应用数学和力学，第 9 卷第 7 期(1988年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

平面Poiseuille流中弱非线性理论和二次失稳理论的关系*

赵耕夫　　周　恒

(天津大学，1987年5月10日收到)

摘　要

文献[1]提出了平面 Poiseuille 流的二次失稳理论，本文则用弱非线性理论研究了同一问题．所得结果和二次失稳理论的结果是一致的，说明在平面 Poiseuille 流中弱非线性理论和二次失稳理论有内在联系．

一、引　言

在流体力学中层流向湍流过渡的机理至今仍是没有完全解决的问题．边界层和平面Poiseuille 流的实验表明，在一定条件下过渡过程呈现几个明显的阶段[1~3]．例如在严格控制的边界层实验中发现过渡过程可分为四个阶段．首先是二维的 Tollmien-Schlichting 波，接着出现在横向波峰波谷分裂的三维波，然后形成局部而且瞬时的强剪切层，它对高频扰动更不稳定并发展成湍斑，最终完全破碎成湍流．三维波的结构和原已存在的二维波的幅值有关．当二维波的幅值相对的比较大的时候，三维波呈现规则的峰谷结构，当二维波的幅值较小时，则呈现交错排列的峰谷结构．至今已提出了不少模式试图解释实验观察到的现象．如 Benney 和 Lin 的纵向涡模式[4]，共振三波模式[5~7]，以及近来 Herbert[1] 和Orszag[8] 提出的二次失稳模式．

所谓二次失稳，是指由二维波所诱导出的三维波的稳定性问题．在 Herbert 的模式中，加在层流上的二维波在流动方向是周期性的，而且它相对于以相速度运动的动坐标是定常的．显然，这种波的幅值相当于临界阈值．在此条件下具有适当流向和横向波数的三维小扰动波将产生参数共振，而最终导致湍流．Nishioka[9] 的实验证明二次失稳的概念是正确的．但是对边界层来讲，由于其厚度的增长，并不存在严格定常的原已存的二维扰动，他不得不采用“形状假设”．这必竟是比较粗糙的方法．对于亚临界过渡，除非人为引入一般并不存在有限幅值的二维定常扰动．因此二次失稳理论不能解释亚临界的自然过渡过程．

由于“人为共振三波”模式不受以上限制，可以解释更多的过渡问题．因此研究这两种模式之间是否存在某种内在联系是很有意义的．

* 中国科学院基金资助课题．

二、基 本 思 想

在平面 Poiseuille 流中，取 x 轴沿未扰动流动方向，y 轴沿平板的法向，z 轴沿流动的横向。适当无量纲化后，层流的速度分量和压力分别为$\bar{u}=1-y^2$，$\bar{v}=\bar{w}=0$，$\bar{p}=-2x/R+c$。其中R为雷诺数，c是常数。

设 εu，εv，εw 和 εp 分别为扰动速度分量和扰动压力，ε 为某一小参数，则它们满足的方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\mathscr{L}u+v\frac{d\bar{u}}{dy}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\varepsilon\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\\&\frac{\partial v}{\partial t}+\mathscr{L}v=-\frac{\partial p}{\partial y}+\varepsilon\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\&\frac{\partial w}{\partial t}+\mathscr{L}w=-\frac{\partial p}{\partial z}+\varepsilon\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

其中 $\mathscr{L}\equiv\bar{u}\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{1}{R}\nabla^2$，$\nabla^2\equiv\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$。边界条件为

$$u=v=w=0\quad 当y=\pm1时\tag{2.2}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，方程(2.1)，(2.2)的解就是著名的 Tollmien-Schlichting 波。假定它由一个二维波和一对三维的斜波组成，即

$$\left.\begin{aligned}&u=au_{oa}\Theta_1+bu_{ob}[\Theta_2+\Theta_3]+c.c.\\&v=av_{oa}\Theta_1+bv_{ob}[\Theta_2+\Theta_3]+c.c.\\&w=w_{ob}[\Theta_2-\Theta_3]+c.c.\\&p=ap_{oa}\Theta_1+bp_{ob}[\Theta_2+\Theta_3]+c.c.\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

