应用数学和力学，第9卷第8期(1988年8月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类含非紧映象方程的正解

兰坤泉　　丁协平

(四川师范大学数学系，1987年6月12日收到)

摘　要

本文定义了从一个Banach空间的相对开子集到另一个Banach空间的A-proper映象的广义相对拓扑度并且引入了广义 P-紧和 P_1-紧概念．其次，我们证明了含这些映象的方程的正解存在性定理．我们的定理改进和推广了最近的一些结果．

一、引　　言

Krasnoselskii[9] 的锥拉伸与锥压缩不动点定理对各类非线性全连续算子方程的求解问题有着重要的作用．许多作者已从各个不同方向改进和推广了这一著名定理（例如见[2]～[12]）．得到锥拉伸与锥压缩不动点定理的重要途径之一就是建立不动点指数(或广义相对拓扑度)(例如见[3]、[10])．并且许多作者都是对空间自身到自身的映象建立不动点指数(或广义相对拓扑度)概念．然而[2]中已对从一个空间到另一个空间的 A-proper 映象研究了存在正解的问题．

本文主要目的就是建立从一个空间到另一个空间的A-proper映象的广义相对拓扑度．引入一类广义P-紧和P_1-紧映象，并研究含这类映象的方程的正解存在问题．我们的结论改进和推广了最近的某些结果．

二、一类A-proper映象的广义相对拓扑度

设X和Y是实Banach空间，D是 X 的一闭凸集．Ω 是 X 的一有界开集使得 $D\cap\Omega\neq\phi$．$\partial\Omega$，$\bar{\Omega}$分别表示Ω在X中的边界和闭包．N表一切自然数的集．

定义2.1　称 $\Gamma=(\{X_n\},\{Y_n\},\{P_n\},\{Q_n\})$ 是一投影逼近格式，如果 $\{X_n\}_{n\in N}$，$\{Y_n\}_{n\in N}$分别是X和Y 的定向有限维子空间序列满足 $\dim X_n=\dim Y_n$，对任意 $n\in N$．$\{P_n\}$: $X_n\to X$，$\{Q_n\}:Y\to Y_n$是连续映象序列．(见[1]定义1.1)．

记$D_n=D\cap X_n$，则D_n为X_n内一闭凸集．假设存在$n_0\in N$，当$n\geqslant n_0$时，$P_n(D_n)\subset D$，令$\Omega_n=D_n\cap P_n^{-1}(D\cap\Omega)$，则 Ω_n 是 D_n 中的开子集．(事实上，$\Omega_n=(P_n|_{Dn})^{-1}(D\cap\Omega)$，这里$(P_n|_{Dn})$表示$P_n$在$D_n$上的限制．因

$$(P_n|_{Dn})^{-1}(D\cap\Omega)\subset P_n^{-1}(D\cap\Omega),\quad (P_n|_{Dn})^{-1}(D\cap\Omega)\subset D_n$$

因此　　$(P_n|_{D_n})^{-1}(D\cap\Omega)\subset D_n\cap P_n^{-1}(D\cap\Omega)=\Omega_n$

另一方面　　$\forall x_n\in\Omega_n\Rightarrow x_n\in D_n$，$x_n\in P_n^{-1}(D\cap\Omega)$

因此　　$P_nx_n\in D\cap\Omega$

又因　　$x_n\in D_n\Rightarrow(P_n|_{D_n})(x_n)=P_n(x_n)\in D\cap\Omega\Rightarrow x_n\in(P_n|_{D_n})^{-1}(D\cap\Omega)$

因此 $\Omega_n=(P_n|_{D_n})^{-1}(D\cap\Omega))$。又因 $P_n:X_n\to X$ 连续，因此 $P_n|_{D_n}:D_n\to D\subset X$ 也连续，而 $D\cap\Omega$是D中开集，因此，$(P_n|_{D_n})^{-1}(D\cap\Omega)$是$D_n$中开集。

我们还假设，对$\forall x\in D$，$\mathrm{dist}(x,P_n(D_n))\to0$，$n\to+\infty$，则由$D\cap\Omega\neq\phi\Rightarrow$存在 $n_0\in N$，当$n\geqslant n_0$时，$\Omega_n\neq\phi$，而且假设，当$n\geqslant n_0$，$Q_n\theta=\theta$。

定义2.2　称映象$T:D\cap\bar{\Omega}\to Y$是关于投影逼近格式$\Gamma=(\{X_n\},\{Y_n\},\{P_n\},\{Q_n\})$的$A$-proper 映象，如果对于任何$\{n_j\}\subset N$，$n_j\to+\infty$ 和相应的序列$\{x_{n_j}|x_{n_j}\in\bar{\Omega}_{n_j}\}$使得$\|Q_{n_j}TP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}y\|\to0$，对某个$y\in Y$成立，那么存在一无限子列$\{x_{n_{j(k)}}\}$和元$x\in D\cap\bar{\Omega}$使得$P_{n_{j(k)}}x_{n_{j(k)}}\to x$和$Tx=y$。

引理2.1　假设 $T:D\cap\bar{\Omega}\to Y$ 是关于Γ的 A-proper 映象。令 $T_n=Q_nTP_n$。如果$\theta\notin T(D\cap\partial\Omega)$，其中$\theta$为$Y$中的零元素，则存在一个整数$n_0\geqslant1$和常数 $d>0$ 使得

$$\|T_nx_n\|\geqslant d,\qquad\forall x_n\in\partial\Omega_n,\ n\geqslant n_0$$

证明　首先注意$\Omega_n\cap\partial\Omega_n=\phi$且$P_n^{-1}(D\cap\bar{\Omega})\cap D_n$是$D_n$中闭子集，且

$$\Omega_n\subset P_n^{-1}(D\cap\bar{\Omega})\cap D_n$$

因此　　$\bar{\Omega}_n\subset P_n^{-1}(\overline{D\cap\bar{\Omega}})\cap D_n$，$\partial\Omega_n\subset D_n\cap P_n^{-1}(\partial(D\cap\Omega))$

