

用于变厚度圆盘振动分析的 动态环形元

徐尹格 张益松

(北京交通管理干部学院) (南京航空学院)

(1988年元月10日收到)

摘 要

本文利用动态位移的迴转周期变化规律, 将变厚度圆板弯曲振动的二维问题化为一维形式, 并将环形单元的位移函数以频率的升幂形式展开, 作为动态形状函数, 进而推导了动态环形元的质量和刚度矩阵及其一次动态修正矩阵, 并以简洁的形式给出. 最后作为本文方法的直接应用, 计算了叶盘组合件的固有特性与实验值及其它方法进行了比较, 说明动态的变厚度环板元的优越性.

一、引 言

动态有限元法是一种区别于常规有限元法的数值求解法, 它的发展也依赖于理论上的变分原理及应用上的计算机实施这两个强有力的支柱. 在结构动力学中, 采用有限元法离散化和插值时, 一般总是将变量 $\{\mu\}$ 分离成如下形式:

$$\{\mu\} = \sum N_i(x, y, z) \{q_i(t)\} \quad (1.1)$$

这里 $N_i(x, y, z)$ 仅是空间位置 (x, y, z) 的函数, 而与时间无关, 只须将单元的动力方程进行迭加和组合, 即得到典型的以有限元结点自由度为变量的有限个自由度的运动微分方程组.

上述的 $\{N_i(x, y, z)\}$ 的选取是直接借用了静态分析所用的形状函数, 与结构的振动频率无关. 这一点在确定系统的固有特性时引起很大的偏差, 尤其对高频动力结构, 若用静力学的形状函数来构造质量与刚度矩阵, 误差则更大. 而动态有限元法就是针对这一问题提出来的, 其最大特点是在形状函数中考虑了振动频率这一重要因素.

人们研究了杆、梁、薄膜和矩形板的动态有限单元^[1], 其精度较高, 这一特点已经得到了充分的验证. 但至今仍未见到关于圆板的研究文献. 而等厚度圆板和变厚度圆盘在结构上的特殊性和应用上的广泛性, 使得我们有必要将它们从非圆形的板中分出来单独研究^[2]. 本文将在以前工作基础上, 进一步建立变厚度环板的动态有限单元.

二、变厚度环板的弯曲变形

我们从一个变厚度圆板中孤立出一个板单元, 如图1所示, 建立起弯曲振动微分方

程^[8]:

$$\nabla^2(G(r)\nabla^2W) - \frac{1-\nu}{r} \left[\frac{dG(r)}{dr} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{d^2G(r)}{dr^2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] + \rho h(r) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1)$$

这里, W 为单元内中面各点横向位移;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.2)$$

$$h(r) = h_a \bar{r}^\xi \quad (2.3)$$

其中, $\bar{r} = r/a$, $\xi \neq 0$, a 为单元的内半径, h_a 为该处板厚。

$$G(r) = Eh^3(r)/12(1-\nu^2) = G_a \bar{r}^{3\xi} \quad (2.4)$$

这里 $G_a = Eh_a/12(1-\nu^2)$; ρ , E , ν 分别为材料的密度, 弹性模量及泊松比; h_a 和 ξ 为常数。设位移函数在周向按三角级数变化, 这样图 1 中单元可沿虚线扩展为一个环形单元, 其位移函数设为:

$$W = \exp[i\omega t] \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r, \omega) \cos n\theta \quad (2.5)$$

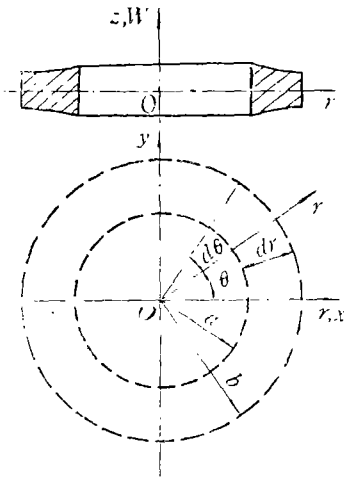


图 1 变厚薄板单元

其中, ω 为振动频率, n 为节径数目。将(2.5)代入(1.1)中得:

$$\Delta W_n(r, \omega) - \frac{\rho h(r)}{G(r)} W_n(r, \omega) = 0 \quad (2.6)$$