其中 $\Theta_1=\exp[i(\alpha_a x-\theta_a)]$，$\Theta_2=\exp[i(\alpha_b x+\beta z-\theta_b)]$

$\Theta_3=\exp[i(\alpha_b x-\beta z-\theta_b)$，$a=A\exp[\alpha_a C_{ai}t]$，

$b=B\exp[\alpha_b C_{bi}t]$，$c.c.$ 为共轭复数，

$\theta_a=\alpha_a C_{ar}t$，$\theta_b=\alpha_b C_{br}t$；$\alpha_a$，$\alpha_b$，$\beta$ 分别为纵向和横向波数；C_a，C_b 为相应的 Orr-Sommerfeld 方程的特征值。在数值计算中，我们采用的正规化条件是

$$\max|u_{oa}|=1,\ \max|u_{ob}|=1.$$

如果考虑非线性影响，依照文献[6]我们可以写成

$$\left.\begin{aligned}&u=\sum u_i\varepsilon^i,\ w=\sum w_i\varepsilon^i\\&v=\sum v_i\varepsilon^i,\ p=\sum p_i\varepsilon^i\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

和

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\alpha_a C_{ai}a+\sum A_i(a,b)\varepsilon^i\\ \frac{db}{dt}&=\alpha_b C_{bi}b+\sum B_i(a,b)\varepsilon^i\\ \frac{d\theta_a}{dt}&=\alpha_a C_{ar}+\sum C_i(a,b)\varepsilon^i\\ \frac{d\theta_b}{dt}&=\alpha_b C_{br}+\sum D_i(a,b)\varepsilon^i\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

其中 u_i, v_i, w_i, p_i 是 a, θ_a, b, θ_b, x, y 和 z 的函数。A_i, C_i, B_i, D_i 各数应在求解摄动方程（2.1）的过程中，利用可解条件逐一确定。正如文献[6]指出的，这只有在满足下列共振条件时才能作到，即

$$\alpha_a=2\alpha_b,\ C_{ar}=C_{br},\ C_{ai}=C_{bi}=0\tag{2.6}$$

在一般条件下，这一条件是不满足的。为此，文献[6]提出了一个克服这一困难的方法，即所谓“人为共振三波”方法。其基本点是把层流速度分解成

$$\bar{u}=\bar{u}_0+\varepsilon\bar{u}_1\tag{2.7}$$

如果把式（2.7）代入方程（2.1）后，所得线性问题的解是满足条件（2.6）的 Tollmien-Schlichting 波，则它们就形成了三波共振。[6]中给出了系统的求解方法。

对于象(2.3)那样的 Tollmien-Schlichting 波，如果要求在 ε 的最低阶数产生共振，则 u_{oa}, p_{oa} 对 y 应当是对称的，v_{oa} 是反对称的。在 Herbert 的二次失稳模式中，二维波分量 u 对 y 是反对称的，而且三维波的演化取决于二维波，但二维波不受三维波的相反作用。因此，我们也取 u_{oa}, p_{oa} 是反对称的，v_{oa} 是对称的。在求解过程中只保留反映二维波对三维波单向作用的项，而略去三维波对二维有反作用的其他各项。这样在我们的模式中既构成了三波共振，也类同于 Herbert 的模式。

三、计 算 结 果

如上所述，我们按文献[6][7]给出的步骤进行了必要的计算。不难发现，若截止到 ε 的三阶量，式（2.5）中两个幅值演化方程变为

$$da/dt=(A_{11}\varepsilon+A_{21}\varepsilon^2)a+A_{24}\varepsilon^2a^3\tag{3.1a}$$

$$db/dt=(B_{11}\varepsilon+B_{21}\varepsilon^2+B_{31}\varepsilon^3+B_{23}\varepsilon^2a^2+B_{32}\varepsilon^3a^2)b\tag{3.1b}$$

因为 Herbert 的结果对三维波是线性的。因此，为了比较（3.1b）式也只取到 b 的线性项。同时，在完成（2.7）式的分解后，(3.1b)式括弧中的表达式应收敛到（2.5）式第二方程中的 α_bC_{bi}。在我们的计算中这一条件很好地满足了。