如果引理2.1的结论不成立，那么存在一序列$\{n_j\}\subset N$，$n_j\to+\infty$ 和实数序列$\{\varepsilon_j\}$，$\varepsilon_j\to0$以及$\{x_{n_j}|x_{n_j}\in\partial\Omega_{n_j}\}$使得

$$\|T_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}\theta\|=\|T_{n_j}x_{n_j}\|\leqslant\varepsilon_j$$

因T是A-proper映象，则存在一子列$\{x_{n_{j(k)}}\}$和$x\in X$使得$P_{n_{j(k)}}x_{n_{j(k)}}\to x$和$Tx=\theta$。然而$P_{n_{j(k)}}x_{n_{j(k)}}\in\partial(D\cap\Omega)$以及$\partial(D\cap\Omega)$是$X$中的闭集，因此$x\in\partial(D\cap\Omega)\subset D\cap\partial\Omega$，这与$\theta\notin T(D\cap\partial\Omega)$矛盾。

定义2.3　设$T:D\cap\bar{\Omega}\to Y$满足下列条件：

(L_1)　$T_n=Q_nTP_n:\bar{\Omega}_n\to Y_n$连续；

(L_2)　存在$n_0\in N$，$n_0\geqslant1$，当$n\geqslant n_0$时，$\|T_nx_n\|>0$，$\forall x_n\in\partial\Omega_n$；又设存在映象序列$\{S_n\}_{n\geqslant n_0}:X_n\to Y_n$满足如下条件：

(L_3)　S_n是同胚映象；

(L_4)　$S_n^{-1}A_n(\bar{\Omega}_n)\subset D_n$，这里$A_n=S_n-T_n$。

令$Z'=Z\cup\{\pm\infty\}$，其中Z是整数集。我们定义T关于$D\cap\Omega$和Γ在θ点的广义相对拓扑度如下：

$$\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega,\theta)=\{\nu|\nu\in Z',\ \exists\{n_j\}\subset N,\ n_j\to+\infty\text{使得}\deg(T_n,\ \Omega_n,\ \theta)\to\nu\}\qquad(2.1)$$

其中$\deg(T_n,\Omega_n,\theta)=\deg(S_n-A_nr_n,\ T_R\cap r_n^{-1}(\Omega_n),\ \theta)$，$r_n:X_n\to D_n$是收缩核。该式中$\deg(S_n-A_nr_n,\ T_R\cap r_n^{-1}(\Omega_n),\ \theta)$是通常的Brouwer度。$T_R=\{x|x\in X_n,\ \|x\|<R\}\supset\bar{\Omega}_n$。

下面证明这种定义是合理的。以下设$n\geqslant n_0$

(I)　$S_n-A_nr_n:r_n^{-1}(\bar{\Omega}_n)\to Y_n$且$F_n\triangleq\{x|x\in r_n^{-1}(\bar{\Omega}_n),\ (S_n-A_nr_n)x=\theta\}$，则$F_n\subset\Omega_n$。

事实上，若$x_0\in F_n$，即$S_nx_0=A_nr_nx_0$，且$r_n(x_0)\in\bar{\Omega}_n$，由($L_4$)知$x_0\in D_n$，因$r_n$是收缩核，$r_n(x_0)=x_0$，因此，$S_nx_0=A_nr_nx_0=(S_n-T_n)x_0\Rightarrow T_nx_n=\theta$，由($L_2$)知，$x_0\in\Omega_n$。

由r_n连续知，$r_n^{-1}(\Omega_n)$是X_n中的开集，从而$T_R\cap r_n^{-1}(\Omega_n)$是$X_n$中有界开集。易知

$$\theta \notin (S_n - A_n r_n)(\partial(T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n)))$$

事实上，设有 $x_0 \in \partial(T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n))$ 使得 $(S_n - A_n r_n)x_0 = \theta$，由结论(I)知 $x_0 \in \Omega_n$，由于

$$\Omega_n \subset T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n)$$

故 x_0 是开集 $T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n)$ 的内点，这与 $x_0 \in \partial(T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n))$ 矛盾。另外，显然

$$S_n - A_n r_n : r_n^{-1}(\bar{\Omega}_n) \to Y_n$$

连续，综上所述，$\deg(S_n - A_n r_n,\ T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n),\ \theta)$ 有意义。

下证 $\deg(S_n - A_n r_n,\ T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n),\ \theta)$ 不随 R 的选取而变。设 $R_1 > R$，由结论(I)知，$F_n \subset \Omega_n$，而

$$\Omega_n \subset T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n) \subset T_{R_1} \cap r_n^{-1}(\Omega_n)$$

故 $(S_n - A_n r_n)x \neq \theta,\ \forall x \in T_{R_1} \cap r_n^{-1}(\Omega_n) \setminus (T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n))$。

由Brouwer度的切除性知

$$\deg(S_n - A_n r_n,\ T_{R_1} \cap r_n^{-1}(\Omega_n),\ \theta) = \deg(S_n - A_n r_n,\ T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n), \theta) \tag{2.2}$$

再证 $\deg(S_n - A_n r_n,\ T_R \cap r_n^{-1}(D_n \cap \Omega_n),\ \theta)$ 不随保核收缩 r_n 的选取而变。设 $r_n' : X_n \to D_n$ 是另一收缩核，要证

$$\deg(S_n - A_n r_n, T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n), \theta) = \deg(S_n - A_n r_n', T_R \cap r_n'^{-1}(\Omega_n), \theta) \tag{2.3}$$

令 $V_n = T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n) \cap r_n'^{-1}(\Omega_n)$，则 V_n 是 X_n 中有界开集，且

$$V_n \subset T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n),\ V_n \subset T_R \cap r_n'^{-1}(\Omega_n),\ \Omega_n \subset V_n$$