这里算子“ Δ ”记为:

$$\Delta = \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2(1+3\xi)}{r} \frac{d^3}{dr^3} - \frac{1+2n^2-3\xi(1+\nu+3\xi)}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-3\xi)(1+2n^2-3\xi\nu)}{r^3} \frac{d}{dr} - \frac{n^2[4-n^2-3\xi(3-3\xi\nu+\nu)]}{r^4} \quad (2.7)$$

再设动态位移函数为 ω 的幂级展开形式:

$$W_n(r, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \omega^l [H_l(r)]_n^T \{q\}_n \quad (2.8)$$

其中, $[H_l(r)]_n$ 为四阶形函数行向量, $\{q\}_n$ 为由环板单元内外半径上的线位移及转角确定的广义坐标向量。将(2.8)、(2.7)代入(2.6), 得:

$$\left. \begin{aligned} \Delta[H_0(r)]_n &= 0, \quad \Delta[H_1(r)]_n = 0 \\ \Delta[H_l(r)]_n - \frac{\rho h(r)}{G(r)} [H_{l-2}(r)]_n &= 0 \quad (l \geq 2) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

为保证 $[H_0(r)]_n$ 与静态形状函数向量一致, 使单元矩阵在忽略 ω 高阶项时能与常规方法相调, 让(2.8) $l=0$ 项满足单元边界 $r=a, b$ 处连续性要求, 其它各项满足齐次边界条件。据此, 对于 $l=0$ 由(2.9)第一式得:

$$[H_0(r)]_n = [N(r)][S_n]^{-1} \quad (2.10)$$

这里:

$$[N(r)] = (r\eta_1, r\eta_2, r\eta_3, r\eta_4) \quad (2.11)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{1,2} &= 1 - \frac{3}{2}\xi + \sqrt{\alpha \pm \beta}, \quad \eta_{3,4} = 1 - \frac{3}{2}\xi - \sqrt{\alpha \pm \beta} \\ \alpha &= \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right)^2 + n^2 + \frac{3}{2}\xi(1-\nu) \\ \beta &= \left[\frac{3}{2}\xi(1-\nu)\right]^2 + 4n^2\left(1 - \frac{3}{2}\xi\right)\left(1 - \frac{3}{2}\xi\nu\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

(2.10)中 $[S]^{-1}$ 为变换矩阵 $[S]$ 的逆阵, $[S]$ 为:

$$[S] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\eta_1}{a} & \frac{\eta_2}{a} & \frac{\eta_3}{a} & \frac{\eta_4}{a} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_1} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_2} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_3} & \left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_4} \\ \left(\frac{\eta_1}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_1-1} & \left(\frac{\eta_2}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_2-1} & \left(\frac{\eta_3}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_3-1} & \left(\frac{\eta_4}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{\eta_4-1} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

三、动态形函数的修正项及其导数

在(2.8)中, 对于 $l=1$ 项, 可由(2.9)第二式及齐次边界条件得:

$$[H_1(r)]_n = 0 \quad (3.1)$$

对于 $l=2$, 由(2.9)的第三式得:

$$\Delta[H_2(r)]_n = \frac{\rho h_a}{G_a} \bar{r}^{-2\xi} [H_0(r)]_n \quad (3.2)$$

其特解设为:

$$[H_2^*(r)]_n = [N(r)] \begin{pmatrix} [A_1(\bar{r})] \\ [A_2(\bar{r})] \\ [A_3(\bar{r})] \\ [A_4(\bar{r})] \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

这里 $[A_1(\bar{r})]$, $[A_2(\bar{r})]$, $[A_3(\bar{r})]$, $[A_4(\bar{r})]$ 为待定系数行向量, 由下列微分方程组确定:

$$\begin{pmatrix} [N(r)] \\ [N'(r)] \\ [N''(r)] \\ [N'''(r)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [A_1'(r)] \\ [A_2'(r)] \\ [A_3'(r)] \\ [A_4'(r)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\rho h_a}{G_a} \bar{r}^{-2\xi} [H_0(r)]_n \end{pmatrix}$$