对几种情况的数值计算结果列于表 1 中。我们的结果有以下几点可以和 Herbert 的结论相比较。(1)对于一个固定的雷诺数，只在一定的波数带中条件(2.6)可以满足。在计算的几种情况中，当 $\alpha_a<1.02$ 和 $\alpha_a>1.39$ 时就找不到实现三波共振的波了。在此波数范围内，β/α_a 的比值大体保持在 0.67 左右，即横向和纵向波长之比为 1.47。由于条件(2.6)是亚谐共振，故相当于交错排列的峰谷结构，它与 Craik 模式不同之处在于 β/α_a 之比与通常的 Craik 模式不同而与 Herbert 的结果很接近。此外，Craik 的理论对给定的雷诺数只能给出一组特定的 α 和 β，而采用“人为共振三波”方法后，α_a 及 β 值有一个不太宽的容许频带，

表 1 ($\alpha_b=0.5\alpha_a$)

R	α_a	β	ε	C_{ar}	C_{ai}	C_{br}	C_{bi}	β/α_a	阈值 r.m.S.
5500	1.24	0.83857	−0.00341	0.28716	−0.00795	0.29384	−0.00719	0.67626	0.00933
	1.27	0.75886	0.02366	0.28907	−0.01004	0.28306	−0.00744	0.59752	0.00871
	1.30	0.87487	−0.00304	0.29068	−0.01234	0.29957	−0.00647	0.67297	0.00813
	1.33	0.81024	0.01937	0.29199	−0.01479	0.29132	−0.00603	0.60920	0.00749
	1.35	0.90809	−0.00668	0.29270	−0.01649	0.30443	−0.00650	0.67266	0.00759
	1.37	0.89757	0.00490	0.29325	−0.01824	0.30329	−0.00628	0.65516	0.00742
5000	1.02	0.76484	−0.01681	0.27058	−0.00152	0.28404	−0.01678	0.74984	0.01276
	1.19	0.81249	−0.00495	0.28835	−0.00512	0.29402	−0.01021	0.68276	0.01240
	1.25	0.85545	−0.00405	0.29304	−0.00850	0.30119	−0.00859	0.68435	0.01024
	1.30	0.95967	−0.01538	0.29617	−0.01200	0.31588	−0.00870	0.73821	0.00890
	1.32	0.89992	−0.00390	0.29719	−0.01355	0.30805	−0.00785	0.68175	0.00895
	1.34	0.87693	0.00560	0.29809	−0.01516	0.30519	−0.00751	0.65442	0.00872
4500	1.25	0.87334	−0.00487	0.29884	−0.00852	0.30904	−0.01043	0.69867	0.01132
	1.27	0.87181	−0.00459	0.30029	−0.00976	0.30905	−0.01011	0.68646	0.01108
	1.29	0.85644	0.00840	0.30162	−0.01108	0.30712	−0.00985	0.66390	0.01088
	1.32	0.96892	−0.01481	0.30339	−0.01323	0.32288	−0.01018	0.73403	0.00962
	1.35	0.92096	−0.00471	0.30488	−0.01556	0.31670	−0.00937	0.68219	0.00979
	.37	0.84124	0.02413	0.30570	−0.01718	0.30627	−0.00876	0.61404	0.00925