于是，$\theta \notin (S_n - A_n r_n)[(T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n)) \setminus V_n]$，$\theta \notin (S_n - A_n r_n')[(T_R \cap r_n'^{-1}(\Omega_n)) \setminus V_n]$，因此，

$$\deg(S_n - A_n r_n, T_R \cap r_n^{-1}(\Omega_n), \theta) = \deg(S_n - A_n r_n, V_n, \theta) \tag{2.4}$$

$$\deg(S_n - A_n r_n', T_R \cap r_n'^{-1}(\Omega_n), \theta) = \deg(S_n - A_n r_n', V_n, \theta) \tag{2.5}$$

令 $H_n(t,x) = S_n x - S_n r_n S_n^{-1}[tA_n r_n x + (1-t)A_n r_n' x]$

显然，$H_n : [0,1] \times \bar{V}_n \to Y_n$ 连续，且 $H_n(t,x) \neq \theta, (t,x) \in [0,1] \times \partial V_n$。事实上，若存在 $(t_0, x_0) \in [0,1] \times \partial V_n$ 使 $H_n(t_0, x_0) = \theta$，即 $S_n x_0 = S_n r_n S_n^{-1}[t_0 A_n r_n(x_0) + (1-t_0)A_n r_n'(x_0)]$。因 S_n 同胚，故 $x_0 = r_n S_n^{-1}[t_0 A_n r_n x_0 + (1-t_0)A_n r_n'(x_0)] \in D_n$，从而，$r_n(x_0) = x_0, r_n'(x_0) = x_0$，从而 $x_0 = r_n S_n^{-1} A_n(x_0)$。又因 $\partial V_n \subset \bar{V}_n \subset r_n^{-1}(\bar{\Omega}_n)$，根据$(L_4)$知，$S_n^{-1}A_n(x_0) \in D_n$，从而，

$$r_n S_n^{-1} A_n(x_0) = S_n^{-1} A_n(x_0)$$

因此 $x_0 = S_n^{-1}A_n(x_0) \Rightarrow A_n x_0 = S_n x_0 \Rightarrow (S_n - A_n r_n)(x_0) = \theta \Rightarrow x_0 \in F_n \subset \Omega_n \subset V_n$，此与 $x_0 \in \partial V_n$ 矛盾。

另外，由于 $V_n \subset r_n^{-1}(\Omega_n) \cap r_n'^{-1}(\Omega_n) \subset r_n^{-1}(\bar{\Omega}_n) \cap r_n'^{-1}(\bar{\Omega}_n)$，故当 $x \in V_n$ 时，$r_n(x) \in \bar{\Omega}_n$，$r_n'(x) \in \bar{\Omega}_n$。由$(L_4)$知，$S_n^{-1}A_n r_n(x) \in D_n$，$S_n^{-1}A_n r_n'(x) \in D_n$。因此，

$$r_n S_n^{-1} A_n r_n(x) = S_n^{-1} A_n r_n(x),\quad r_n S_n^{-1} A_n r_n'(x) = S_n^{-1} A_n r_n'(x)$$

故

$$H_n(0,x) = S_n x - S_n r_n S_n^{-1}(A_n r_n'(x)) = S_n x - S_n(S_n^{-1}A_n r_n'(x)) = S_n x - A_n r_n'(x)$$

$$H_n(1,x) = S_n x - S_n r_n S_n^{-1}(A_n r_n(x)) = S_n x - S_n(S_n^{-1}A_n r_n(x)) = S_n x - A_n r_n(x)$$

由 Brouwer 度的同伦不变性知

$$\deg(S_n - A_n r_n, V_n, \theta) = \deg(S_n - A_n r_n', V_n, \theta) \tag{2.6}$$

由(2.4)、(2.5)以及(2.6)诸式即得(2.3)式。

因此，$\deg(T_n, \Omega_n, \theta)$ 是由 $X_n, \Omega_n, S_n - A_n$ 唯一确定的。

注2.1 在定义2.3中，若 $T : D \cap \bar{\Omega} \to Y$ 是关于 Γ 的连续 A-proper映象，且 $\theta \notin T(D \cap \partial\Omega)$。

(i) 由引理2.1知，(L_2)成立，显然(L_1)也成立，假设(L_3)，(L_4)成立，则 $\mathrm{Deg}(T, D \cap \Omega, \theta)$ 有

意义.

(ii) 若$D=X$，这时任取$\{S_n\}_{n\geq 1}:X_n\to Y_n$(因有限维空间是同胚的，所以$S_n$存在)．($L_4$) 自然满足．显然($L_1$)，($L_2$)成立．此时不难验证，定义2.3中的广义相对拓扑度与[1]中定义 1.3在 $a=\theta$ 时定义的广义拓扑度一致．

(iii) 若$X=Y$，且$A=I-T:D\cap\bar{\Omega}\to D$，且$Q_nD\subset D_n$，$\forall n\geqslant n_0$，$I_n:X_n\to X_n$，$I_n$是恒等映象．取$S_n=I_n$，则($L_1$)，($L_2$)，($L_3$)，($L_4$)自然满足，此时不难验证，定义2.3中的广义相对拓扑度与[3]中定义2.2中的广义拓扑度一致．

定理2.1 设$T:D\cap\bar{\Omega}\to Y$是关于Γ的A-proper映象使得$T_n:\bar{\Omega}_n\to Y_n$连续，存在映象序列$\{S_n\}_{n\in N}$满足($L_3$)，($L_4$)．假设$\theta\notin T(D\cap\partial\Omega)$，则

(i) 存在一个整数$n_0\geqslant 1$使对$n\geqslant n_0$，$\theta\notin T_n(\partial\Omega_n)$，因此，$\deg(T_n,\Omega_n,\theta)$存在，从而$\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega,\theta)$是$Z'$的非空子集．

(ii) 如果$\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega,\theta)\neq\{0\}$，则存在$x\in D\cap\Omega$使得$Tx=\theta$．