由此得:

$$\begin{pmatrix} [A_1'(r)] \\ [A_2'(r)] \\ [A_3'(r)] \\ [A_4'(r)] \end{pmatrix} = \frac{\rho h_a}{G_a} [U_2'(r)] [S]^{-1}$$

记矩阵 $[U_2'(r)]$ 第 i 行第 j 列的元素为 $U_{ij}'(r)$, 则:

$$U_{ij}(r) = -\frac{a^3 \bar{r}^{-(\eta_i - \eta_j + 2\xi - 3)}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (\eta_i - \eta_j)} \quad (i, j=1, 2, 3, 4)$$

Π 为连乘符号。因而,

$$\begin{pmatrix} [A_1(r)] \\ [A_2(r)] \\ [A_3(r)] \\ [A_4(r)] \end{pmatrix} = \frac{\rho h_a}{G_a} [U(r)] [S]^{-1} \quad (3.4)$$

上式中:

$$U_{ij}(r) = -\frac{a^4 \bar{r}^{-(\eta_i - \eta_j + 2\xi - 4)}}{(\eta_i - \eta_j + 2\xi - 4) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^4 (\eta_i - \eta_j)} \quad (3.5)$$

又设(3.2)中齐次方程组的通解为:

$$[H_2^{**}(r)]_n = [N(r)] \begin{pmatrix} [B_1] \\ [B_2] \\ [B_3] \\ [B_4] \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

于是非齐次方程(3.2)的通解为:

$$[H_2(r)]_n = [H_2^*(r)]_n + [H_2^{**}(r)]_n \quad (3.7)$$

利用齐次边界条件:

$$\begin{cases} [H_l(r)]_n |_{r=a \text{ 或 } b} \{q\}_n = 0 \\ \partial [H_l(r)]_n / \partial r |_{r=a \text{ 或 } b} \{q\}_n = 0 \end{cases} \quad (l \geq 1)$$

确定出系数矩阵为:

$$\begin{pmatrix} [B_1] \\ [B_2] \\ [B_3] \\ [B_4] \end{pmatrix} = -\frac{\rho h_a}{G_a} [S]^{-1} [T] [S]^{-1} \quad (3.8)$$

这里[T]为变换矩阵:

$$[T] = \begin{pmatrix} [N(a)] [U(a)] \\ [N'(a)] [U'(a)] \\ [N(b)] [U(b)] \\ [N'(b)] [U'(b)] \end{pmatrix}$$

以(2.11)和(3.5)代入上式得:

$$\left. \begin{aligned} T_{1j} &= a^4 / \delta_j \\ T_{2j} &= (\eta_j - 2\xi + 4) a^3 / \delta_j \\ T_{3j} &= a^4 (b/a)^{\eta_j - 2\xi + 4} / \delta_j \\ T_{4j} &= a^3 (\eta_j - 2\xi + 4) (b/a)^{\eta_j - 2\xi + 3} / \delta_j \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (3.9)$$

$$\text{这里记} \quad \delta_j = \prod_{i=1}^4 (\eta_j - \eta_i - 2\xi + 4) \quad (3.10)$$

$$\text{于是 } [H_2(r)]_n = \frac{\rho h_a}{G_a} [N(r)] ([U(r)] - [S]^{-1}[T])[S]^{-1} \quad (3.11)$$

利用(2.9)第三式, 同理亦可推出 $l > 2$ 的 $[H_l(r)]_n$ 的各项, 这里从略。

在求单元的刚度矩阵时, 所用到的应变矩阵, 也含有形函数的动态修正项的影响, 即:

$$[B(r, \omega)]_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ 1 & \frac{\partial}{r} & -\frac{n^2}{r^2} \\ 2n & \frac{\partial}{r} & -\frac{2n}{r^2} \end{pmatrix} ([H_0(r)] + \omega^2 [H_2(r)] + \dots) = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l(r)]_n$$

