应用数学和力学，第 9 卷第 7 期(1988年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

杂交能变分原理及层合板三维理论的基础——分析复合材料层间应力的新方法*

黄 黔

(加拿大康戈迪亚大学；上海工业大学，1987年 6 月20日收到)

摘 要

本文讨论了复合材料层合板层间界面处应力和应变的间断性问题，并提出了复合材料层合板的三维理论．本文还以在层合板中全局连续的变量为基础，提出了与传统的势能和余能不同的一种新的弹性能．并得到与复合材料三维理论相应的变分原理．本文得到的三维层合板理论和杂交能变分原理，可以作为校核层合板二维经典理论和确定自由边界附近层间应力的理论基础．

一、前 言

确定复合材料的层间应力是当前一个有意义的课题．三维各向异性体弹性理论在五十年代到七十年代发展起来[1]．它可以应用于复合材料各层的内部，但对传统的解法来说，层间界面要作为边界处理．这样，三维分析不能把层合板作为一个整体来看待．六十年代末期，一些作者发现层间界面附近的剪切变形对复合材料的强度和其它性质有影响，复合材料的破坏往往被归因于自由边界附近应力集中造成的层间剥离．七十年代以来，二维经典层合板理论得到广泛的应用，在二维理论中假定应变沿厚度不变[25,26,27]．二维理论适用于远离边界的区域．自由边界附近的应力分析和应变分析仍然是研究的课题．无论是位移法还是应力法在满足层间连续性要求时都遇到困难．

现有的对层间应力的研究大致上有以下几种方法．

有限差分法：R. B. Pipes 和 N. J. Pagano (1970, 1972, 1974)[2]，E. Altus 等人 (1980)，(位移法)[3]．

有限元法：用高阶平板单元的位移法，J. J. Engblom 等人 (1985)[4]，G. R. Heppler 等人 (1980)[5]；用三维单元的位移法，J. R. Yeh 等人 (1986)[6]，R. Natarajan M. Lucking 和 S. V. Hoa (1984, 1986)[7,8]；假设应力场，E. F. Rybicki (1971)[9] 杂交元，S. A. Khalil 等人 (1986)[10]，K. Moriya 等人 (1986)[11]，R. L. Spilker (1986)[12]，S. S. Wang 等人 (1983)[13]．

* 钱伟长推荐．

摄动法：P. W. Hsu 等人（1977），（位移法）[14]. 边界层搭接法，S. Tang 和 A. Levy（1976），（应力法）[15]. 合成渐近展开法，P. Bar-Yoseph 和 T. H. H. Pian（1981，1983），（应力法）[16,17].

变分法：瑞雷-李兹法，N. J. Pagano（1978），（混合法）[18]；伽辽金法，J. T. S. Wang 和 J. N. Dickson（1978），（混合法）[19].

传递矩阵法，H. Oery 等人（1984）[20].

实验方法，J. M. Whitney 等人（1972）[21]，D. G. Berhaus 等人（1975）[22].

上述工作可以简单地分为：位移法，应力法，混合法和杂交法. 这里的"杂交"意味着有限元边界面上假设的场变量不同于内部的场变量.

某些作者对层间连续性条件予以重视，如 R. L. Spiker（1980）[23] 和 T. H. H. Pian（1981）[16]，他们强调层间应力σ_z，τ_{xz}，τ_{yz}并倾向于采用应力法.

在现有的研究中已经指出，在层间界面u，v，w，σ_z，τ_{xz}，τ_{yz}等六个变量保持连续. 因而有三个应力和三个应变在间界面保持连续：

$$\varepsilon_x, \ \varepsilon_y, \ \gamma_{xy}, \ \sigma_z, \ \tau_{xz}, \ \tau_{yz}$$

同时，其它三个应力和其它三个应变在每一层内部保持连续而在层间界面有可能出现弱间断. 它们是

$$\sigma_x, \ \sigma_y, \ \tau_{xy}, \ \varepsilon_z, \ \gamma_{xz}, \ \gamma_{yz}$$

由于有三个应力和三个应变保持全局连续性，无论是位移法还是应力法都不能直接满足这六个连续性条件. 对大多数常见的方法，要想满足这种杂交的连续性条件，在层间界面都必须做大量的工作.

很明显，如果采用六个全局连续的变量作为基本变量，则层间连结条件可以自动得到满足. 因而在下面，我们将提出这种具有全局连续性的变量，相应的杂交能及其变分原理，作为复合材料层合板三维力学模型的求解途径.