(iii) 令$H(t,X):[a,b]\times(D\cap\bar{\Omega})\to Y$．令$H_t(x)=H(t,x)$．假设$(H_t)_n:\bar{\Omega}_n\to Y_n$连续，$\forall t\in[a,b]$，且$H_t(x)$关于$x\in D\cap\bar{\Omega}$是$t\in[a,b]$的一致连续映象，以及$H_t:D\cap\bar{\Omega}\to Y$是关于$\Gamma$的$A$-proper映象．又设存在$\{S_n\}_{n\in N}$满足($L_3$)且$S_n^{-1}(S_n-Q_nH_tP_n)(\bar{\Omega}_n)\subset D_n$，对$\forall t\in[a,b]$．假设$\{Q_n\}$在$Y$的有界子集上是等度一致连续的(即$\forall\varepsilon>0$，$B\subset Y$有界，存在$\delta=\delta(\varepsilon,B)>0$，使得$\|Q_nx-Q_ny\|<\varepsilon,\forall x,y\in B$．且$\|x-y\|<\delta$)．如果$\theta\notin H([a,b]\times(D\cap\partial\Omega))$则$\mathrm{Deg}(H_t,D\cap\Omega,\theta)$与$t\in[a,b]$无关．

(iv) 令$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$和$\Omega'=(\Omega_1\cap\Omega_2)\cup\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$．如$\theta\notin T(D\cap\Omega')$则

$$\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega,\theta)\subseteq\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega_1,\theta)+\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega_2,\theta)$$

如果$\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega_1,\theta)$和$\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega_2,\theta)$中有一个为单独一个整数，则上式中等号成立．

证明

(i) 根据定义2.3中的说明不难获证．(iv)的证明可仿照[1]的定理1(d)的证明进行．从略．

(ii) 如果$\mathrm{Deg}(T,D\cap\Omega,\theta)\neq\{0\}$，那么存在无限子序列$\{n_j\}$，$n_j\to+\infty$使得

$$\deg(S_{n_j}-A_{n_j}r_{n_j},\ \Omega_{n_j},\ \theta)\neq 0$$

对每一个j，由Brouwer度的性质知，存在$x_{n_j}\in\Omega_{n_j}$使得$(S_{n_j}-A_{n_j}r_{n_j})(x_{n_j})=\theta$，注意到$x_{n_j}\in D_{n_j}$，从而，$(S_{n_j}-A_{n_j})(x_{n_j})=\theta\Rightarrow S_{n_j}x_{n_j}=(S_{n_j}-T_{n_j})x_{n_j}\Rightarrow T_{n_j}x_{n_j}=\theta$．因$T$是$A$-proper映象，所以，存在子序列$\{n_j(k)\}\subset\{n_j\},k\to\infty$使$P_{n_j(k)}x_{n_j(k)}\to x\in D\cap\bar{\Omega}$且$Tx=\theta$，但$x\notin D\cap\partial\Omega$，因此$x\in D\cap\Omega$．

(iii) 因$\theta\notin H([a,b]\times(D\cap\partial\Omega))$及对$\{S_n\}$的假设知，$\forall t\in[a,b]$，$\mathrm{Deg}(H_t,D\cap\Omega,\theta)$存在．我们只须证明，存在$n_1\geqslant n_0$使得对$n\geqslant n_1$，$\forall t\in[a,b]$，$\theta\notin(H_t)_n(\partial n_n)$．如果不真，那么存在$\{n_j\}$，$\{x_{n_j}\}\subset\partial\Omega_{n_j}$及$\{t_j\}\in[a,b]$，$n_j\to+\infty$，$t_j\to t\in[a,b]$使$(H_{t_{n_j}})_{n_j}x_{n_j}=\theta$，即

$$Q_{n_j}H_{t_{n_j}}P_{n_j}(x_{n_j})=\theta$$

注意$H(t,x)$的条件，有

$$\|H_tP_{n_j}x_{n_j}-H_{t_j}P_{n_j}x_{n_j}\|\to 0\qquad(j\to+\infty)$$

因$\{Q_n\}$在有界集上等度一致连续，所以

$$\|Q_{n_j}H_tP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}H_{t_j}P_{n_j}x_{n_j}\|\to 0\qquad(j\to+\infty)$$

因此，
$$\|(H_t)_{n_j}x_{n_j}\|\to 0\qquad(j\to+\infty)\tag{2.7}$$

H_t是A-proper映象，我们假设$P_{n_j}x_{n_j}\to x\in X$，并且$H_tx=\theta$，$x\in D\cap\partial\Omega$，然而这与假设

$$H_t(x)\neq\theta,\ x\in D\cap\partial\Omega,\ t\in[a,b]$$

矛盾。

注2.2 在(iii)中，$(H_t)_n:[a,b]\times(\bar{\Omega}_n)\to Y_n$关于$x\in\bar{\Omega}_n$是$t\in[a,b]$的一致连续映象，且如有

$$\{x_{n_j}|x_{n_j}\in\partial\Omega_{n_j}\},\ \{t_{n_j}\}\in[a,\ b]$$

使得$\|Q_{n_j}H(t_{n_j},\ P_{n_j}x_{n_j})\|\to0$，$n_j\to+\infty$，则存在子列，$\{x_{n_j(k)}\}$，$\{t_{n_j(k)}\}$使得

$$P_{n_j(k)}x_{n_j(k)}\to x\in X,\ t_{n_j(k)}\to t和H_t(x)=\theta$$

则结论仍成立。

注2.3 若假设$\{Q_n\}:Y\to Y_n$线性，且$\|Q_ny\|\leqslant k_0\|y\|$($k_0$是常数)，$n\in N$，则$\{Q_n\}$的等度连续性可去掉。

三、含广义P-紧和广义P_1-紧映象的方程的正解

称Banach空间X的一闭凸子集W为一楔，如果对$x\in W$，$t\geqslant0$，有$tx\in W$，如果还有$x\in W$，$x\neq\theta$，蕴含$-x\notin W$，则说W是X内一锥。显然X也是楔。本文用W表示楔，P^*表示锥。