将(2.10)及(2.11)代入上式, 得:

$$[B(r, \omega)]_n = \{ [X(r)] + \omega^2 \frac{\rho h_a}{G_a} ([Y(r)] - [X(r)][S]^{-1}[T]) + \dots \} [S]^{-1} \quad (3.12)$$

$$\text{其中 } [X(r)] = \begin{pmatrix} [N''(r)] \\ \frac{1}{r} [N'(r)] - \frac{n^2}{r^2} [N_n(r)] \\ \frac{2n}{r} [N'(r)] - \frac{2n}{r^2} [N_n(r)] \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$$[Y(r)] = \begin{pmatrix} ([N'(r)][U_n(r)])' \\ \left(\frac{1}{r} [N'(r)] - \frac{n^2}{r^2} [N(r)] \right) [U_n(r)] \\ \left(\frac{2n}{r} [N'(r)] - \frac{2n}{r^2} [N(r)] \right) [U_n(r)] \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

由此得, 矩阵 $[X(r)]$ 和 $[Y(r)]$ 各元素表达式分别为:

$$\left. \begin{aligned} X_{1j}(r) &= \eta_j(\eta_j - 1) \bar{r}^{\eta_j - 2} / a^2 \\ X_{2j}(r) &= (\eta_j - n^2) \bar{r}^{\eta_j - 2} / a^2 \\ X_{3j}(r) &= 2n(\eta_j - 1) \bar{r}^{\eta_j - 2} / a^2 \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{1j}(r) &= (\eta_j - 2\xi + 4)(\eta_j - 2\xi + 3) \bar{r}^{\eta_j - 2\xi + 2} / (a^2 \delta_j) \\ Y_{2j}(r) &= (\eta_j - 2\xi + 4 - n^2) \bar{r}^{\eta_j - 2\xi + 2} / (a^2 \delta_j) \\ Y_{3j}(r) &= 2n(\eta_j - 2\xi + 3) \bar{r}^{\eta_j - 2\xi + 2} / (a^2 \delta_j) \end{aligned} \right\} \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (3.16)$$

四、单元的静态质量、刚度矩阵和动态修正矩阵

由于环形单元的轴对称性, 对于不同的节径数目, 单元的质量矩阵和刚度矩阵分别是不耦合的, 因此对应不同节径, 单元的动能和应变能可分别计算:

$$T_n = \frac{\omega^2}{2} \{q\}^T [M] \{q\}_n \quad (4.1)$$

$$U_n = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\}_n \quad (4.2)$$

其中, 单元质量和刚度矩阵分别为:

$$\begin{aligned}
 [M]_n^* &= c\pi\rho h_a \int_a^b \bar{r}^s ([H_0(r)] + \omega^2[H_2(r)] + \cdots)^T ([H_0(r)] + \omega^2[H_2(r)]_n + \cdots) r dr \\
 &= [M_0]_n^* + \omega^2[M_2]_n^* + \cdots \\
 &= c\pi\rho h_a [S]^{-T} ([\bar{M}_0]_n + \omega^2[\bar{M}_2]_n + \cdots) [S]^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
 [K]_n^* &= c\pi G_a \int_a^b \bar{r}^{3s} [B_n(r, \omega)]^T [D_0] [B_n(r, \omega)] r dr \\
 &= [K_0]_n^* + \omega^2[K_2]_n^* + \omega^4[K_4]_n^* + \cdots \\
 &= c\pi G_a [S]^{-T} ([\bar{K}_0]_n + \omega^2[\bar{K}_2]_n + \omega^4[\bar{K}_4]_n + \cdots) [S]^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

在上式中:

$$c = \begin{cases} 2, & \text{当 } n=0 \\ 1, & \text{当 } n \neq 0 \end{cases}$$

$$[D_0] = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

$[B(r, \omega)]_n$ 如(3.12)所示. 于是,

$$[\bar{M}_0]_n = \int_a^b \bar{r}^s [N(r)]^T [N(r)] r dr \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}
 [\bar{M}_2]_n &= \frac{\rho h_a}{G_a} \int_a^b \bar{r}^s \{ [N(r)]^T [N(r)] ([U(r)] - [S]^{-1}[T]) \\
 &\quad + ([U(r)] - [S]^{-1}[T])^T [N(r)]^T [N(r)] \} r dr
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$[\bar{K}_0]_n = \int_a^b \bar{r}^{3s} [X(r)]^T [D_0] [X(r)] r dr \tag{4.7}$$

$$[\bar{K}_2]_n = \int_a^b \bar{r}^{3s} \{ [X(r)]^T [D_0] [Y(r)] + [Y(r)]^T [D_0] [X(r)] \} r dr \tag{4.8}$$