二、基 本 方 程

取下列六个全局连续的变量作为基本变量：

$$\mathbf{r}=\{u, \ v, \ w, \ \sigma_z, \ \tau_{xz}, \ \tau_{yz}\}^T \tag{2.1}$$

在层间界面，三个面内应变可以归属于这一界面相邻两层中的任意一个，因而这三个应变在间界面保持连续：ε_x，ε_y，γ_{xy}.

这就是说，对整个层合板来说，不管是六个应力还是六个应变，都没有全局连续性，而是六个应力和应变的杂交数组具有全局连续性，他们构成了全局场向量：

$$\mathbf{q}=\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G \\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{matrix}\right\}=\{\varepsilon_x, \ \varepsilon_y, \ \gamma_{xy}, \ \sigma_z, \ \tau_{xz}, \ \tau_{yz}\}^T \tag{2.2}$$

而应力和应变的其它六个分量构成了局部场向量：

$$\mathbf{p}=\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\sigma}_L \\ -\boldsymbol{\varepsilon}_L\end{matrix}\right\}=\{\sigma_x, \ \sigma_y, \ \tau_{xy}, \ -\varepsilon_z, \ -\gamma_{xz}, \ -\gamma_{yz}\}^T \tag{2.3}$$

在全局向量和局部向量之间，存在着杂交的本构关系：

$$\mathbf{p}=\mathbf{H}\mathbf{q} \tag{2.4}$$

如果记

$$\boldsymbol{\sigma}=\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\sigma}_L\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{matrix}\right\}=\{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy},\ \sigma_z,\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}\}^T \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left\{\begin{matrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\varepsilon}_L\end{matrix}\right\}=\{\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xy},\ \varepsilon_z,\ \gamma_{xz},\ \gamma_{yz}\}^T \tag{2.6}$$

则有

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2\\ \mathbf{Q}_2^T & \mathbf{Q}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.7}$$

或

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2\\ \mathbf{S}_2^T & \mathbf{S}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.8}$$

可以得到

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}_1-\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3^{-1}\mathbf{Q}_2^T & \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3^{-1}\\ \mathbf{Q}_3^{-1}\mathbf{Q}_2^T & -\mathbf{Q}_3^{-1}\end{bmatrix} \tag{2.9}$$

或

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_1^{-1} & -\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2\\ -\mathbf{S}_2^T\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2^T\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2-\mathbf{S}_3\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

由于柔度阵$\mathbf{S}$和刚度阵$\mathbf{Q}$都是对称阵，容易证明

$$\mathbf{H}^T=\mathbf{H} \tag{2.11}$$

在层间界面上，对相邻的两层来说，全局场变量$\mathbf{q}$是相同的，但由于材料的变化或纤维走向的变化，杂交本构关系矩阵$\mathbf{H}$是不同的，所以，一般说来，局部场向量$\mathbf{p}$会发生弱间断。

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^{(i)}&=\mathbf{H}^{(i)}\mathbf{q}\\ \mathbf{p}^{(i+1)}&=\mathbf{H}^{(i+1)}\mathbf{q}\end{aligned} \tag{2.12}$$

显然，这样求解，可以自动地满足层间连续性条件，又可以自然地计算出层间的间断性。三维层合板理论的基本方程如下：

基本变量　$\mathbf{r}=\{u,\ v,\ w,\ \sigma_z,\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}\}^T$

全局向量　$\mathbf{q}=\{\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xy},\ \sigma_z,\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}\}^T$

局部向量　$\mathbf{p}=\{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy},\ -\varepsilon_z,\ -\gamma_{xz},\ -\gamma_{yz}\}^T$

1. 全局向量和基本变量之间的关系

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

因而有

$$\mathbf{q}=\mathbf{Br}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\\ \sigma_z\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

2. 杂交的本构关系

$$\mathbf{p}=\mathbf{Hq} \tag{2.15}$$

矩阵$\mathbf{H}$可以记如

$$\mathbf{H}=[\mathbf{h}_1,\ \mathbf{h}_2,\ \cdots,\ \mathbf{h}_6]^T$$

其中$\mathbf{h}_i$是$\mathbf{H}$的行向量。

3. 平衡方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{h}_1^T\mathbf{Br}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{h}_3^T\mathbf{Br}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+\bar{F}_x=0\\ &\frac{\partial \mathbf{h}_3^T\mathbf{Br}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{h}_2^T\mathbf{Br}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+\bar{F}_y=0\\ &\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\bar{F}_z=0\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