下面对$\Gamma=(\{X_n\},\ \{Y_n\},\ \{Q_n\},\ \{P_n\})$作进一步假设。

(i) $\{Q_n\}:Y\to Y_n$是线性连续映象且存在常数k_0使得$\|Q_n\|\leqslant k_0$，$n\in N$。

(ii) $\forall y\in Y$，$Q_ny\to y$，$n\to+\infty$。

定义3.1 令$S:D\cap\bar{\Omega}\to Y$是有界A-proper映象，记$S_n=Q_nSP_n$。假设下列条件成立：

(a) (L_3)成立：即$\{S_n\}:X_n\to Y_n$同胚；

(b) $S_n(\lambda x)=\lambda S_n(x)$，$x\in D_n\cap\bar{\Omega}_n$，$\lambda\geqslant0$；

(c) 将S，$\{S_n\}$分别看作定义2.3中的T，$\{S_n\}_{n\in N}$，且设S满足(L_2)和(L_4)，从而$\mathrm{Deg}(S,D\cap\Omega,\theta)$存在，且假设$\mathrm{Deg}(S,D\cap\Omega,\theta)\neq\{0\}$。

定义3.2 映象$T:D\cap\bar{\Omega}\to Y$是广义P-紧(广义P_1-紧)映象。如果下列条件成立：

(i) $T_n=Q_nTP_n:\bar{\Omega}_n\to Y_n$连续；

(ii) 存在定义3.1中的S使对$\forall\lambda>0(\lambda\geqslant1)$，$T_\lambda=T-\lambda S:D\cap\bar{\Omega}\to Y$是关于$\Gamma$的$A$-proper映象。

引理3.1 设$T:D\cap\bar{\Omega}\to Y$是关于Γ的A-proper映象，$B:D\cap\bar{\Omega}\to Y$全连续，则对任意实常数λ，μ，$\lambda\neq0$，$\lambda T+\mu B$是关于Γ的A-proper映象。

证明 设$x_{n_j}\in\bar{\Omega}_{n_j}$，$\{n_j\}\subset N$，$n_j\to+\infty$使得对某个$y_0\in Y$有

$$\|Q_{n_j}(\lambda T+\mu B)P_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}y_0\|\to0$$

因Q_n为线性映象，有

$$\|\lambda T_{n_j}x_{n_j}+\mu Q_{n_j}BP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}y_0\|\to0,\ n_j\to\infty$$

又因$\{x_{n_j}\}\in\bar{\Omega}_{n_j}\Rightarrow\{P_{n_j}x_{n_j}\}\subset\bar{\Omega}$有界以及$B$全连续，故存在$\{x_{n_j}\}$的子序列，仍记为$\{x_{n_j}\}$，使得$BP_{n_j}x_{n_j}\to y\in Y$。由此推得

$$\|\lambda T_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}(y_0-\mu y)\|\leqslant\|\lambda T_{n_j}x_{n_j}+\mu Q_{n_j}BP_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}y_0\|+\mu k_0\|BP_{n_j}x_{n_j}-y\|\to0,$$

$n_j\to\infty$。从而$\|T_{n_j}x_{n_j}-Q_{n_j}((y_0-\mu y)/\lambda)\|\to0$，$n_j\to\infty$。从$T$的$A$-proper性推得存在$\{x_{n_j}\}$的无限子序列$\{x_{n_j(k)}\}$和$x\in X$使得$P_{n_j(k)}x_{n_j(k)}\to x$，$n_j(k)\to+\infty$和$Tx=(y_0-\mu y)/\lambda$。因此，$\lambda Tx+\mu y=y_0$。又因$BP_{n_j(k)}x_{n_j(k)}\to Bx$ ($k\to+\infty$) 和$y=Bx$。于是$(\lambda T+\mu B)x=y_0$，即$\lambda T+\mu B$是关于Γ的A-proper映象。

记 $W_n=W\cap X_n$，$\Omega_n=W_n\cap P_n^{-1}(W\cap\Omega)$.

引理3.2 设$T:W\cap\bar{\Omega}\to Y$是有界广义P_1-紧映象使得$S_n^{-1}T_n(\bar{\Omega}_n)\subset W_n$. 又设$B:W\cap\bar{\Omega}\to Y$全连续使得$S_n^{-1}B_n(\bar{\Omega}_n)\subset W_n$，$B_n=Q_nBP_n$. 如果下列条件满足：

(i) $\inf\limits_{x\in W\cap\bar{\Omega}}\|Bx\|>0$,

(ii) $Sx-Tx\neq tBx$. $\forall x\in W\cap\partial\Omega$, $t\geqslant 0$,

则 $\mathrm{Deg}(S-T,W\cap\Omega,\theta)=\{0\}$.

证明 因Ω有界和T有界，记

$$b=\sup_{x\in W\cap\bar{\Omega}}\|Sx\|<+\infty,\ d=\sup_{x\in W\cap\bar{\Omega}}\|Tx\|<+\infty,\ a=\inf_{x\in W\cap\bar{\Omega}}\|Bx\|>0$$

取$t_0>(b+d)/a$，考虑映象$H:[0,t_0]\times(W\cap\bar{\Omega})\to Y$，其中

$$H(t,x)=Sx-Tx-tBx,\quad (t,x)\in[0,t_0]\times(W\cap\bar{\Omega}).$$

由于T是广义P_1-紧映象知$S-T$为关于Γ的A-proper映象. 再由引理3.1知对每一$t\in[0,t_0]$，$H_t=H(t,x)$是关于Γ的A-proper映象，且

$$S_n^{-1}(S_n-Q_nH_tP_n)(\bar{\Omega}_n)=S_n^{-1}(S_n-Q_n(S-T-tB)P_n)(\bar{\Omega}_n)$$
$$=S_n^{-1}(S_n-Q_nSP_n+Q_nTP_n+tQ_nBP_n)(\bar{\Omega}_n)=S_n^{-1}(T_n+tB_n)(\bar{\Omega}_n)\subset W_n$$

(因W_n为楔). 又因$BP_n(\bar{\Omega}_n)$有界，容易验证H_t关于$x\in W\cap\bar{\Omega}$是$t\in[0,t_0]$的一致连续映象. 又由假设(ii)知$\theta\notin H_t(W\cap\partial\Omega)$. 因此，由定理2.1(iii)知:

$$\mathrm{Deg}(S-T,W\cap\Omega,\theta)=\mathrm{Deg}(S-T-t_0B,W\cap\Omega,\theta)$$

如果$\mathrm{Deg}(S-T,W\cap\Omega,\theta)\neq\{0\}$，由定理2.1(ii)知，存在$x_0\in W\cap\Omega$使得$Sx_0-Tx_0-t_0Bx_0=\theta$. 由此推得

$$t_0=\frac{\|Sx_0-Tx_0\|}{\|Bx_0\|}\leqslant\frac{\|Sx_0\|+\|Tx_0\|}{\|Bx_0\|}\leqslant\frac{b+d}{a}$$

这与t_0的取法矛盾. 故$\mathrm{Deg}(S-T,W\cap\Omega,\theta)=\{0\}$.