可由(2.9)及齐次边界条件, 并利用将面积分化为线积分的格林公式证明:

$$\begin{aligned}
 \int_a^b h(r) [B_i(r)]_n^T [D] [B_j(r)]_n r dr &= \int_a^b G(r) [H_i(r)]_n^T (\Delta [H_j(r)]_n) r dr \\
 &= \begin{cases} 0 & (i=2, 3, 4, \dots, j=0, 1) \\ \rho \int_a^b h(r) [H_i(r)]_n^T [H_{j-2}(r)]_n r dr & (i, j=2, 4, \dots) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

由此可得三个恒等式:

$$[K_2]_n = 0 \tag{4.10}$$

$$[K_4]_n = \frac{1}{2} [M_2]_n \tag{4.11}$$

$$[H_i(r)]_n^T \cdot [H_{i-2}(r)]_n = [H_{i-2}(r)]_n^T \cdot [H_i(r)]_n \tag{4.12}$$

$$\text{所以 } [\bar{K}_2]_n = 0 \tag{4.13}$$

$$[\bar{K}_4]_n = \frac{\rho h_a}{2G_a} [M_2]_n \tag{4.14}$$

$$[\bar{M}_2]_n = \frac{2\rho h_a}{G_a} \int_a^b \bar{r}^s [N(r)]^T [N(r)] ([U(r)] - [S]^{-1}[T]) r dr \tag{4.15}$$

利用上式, 可以省去对 $[\bar{K}_4]_n$ 的计算, 求 $[\bar{M}_2]_n$ 也只需计算以下积分:

$$[\tilde{M}_2]_n = \int_a^b r^\xi [N(r)]^T [N(r)] [U(r)] r dr \quad (4.16)$$

即可得到:

$$[M_2]_n = \frac{2\rho h a}{G_a} ([\tilde{M}_2]_n - [M_0]_n [S]^{-1} [T]) \quad (4.17)$$

以各已知矩阵代入, 得到矩阵 $[M_0]_n$, $[\tilde{M}_2]_n$ 和 $[K_0]_n$ 的元素表达式:

$$\bar{M}_0^{(ij)} = \frac{a^2 [(b/a)^{\eta_i + \eta_j + \xi + 2} - 1]}{\eta_i + \eta_j + \xi + 2} \quad (4.18)$$

$$\tilde{M}_2^{(ij)} = \frac{a^6 [(b/a)^{\eta_i + \eta_j - \xi + 6} - 1]}{\delta_j (\eta_i + \eta_j - \xi + 6)} \quad (4.19)$$

$$K_0^{(ij)} = \begin{cases} \frac{f(\eta_i, \eta_j) [(b/a)^{\eta_i + \eta_j + 3\xi - 2} - 1]}{a^2 (\eta_i + \eta_j + 3\xi - 2)} & |i-j| \neq 1 \\ \frac{f(\eta_i, \eta_j) \ln(b/a)}{a^2} & |i-j| = 1 \end{cases} \quad (4.20)$$

其中: $f(\eta_i, \eta_j) = (\eta_i^2 - n^2)(\eta_j^2 - n^2) + (1-\nu)(\eta_i + \eta_j - 2)[n^2(\eta_i + \eta_j - 1) - \eta_i \eta_j]$ 这样, 就得到了单元的质量矩阵和刚度矩阵 (各包括一次修正矩阵, 不计 ω 的更高阶项):

$$[M]_i = [M_0]_i + \omega^2 [M_2]_i \quad (4.21)$$

$$[K]_i = [K_0]_i + \frac{1}{2} \omega^4 [M_2]_i \quad (4.22)$$

组装各单元矩阵, 得到圆板自由振动方程:

$$([K_0]_n - \omega^2 [M_0]_n - \frac{1}{2} \omega^4 [M_2]_n) \{q\}_n = 0 \quad (4.23)$$