A_{11}	A_{21}	A_{24}	B_{11}	B_{21}	B_{23}	B_{31}	B_{32}
3.0295	21.844	25.695	1.2353	−19.946	13.388	389.85	−3573.2
−0.59022	0.77567	30.258	−0.20428	0.16067	27.051	1.3698	171.87
4.8835	−157.36	18.463	1.2611	−34.745	12.031	1444.0	−6487.2
−1.0084	−2.5163	36.118	−0.19513	−0.49294	21.456	−8.1960	743.45
2.8941	−73.447	5.7471	0.59436	−8.3751	10.515	140.48	−4114.1
−4.0008	−157.66	9.0176	−0.83260	−9.9988	12.343	−1.4624	5483.3
1.0344	71.322	20.822	0.62589	3.6725	4.1337	−192.58	−1318.9
1.5397	74.867	29.233	1.2725	7.0318	13.855	−424.15	−1187.1
2.8753	40.209	25.398	1.2465	−18.676	12.216	274.60	−3302.8
1.3466	−5.8095	2.0099	0.30655	−3.4620	3.0805	29.351	−2117.0
4.3252	−106.04	17.290	1.1853	−30.632	10.622	1178.6	−5532.8
−3.2157	−66.360	23.270	−0.82953	−10.723	14.110	−246.71	3385.9
2.6889	77.103	24.486	1.2620	−15.697	10.352	39.786	−3099.5
2.9562	36.088	25.159	1.3093	−18.183	11.833	232.99	−3115.0
−1.6968	−1.9695	28.743	−0.71591	−4.5751	14.941	−32.762	1419.7
1.5285	−5.8964	1.9981	0.38714	−3.9915	3.9653	32.475	−2180.5
4.1543	−94.587	17.826	1.1880	−27.293	10.224	97.620	−4812.6
−0.95238	−1.8764	37.429	−0.22906	−0.60335	19.877	−6.5230	620.60

这也和 Herbert 的结果相似。(2) 当二维波的幅值超过某一临界阈值时，式 (3.1b) 式右端括号内表达式的值将变成正的，即三维波将失稳。对 $R=5000$ 的情况，这一阈值的均方根值在0.009～0.012之间，和 Nishioka 等人的实验结果[9] 0.01 很接近。(3) Herbert[1]给出了$R=5700\sim5740$时的结果，在$\alpha=1.02$时，临界阈值为0.005，考虑到 R 越接近临界情况，该阈值越小，而对应于线性理论的中性情况阈值为零，我们在$R=5500$时得到的临界阈值在0.007～0.009的范围内，与 Herbert 的结果也是不矛盾的。此外，Herbert 得出最不稳定的三维波$\beta=0.8$，而我们在$R=5500$时所得最不稳定的三维波的横向波数 $\beta=0.89$，也是相近的。

四、结 论

由以上分析可得出这样的结论，对平面 Poiseuille 流，当只考虑二维波对三维波的单向加强作用，而且在两种情况中，二维波的流向速度分量对 y 都是反对称时，弱非线性理论和二次失稳理论所得结果是一致的。说明两者具有内在联系。但在边界层流动中，由于不存在对称性，两者是否还能得出一致的结果仍是有待探讨的问题。

参 考 文 献

[1] Herbert, T., *AIAA*-83-1759 (1983).

[2] Klebanoff, P. S., K. D. Tidstrom and L. M. Sargent, *J. Fluid Mech.*, 12 (1962), 1—34.

[3] Nishioka, M., M. Asai and S. Iida, *Laminar-Turbulent Transition* (eds. R. Eppler and H. Fasel), Springer-Verlag (1980), 37—46.

[4] Benney, D. T. and C. C. Lin, *Phy. Fluids*, 3 (1960), 656—657.

[5] Craik, A. D. D., *J. Fluid Mech.*, **50** (1971), 393—413.

[6] 周恒，力学学报，**16** (1984), 1—9.

[7] 周恒，王亦工，力学学报，**16** (1984), 205—213.

[8] Orszag, S. A. and A. T. Patera, *J. Fluid Mech.*, **128** (1983), 347—383.

[9] Nishioka, M. and M. Asai, *Second IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition*, Novosibirsk (July, 1984).

Weakly Nonlinear Theory versus Theory of Secondary Instability for Plane Poiseuille Flow

Zhao Geng-fu Zhou Heng

(Tianjing University, Tianjin)

Abstract

In [1] the theory of secondary instability for plane Poiseuille flow was proposed. In this paper the weakly nonlinear theory is used to investigate the same problem. The results are consistent with those of the theory of secondary instability. It indicates that for plane Poiseuille flow there exists a certain intrinsic relation between the weakly nonlinear theory and the theory of secondary instability.