引理3.3 设$T:W\cap\bar{\Omega}\to Y$是一有界广义P-紧映象使得$S_n^{-1}T_n(\bar{\Omega}_n)\subset W_n$且

$$\inf_{x\in W\cap\bar{\Omega}}\|Tx\|=a>0,$$

如果以下条件成立：

(i) $Tx=\mu Sx$, $x\in W\cap\partial\Omega\Rightarrow\mu\notin(0,1]$,

则 $\mathrm{Deg}(S-T,\ W\cap\Omega,\ \theta)=\{0\}$.

证明 记$b=\sup\limits_{x\in W\cap\bar{\Omega}}\|x\|<+\infty$, 取 $t_0>\max\{1,b/a\}$, 定义映象$H:[1,t_0]\times(W\cap\bar{\Omega})\to Y$如下：

$$H(t,x)=Sx-tTx,\ (t,x)\in[1,t_0]\times(W\cap\bar{\Omega})$$

由引理3.1和T是广义P-紧映象知，对每一$t\in[1,t_0]$，H_t是关于Γ的A-proper映象，且$S_n^{-1}(S_n-Q_nH_tP_n)(\bar{\Omega}_n)=S_n^{-1}(S_n-Q_n(S-tT)P_n)(\bar{\Omega}_n)=tS_n^{-1}Q_nTP_n(\bar{\Omega}_n)=tS_n^{-1}T_n(\bar{\Omega}_n)\subset W_n$（注意由$S_n(\lambda y)=\lambda S_n(y)$可推出$S_n^{-1}(\lambda y)=\lambda S_n^{-1}(y)$, $\forall y\in Y_n$). 由于$T(W\cap\bar{\Omega})$有界，易证$H(t,x)$关于$x\in W\cap\bar{\Omega}$是$t\in[1,t_0]$的一致连续映象，条件(i)蕴含$\theta\notin H_t(W\cap\partial\Omega)$, $t\in[1,t_0]$. 因此由定理2.1(iii)推得

$$\mathrm{Deg}(S-T,W\cap\Omega,\theta)=\mathrm{Deg}(S-t_0T,\ W\cap\Omega,\theta)$$

如果$\mathrm{Deg}(S-T,\ W\cap\Omega,\ \theta)\neq\{0\}$，则由定理2.1(ii)知存在$x_0\in W\cap\Omega$，使$Sx_0-t_0Tx_0=\theta$. 由此推得

$$t_0=\frac{\|Sx_0\|}{\|Tx_0\|}\leqslant\frac{b}{a}$$

此与t_0的取法矛盾。因此$\mathrm{Deg}(S-T,\ D\cap\Omega,\ \theta)=\{0\}$。

引理3.4 设$T:W\cap\bar{\Omega}\to Y$是一有界广义P_1-紧映象使得$S_n^{-1}T_n(\bar{\Omega}_n)\subset W_n$。如果$\theta\in W\cap\Omega$且满足：

(i) $Tx=\mu Sx,\ x\in W\cap\partial\Omega\Rightarrow\mu<1$

则 $\mathrm{Deg}(S-T,\ W\cap\Omega,\ \theta)\neq\{0\}$。

证明 定义映象$H:[0,1]\times(W\cap\bar{\Omega})\to Y$如下：

$$H(t,x)=Sx-tTx,\ (t,x)\in[0,1]\times(W\cap\bar{\Omega})$$

易知对每一$t\in[0,1]$，$S_n^{-1}(S_n-Q_nH_tP_n)(\bar{\Omega}_n)\subset W_n$，由$T(W\cap\bar{\Omega})$有界易证$H_t(x)=H(t,x)$关于$x\in W\cap\bar{\Omega}$是$t\in[0,1]$的一致连续映象，由$T$是广义$P_1$-紧映象和引理3.1知对每一$t\in[0,1]$，$H_t=S-tT=-t(T-S/t)$是关于$\Gamma$的$A$-proper 映象，而$H_0=S$，由假设知$H_0$也是关于$\Gamma$的$A$-proper 映象，容易从条件(i)得知$\theta\notin H_t(W\cap\partial\Omega)$，$t\in[0,1]$，因此由定理2.1(iii)知

$$\mathrm{Deg}(S-T,W\cap\Omega,\theta)=\mathrm{Deg}(S,W\cap\Omega,\theta)\neq\{0\}$$

定理3.1 设Ω_1，Ω_2是X内有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:W\cap\bar{\Omega}_2\to Y$是有界广义$P_1$-紧映象使得$S_n^{-1}(T_n((\bar{\Omega}_2)_n))\subset W_n$，$B:W\cap\bar{\Omega}_2\to Y$全连续，且$S_n^{-1}B_n((\bar{\Omega}_2)_n)\subset W_n$。如果下列条件之一成立：

$$(\mathrm{H}_1)\ \begin{cases}\inf\limits_{x\in W\cap\bar{\Omega}_1}\|Bx\|>0 \text{ 和 } Sx-Tx\neq tBx,\ x\in W\cap\partial\Omega_1,\ t\geqslant 0\\ Tx=\mu Sx,\ x\in W\cap\partial\Omega_2\Rightarrow\mu\leqslant 1\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_2)\ \begin{cases}\inf\limits_{x\in W\cap\bar{\Omega}_2}\|Bx\|>0 \text{ 和 } Sx-Tx\neq tBx,\ x\in W\cap\partial\Omega_2,\ t\geqslant 0\\ Tx=\mu Sx,\ x\in W\cap\partial\Omega_1\Rightarrow\mu\leqslant 1\end{cases}$$