这是一个二次矩阵特征值问题, 其求解方法很多^[4], 这里不赘述。

五、实际算例的验证

般空发动机中的压气机和涡轮转子, 是较典型的回转周期结构。对它进行振动特性分析是有限元法的应用领域之一^[5], 也是上述的动态有限元法的实际应用。如图2(a)所示叶盘组合结构的模型件。其中, 轮盘内周边固定, 盘缘处为变厚度 (沿半径变化), 28个平直叶片均布安装在上面, 并与轮盘平面成 30° 斜角, 其几何尺寸如图2(b)所示。叶片的几何特性为:

横截面积 $A=75\text{cm}^2$, 极惯性矩 $I_o=5664.06\text{mm}^4$, 二阶惯性矩 $I_{yy}=39.0625\text{mm}^4$, $I_{yz}=0$, $I_{zz}=5625.0\text{mm}^4$, 圣维南剪切常数 $J=150\text{mm}^4$ 。

叶片材料为30CrMnSiA:

杨氏模量 $E=0.2116 \times 10^{12}\text{N/m}^2$, 剪切模量 $G=0.08139 \times 10^{12}\text{N/m}^2$, 材料密度 $\rho=7.75 \times 10^{-6}\text{kg/mm}^3$ 。

轮盘的材料为20*钢:

材料密度 $\rho=7.8 \times 10^{-6}\text{kg/mm}^3$, 杨氏模量 $E=0.1961 \times 10^{12}\text{N/m}^2$, 泊桑比 $\nu=0.3$ 。

组合件的轮盘部分划分为六个动态环形元, 叶片取六个动态梁元。按此计算所得各阶固有频率数据比较如表1所示, 相应振型数据这里从略。表中第一列为利用五个环形厚板元和六个三维梁元(共六十多个自由度)的原结果^[6], 第二列为上述六个“静态”环形元和六个梁

