0$ ,可得中点挠度

$$W_2(0, \varphi) = \frac{q_0 a^4}{64D} + \frac{q_0 a^4}{16(1+\mu)D} - \sum_{m=2,4}^{\infty} A_m$$

若取 $\mu=0.25$ ,并取级数的前五项,得

$$W_2(0, \varphi) = 0.268 \frac{q_0 a^4}{D}$$

而文献[4]给出的结果为 $0.269q_0 a^4/D$ ,可见本文求出的级数解收敛是很快的。

#### 四、结 束 语

由算例可见,本文提出的求解弹性圆薄板挠曲面方程的方法是十分简便,有效的。只要进行若干简单的定积分运算,即可得到具有复杂边界条件,受复杂载荷作用的圆板挠曲面方程。推广这一方法,还可以求解更复杂边界条件的圆板弯曲问题,这将另文讨论。

#### 参 考 文 献

- [1] 付宝连,一种计算位移方程的新方法,东北重型机械学院第三届学术交流会(1981.1)。
- [2] 付宝连,应用功的互等定理求解具有复杂边界条件的矩形板的挠曲面方程,应用数学和力学,3,3(1982)。
- [3] 钱伟长、叶开沅,《弹性力学》,科学出版社(1956)。
- [4] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd edition (1959),

# Application of Reciprocal Theorem for Calculating the Transverse Displacement Equations of the Thin Elastic Circular Plates

Li Nong    Fu Bao-lian

*(Yanshan University, Qinhuangdao)*

## Abstract

On the basis of [1] and [2], this paper further extends the Reciprocal Theorem to the thin elastic circular plates and proposes a general convenient new method, which can easily solve the transverse displacement equations of the circular plates with various complex edges and loads.