则存在$x_0\in W\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$使$Sx_0=Tx_0$。

证明 利用引理3.2和3.4以及定理2.1(iv)，(ii)仿[3]定理 3.1 的证明，本定理不难得证。

定理3.2 设Ω_1，Ω_2是X内有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\cap\Omega_2$，$T:W\supset\bar{\Omega}_2\to Y$是有界广义$P_1$-紧映象使得$S_n^{-1}T_n((\bar{\Omega}_2)_n)\subset W_n$，如果下列条件之一成立：

$$(\mathrm{H}_3)\ \begin{cases}\inf\limits_{x\in W\cap\bar{\Omega}_1}\|Tx\|>0;\ Tx=\mu Sx,\ x\in W\cap\partial\Omega_1\Rightarrow\mu\geqslant 1\\ Tx=\mu Sx,\ x\in W\cap\partial\Omega_2\Rightarrow\mu\leqslant 1\end{cases}$$

$$(\mathrm{H}_4)\ \begin{cases}\inf\limits_{x\in W\cap\bar{\Omega}_2}\|Tx\|>0;\ Tx=\mu Sx,\ x\in W\cap\partial\Omega_2\Rightarrow\mu\geqslant 1\\ Tx=\mu Sx,\ x\in W\cap\partial\Omega_1\Rightarrow\mu\leqslant 1\end{cases}$$

则存在$x_0\in W\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$使得$Sx_0=Tx_0$。

注3.1 作为定理3.1和定理3.2的特殊情形，我们容易得到从$D\cap\bar{\Omega}\subset D$到$D$的全连续映象和$A$-proper映象的各类型的拉伸与压缩不动点定理的推广。例如定理3.2中取$X=Y$，$W=P^*$，就包含[5]中定理 1 和[7]中定理1.2和1.3，在$X=Y$时，定理3.1和3.2分别是[3]中定理3.1和3.2的推广。

记 $\Omega_n=P_n^*\cap P_n^{-1}(P^*\cap\Omega)$，$P_n^*=P^*\cap X_n$

推论3.1 设Ω_1，Ω_2是X的有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:P^*\cap\bar{\Omega}_2\to Y$是有界广义$P$-紧映象使得$S_n^{-1}T_n((\Omega_2)_n)\subset P_n^*$，如果下列条件之一成立：

$$(H_3)'\begin{cases}\inf\limits_{x\in P^*\cap\bar{\Omega}_1}\|Tx\|>0;\ \|Tx\|\geqslant\|Sx\|,\ x\in P^*\cap\partial\Omega_1\\ \|Tx\|\leqslant\|Sx\|,\ x\in P^*\cap\partial\Omega_2\end{cases}$$

$$(H_4)'\begin{cases}\inf\limits_{x\in P^*\cap\bar{\Omega}_2}\|Tx\|>0;\ \|Tx\|\geqslant\|Sx\|,\ x\in P^*\cap\partial\Omega_2\\ \|Tx\|\leqslant\|Sx\|,\ x\in P^*\cap\partial\Omega_1\end{cases}$$

则存在$x_0\in P^*\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$使$Sx_0=Tx_0$。

证明 注意到$(H_3)'\Rightarrow(H_3)$；$(H_4)'\Rightarrow(H_4)$，由具有$W=P^*$的定理3.2推得所需结论。

注3.2 推论3.1是[5]中系和[3]中推论3.1以及[7]中相应结论的改进和推广.

推论3.2 设Ω_1，Ω_2是X内有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:\bar{\Omega}_2\to Y$是有界广义$P$-紧映象，如果下列条件之一成立：

$(H_3)''$ $\inf\limits_{x\in\bar{\Omega}_1}\|Tx\|>0$，$\|Tx\|\geqslant\|Sx\|$，$x\in\partial\Omega_1$，$\|Tx\|\leqslant\|Sx\|$，$x\in\partial\Omega_1$

$(H_4)''$ $\inf\limits_{x\in\bar{\Omega}_2}\|Tx\|>0$，$\|Tx\|\geqslant\|Sx\|$，$x\in\partial\Omega_2$，$\|Tx\|\leqslant\|Sx\|$，$x\in\partial\Omega_2$

则存在$x_0\in\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1$使$Sx_0=Tx_0$。

证明 注意到定理3.2对$W=X$时成立，此时有$(H_3)''\Rightarrow(H_3)$；$(H_4)''\Rightarrow(H_4)$，结论不难得证。

注3.3 推论3.2是[5]中定理1和[3]中推论3.2的推广.

推论3.3 设Ω_1，Ω_2是X内有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:P^*\cap\bar{\Omega}_2\to Y$是有界广义$P_1$-紧映象使得$S_n^{-1}T_n((\bar{\Omega}_2)_n)\subset P_n^*$，如果下列条件之一成立：

$$(H_1)'\begin{cases}\text{存在}h_0\in Y,\ h_0\neq\theta\text{使得}Q_nh_0\in P_n^*\text{且}Sx-Tx\neq th_0,\\ x\in P^*\cap\partial\Omega_1,\ t\geqslant0\\ Tx=\mu Sx,\ x\in P^*\cap\partial\Omega_2\Rightarrow\mu\leqslant1\end{cases}$$

$$(H_2)'\begin{cases}\text{存在}h_0\in Y,\ h_0\neq\theta\text{使得}Q_nh_0\in P_n^*\text{且}Sx-Tx\neq th_0,\\ x\in P^*\cap\partial\Omega_2,\ t\geqslant0\\ Tx=\mu Sx,\ x\in P^*\cap\partial\Omega_1\Rightarrow\mu\leqslant1\end{cases}$$

则存在$x_0\in P^*\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$使得$Sx_0=Tx_0$

证明 在定理3.1中取$W=P^*$，$Bx\equiv h_0$，$x\in P^*\cap\bar{\Omega}_2$本推论得证。

注3.4 推论3.2是[4]中定理1.2以及[3]中推论3.3的改进或推广.