4. 协调方程

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{h}_4\mathbf{Br}=-\frac{\partial w}{\partial z}\\ &\mathbf{h}_5\mathbf{Br}=-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\\ &\mathbf{h}_6\mathbf{Br}=-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

5. 边界条件

在位移已知边界上，

$$\left.\begin{aligned}&u=\bar{u}\\ &v=\bar{v}\\ &w=\bar{w}\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

在外力已知边界上，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z&=\bar{P}_x\\ \tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z&=\bar{P}_y\\ \tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z&=\bar{P}_z\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

6. 层间界面的连结条件

$$\left.\begin{aligned}u^{(i)}&=u^{(i+1)}\\ v^{(i)}&=v^{(i+1)}\\ w^{(i)}&=w^{(i+1)}\\ \sigma_z^{(i)}&=\sigma_z^{(i+1)}\\ \tau_{xz}^{(i)}&=\tau_{xz}^{(i+1)}\\ \tau_{yz}^{(i)}&=\tau_{yz}^{(i+1)}\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

三、杂变能变分原理

上一节提到，杂交本构关系矩阵H是对称阵。

$$H_{ij}=H_{ji} \tag{3.1}$$

如果定义

$$\begin{aligned}2C=&(H_{11}q_1+H_{12}q_2+H_{13}q_3+H_{14}q_4+H_{15}q_5+H_{16}q_6)q_1\\ &+(H_{21}q_1+H_{22}q_2+\cdots+H_{26}q_6)q_2+\cdots\\ &+(H_{61}q_1+H_{62}q_2+\cdots+H_{66}q_6)q_6\end{aligned} \tag{3.2}$$

则有

$$\frac{\partial C}{\partial q_i}=H_{i1}q_1+H_{i2}q_2+\cdots+H_{i6}q_6=p_i \tag{3.3}$$

我们得到一个全局场向量的二次型

$$C=\frac{1}{2}H_{ij}q_iq_j \tag{3.4}$$

类似于势能（应变的二次型）

$$A=\frac{1}{2}Q_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \tag{3.5}$$

和余能（应力的二次型）

$$B=\frac{1}{2}S_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{3.6}$$

二次型C是一种新的能量。可以叫它杂交能。

用加权余数法可以建立起相应于上节给出的三维层合板理论的变分原理。

取一组完全的全局连续的变量作为泛函的基本变量

$$\{u,\ v,\ w,\ \sigma_z,\ \tau_{xz},\ \tau_{yz}\}$$

则可自动满足层间界面的连接条件，从而避免了层间连接条件在泛函中的出现，可以大大简

化计算。

这意味着层间连接条件将作为强制性约束预先得到满足。

如果把全局向量与局部向量之间关系，也就是部分的应变与位移关系，选作泛函的强制性约束，则泛函中的变量数可以最少。

在计算中，位移已知边界很容易满足，从而减少积分的工作量。

概括起来，以下关系将作为强制性约束预先得到满足

a) 部分应变位移关系(2.14)

b) 位移已知边界条件(2.18)

c) 层间界面的连接条件(2.20)

其他的关系，作为泛函的欧拉方程和自然边界条件，将由泛函的驻值条件得到满足。诸如，

a) 平衡方程(2.16)

b) 杂交的本构关系(2.4)

c) 协调方程(2.17)

d) 外力已知的边界条件(2.19)

这些关系式用加权余数法引入积分式中，并记为 I，则有

$$
\begin{aligned}
I=\sum_i \iiint_{V_i}\Big[&\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+\bar{F}_x\right)A^*+\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+\bar{F}_y\right)B^*\\
&+\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\bar{F}_z\right)C^*+\left(\frac{\partial C}{\partial\varepsilon_x}-\sigma_x\right)D^*+\left(\frac{\partial C}{\partial\varepsilon_y}-\sigma_y\right)E^*\\
&+\left(\frac{\partial C}{\partial\gamma_{xy}}-\tau_{xy}\right)F^*+\left(\frac{\partial C}{\partial\sigma_z}+\varepsilon_z\right)G^*+\left(\frac{\partial C}{\partial\tau_{xz}}+\gamma_{xz}\right)H^*\\
&+\left(\frac{\partial C}{\partial\tau_{yz}}+\gamma_{yz}\right)I^*+\left(\varepsilon_z-\frac{\partial w}{\partial z}\right)J^*+\left(\gamma_{xz}-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)K^*\\
&+\left(\gamma_{yz}-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)L^*\Big]dV\\
&+\iint_{S_\sigma}\big[(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z-\bar{P}_x)M^*\\
&+(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z-\bar{P}_y)N^*\\
&+(\tau_{xz}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z-\bar{P}_z)Q^*\big]dS
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