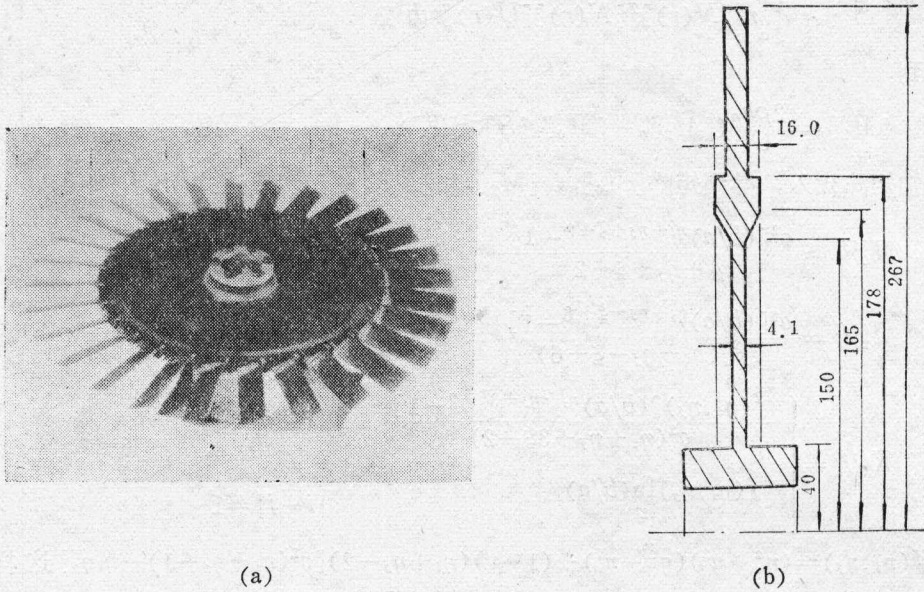


图 2

元（共二十四个自由度）的计算数据，第三列为本文六个动态环形元和六个动态梁元（共二十四个自由度）的结果，第四列是用多点调力激发单模态测得的。

六、讨 论

由结果比较可知，用动态有限元法比“静态”有限元法精度有所改善。它相对于常规有限元法，所需划分的自由度数目较少，大大降低了矩阵阶数和特征值求解规模。由于叶片采用了梁元，使计算模型人为地刚化，所以精度的改善比常规有限元法来说并不十分显著。若叶片采用更好的计算模型，如板元、壳元等，精度的提高会更显著。采用动态单元比“静态”单元有所改善，这一点是显然的。因为动态形函数中增加了修正项，这也是动态有限元法区别于常规有限元法的地方。可以从(2.8)式看出，若忽略 $[H_2(r)]_n$ 以及其它关于 ω 的高次幂项，即退化到常规形式。总之，动态有限元是在常规有限元法的基础上进行改进，其改进措施摆脱了空间方位的限制，而发展到频域内进行。

需要说明的是，在(2.3)中，若 $\xi=0$ ，就是等厚圆板单元的特殊情况。此时就不必利用本文的公式，而可以采用更简单的动态元形式。作者之一已做过有关的工作，这里不再重复。对于一般圆板问题，含有等厚和不等厚环元的情况，要将两种动态单元结合起来就行，上面的算例就属此类。

另外，当节径数目为零时，即 $n=0$ ，由(2.12)式可知：当 $\xi<0$ 时， $S_2=0$ ， $S_1=3-2\xi$ ；而当 $\xi>0$ 时， $S_4=0$ ， $S_3=3-2\xi$ 。对于这样的情况，不影响上述公式的推导，本文方法照样适用。

表 1

结果比较

(单位: 赫兹)

节径数 n	节圆数 s	原计算值	“静态” 有限元法	动态 有限元法	实 验 值
0	0	128.0	113.21	113.21	112.5
	1	322.1	309.65	309.64	293.5
	2	940.6	1063.6	1063.2	906.0
	3	1574	1849.0	1847.6	
1	0	87.9	81.867	81.867	84.30
	1	333.0	328.72	328.70	315.70
	2	1082	1236.1	1235.5	1002
	3	1573	1869.8	1868.4	
2	0	203.2	180.11	180.10	180.7
	1	389.5	407.55	407.54	368.1
	2	1425	1533.5	1532.5	1321
	3	1575	1971.7	1969.8	
3	0	283.0	248.36	248.35	256.2
	1	743.8	771.99	771.95	643.6
	2	1576	1727.7	1726.7	
	3	1830	2328.2	2324.0	

参 考 文 献

- [1] Gupta, K. K., On a finite dynamic element method for free vibration analysis of structures, *Comput. Meth. Appl. Math. Eng.*, 9 (1976), 105—120.
- [2] Kirkhope, J. and G. J. Wilson, Vibration analysis of axial flow turbine disks using finite elements, ASME paper 75-DET-80, Design Engineering Technical Conference, Washington, Sept. (1975).
- [3] П. Б. 赫洛宁, 《航空发动机振动理论和计算》, A D.731351, 晏炳堂, 谢竹虚等译(1979, 10).
- [4] Gupta, K. K., Solution of quadratic matrix equations for free vibration analysis of structures, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 6 (1973), 129—135.
- [5] Salama, A. M., Finite element dynamic analysis of blade packets and bladed disc assemblies, Ph. D. Thesis, University of Southampton, Oct. (1976).
- [6] 高德平、张益松, 回转周期结构的振动特性分析, 南京航空学院学报, 4 (1986), 7—16.

The Finite Dynamic Annular Element for the Vibration Analysis of Variable Thickness Discs

Xu Yin-ge

(*Beijing Jiaotong Manager College, Beijing*)

Zhang Yi-song

(*Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing*)

Abstract

According to the gyro-periodicity of dynamic displacements, the two-dimensional problems of circular plates with variable thickness are simplified into one-dimensional ones in this paper. Taking the expanded form of frequency power series of the dynamic displacement functions as the dynamic shape functions of the finite annular element, the mass and stiffness matrices as well as their one-order revised matrices are given succinctly. The dynamic method is used to analyse the vibration characteristics of a bladed disc assembly, and is compared with conventional finite element method experiment, and is proved to be superior to other numerical methods.