下面假设$B:P^*\to Y$且令$P_B=\{x\in P^*|\ \exists\lambda>0\text{使得}Sx\geqslant\lambda Bx\}$.显然$P_B\subset P^*$，特别当$Bx\equiv h_0$，$(h_0\in Y,\ h_0\neq\theta)$，$x\in P^*$时，记$P_{h_0}=\{x\in P^*|\ \exists\lambda>0\text{使}Sx\geqslant\lambda h_0\}$。

推论3.4 假设$S(P^*)$是Y中的锥，Ω_1，Ω_2是X内有界开集，$\theta\in\Omega_1$，$\bar{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$T:P^*\cap\bar{\Omega}_2\to S(P^*)$是有界广义$P_1$-紧映象使得$S_n^{-1}T_n((\bar{\Omega}_2)_n)\subset P_n^*$，$B:P^*\cap\bar{\Omega}_2\to Y$全连续使得$S_n^{-1}B_n(\partial(\Omega_2)_n)\subset P_n^*$，如果下列条件之一成立：

$$(H_1)''\begin{cases}Tx\not\leqslant Sx,\ x\in P_B\cap\partial\Omega_1,\quad\inf\limits_{x\in P^*\cap\bar{\Omega}_1}\|Bx\|>0\\ Tx\not\geqslant(1+\varepsilon)Sx,\ x\in P^*\cap\partial\Omega_2,\ \varepsilon>0\end{cases}$$

$$(H_2)''\begin{cases}Tx\not\leqslant Sx,\ x\in P_B\cap\partial\Omega_2,\quad\inf\limits_{x\in P^*\cap\bar{\Omega}_2}\|Bx\|>0\\ Tx\not\geqslant(1+\varepsilon)Sx,\ x\in P^*\cap\partial\Omega_1,\ \varepsilon>0\end{cases}$$

则存在$x_0\in P^*\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$使得$Sx_0=Tx_0$。

证明 在定理3.1中取$W=P^*$，时此不难验证$(\mathrm{H}_1)''\Rightarrow(\mathrm{H}_1)$，$(\mathrm{H}_2)''\Rightarrow(\mathrm{H}_2)$。

注3.5 推论3.4是[5]中定理2，[3]中推论3.4以及[9,10,11]中相应结果的改进和推广。特别取$Bx\equiv h_0$，可得[5]中定理2的系的推广。

注3.6 设X是自反实 Banach 空间，X^*是X的对偶空间。令$Y=X^*$，假设X，X^*具有(H)性质((H)性质的定义见[14])。[15]中证明了若X，X^*具有(H)性质，则$J:X\to X^*$是连续的且关于Γ_n^*是A-proper 映象(J是X的正规对偶映象)，此时取$S=J$。假设$J_n=Q_nJP_n:X_n\to X_n^*$是保持定向同胚的映象，则$S=J$满足定义3.1中的所有条件，且$\mathrm{Deg}(J,D\cap\Omega,\theta)=\{1\}$。因此以上所述的引理、定理中的$Y=X^*$，$S=J$，则结论同样成立。

参考文献

[1] Browder, F. E. and W. V. Petryshyn, Approximation methods and generalized topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces, *Journal of Functional Analysis*, 3 (1969), 217—245.

[2] Hamiltion, J. D., Noncompact mappings and cones in Banach spaces, *Arch Ration. Mech. Anal.*, **48** (1972), 153—162.

[3] 丁协平，一类非紧映象的拉伸与压缩不动点定理，科学通报，**31**，11 (1986)，876. 四川师范大学学报（自然科学版），3 (1986)，10—18.

[4] Petryshyn, W. V., On the approximation-solvability of equations involving A-proper and pseudo-A-proper mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**, 2 (1975), 223—312.

[5] 郭大钧，关于锥映象的几个不动点定理，科学通报，**28**，20 (1983)，1217—1219.

[6] Gatica, J. A. and H. L. Smith, Fixed point techniques in a cone with applications, *J. Math. Anal. Appl.*, **61** (1977), 58—71.

[7] 郭大钧，科学通报，**26**，7 (1981)，1087.

[8] 郭大钧，一个新的不动点定理，数学学报，**24**，3 (1981)，444—450.

[9] Krasnoselskii, M.A., *Positive Solutions of Operator Equations*, Groningen, PNoordhoff (1964).

[10] Amann, H., Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIMA Rew.*, **18**, 14 (1976), 620—709.

[11] Leggett, R. W. and L. R. Williams, A fixed point theorem with application to an infectious disease model, *J. Math. Anal. Appl.*, **76** (1980), 71—97.

[12] Nussbaum, R. D., Periodic solutions of some nonlinear, autonomous functional differential equations Ⅱ, *J. Differ. Equat.*, **14**, (1973), 360—394.

[13] Fitzpatrick, P. M., A-proper mappings and their uniform limits, Ph. D. Thesis, Rutgers University, New Brunswick, N. J. (1971).

[14] Fan, K. and I. Glickberg, Some geometric properties of the spheres in a normed linear space, *Duke. Math. J.*, **25** (1958), 533—568.

[15] Petryshyn, W. V., Invariance of domain theorem for locally A-proper mappings and its implications, *J. Func. Anal.*, **5** (1970), 137—159.

Positive Solution of a Class of Equations Involving Noncompact Mappings

Lan Kun-quan Ding Xie-ping
(Sichuan Normal University, Chengdu)

Abstract

In this paper, we define a generalized relative degree for A-proper mappings from a relative open subset of a Banach space into another Banach space and introduce the concepts of generalized P-compact and P_1-compact mappings. Next, we show several existence theorems of positive solutions for the equations involving these mappings. Our theorems improve and extend some results.