其中A^*，B^*，…，L^*是在每一层各向异性体内部V_i上的任意函数，而M^*，N^*，Q^*是力边界上的任意函数。

不失一般性，这些任意函数可以定义为

$$
\begin{aligned}
&A^*=-\delta u,\quad B^*=-\delta v,\quad C^*=-\delta w,\\
&D^*=\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad E^*=\delta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),\quad F^*=\delta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
&G^*=\delta\sigma_z,\qquad H^*=\delta\tau_{xz},\qquad I^*=\delta\tau_{yz},\\
&J^*=-\delta\sigma_z,\qquad K^*=-\delta\tau_{xz},\qquad L^*=-\delta\tau_{yz},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

在各层空间V_i上；和

$$M^*=\delta u,\ N^*=\delta v,\ Q^*=\delta w \tag{3.9}$$

在外力已知边界上。

对于每一层来说，上表面外法线方向是

$$(n_x,\ n_y,\ n_z)=(0,\ 0,\ 1) \tag{3.10}$$

下表面的外法线方向是

$$(n_x,\ n_y,\ n_z)=(0,\ 0,\ -1) \tag{3.11}$$

通过分部积分，并利用位移边界(2.18)，可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_i\iiint_{V_i}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)\delta u dV\\
&=\sum_i\left\{-\iiint_{V_i}\left(\sigma_x\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xz}\delta\frac{\partial u}{\partial z}\right)dV\right.\\
&\quad+\iint_{S\sigma_i}(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z)\delta u dS\\
&\quad\left.+\iint_{S_{up}}\tau_{xz}n_z\delta u dS-\iint_{S_{low}}\tau_{xz}n_z\delta u dS\right\}\\
&=-\sum_i\left\{\iiint_{V_i}\left(\sigma_x\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\delta\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{xz}\delta\frac{\partial u}{\partial z}\right)dV\right\}\\
&\quad+\iint_{S_\sigma}(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z)\delta u dS
\end{aligned} \tag{3.12}$$

其中τ_{xz}在层间界面上保持连续，可以相互抵销，因为在界面上相邻两层的外法线方向余弦大小相等而符号相反。

其它两个方向的积分可以得到类似的结果，因而我们有，

$$\begin{aligned}
I=&\sum_i\iiint_{V_i}\left\{\left(\sigma_x\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{xy}\delta\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{xz}\delta\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right.\\
&+\left(\tau_{xy}\delta\frac{\partial v}{\partial x}+\sigma_y\delta\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{yz}\delta\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\
&+\left(\tau_{xz}\delta\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{yz}\delta\frac{\partial w}{\partial y}+\sigma_z\delta\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&-(\bar F_x\delta u+\bar F_y\delta v+\bar F_z\delta w)+\delta\varepsilon_x\left(\frac{\partial C}{\partial\varepsilon_x}-\sigma_x\right)+\delta\varepsilon_y\left(\frac{\partial C}{\partial\varepsilon_y}-\sigma_y\right)\\
&+\delta\gamma_{xy}\left(\frac{\partial C}{\partial\gamma_{xy}}-\tau_{xy}\right)+\delta\sigma_z\left(\frac{\partial C}{\partial\sigma_z}+\varepsilon_z\right)+\delta\tau_{xz}\left(\frac{\partial C}{\partial\tau_{xz}}+\gamma_{xz}\right)\\
&+\delta\tau_{yz}\left(\frac{\partial C}{\partial\tau_{yz}}+\gamma_{yz}\right)-\delta\sigma_z\left(\varepsilon_z-\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\delta\tau_{xz}\left(\gamma_{xz}-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

$$-\delta\tau_{yz}\left(\gamma_{yz}-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big\}dV-\iint_{S_\sigma}(\bar{P}_x\delta u+\bar{P}_y\delta v+\bar{P}_z\delta w)dS \qquad (3.13)$$

经简化，得到

$$I=\sum_i\iiint_{V_i}\Big\{\delta C+\delta\Big[\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\Big]$$

$$-\delta(\bar{F}_xu+\bar{F}_yv+\bar{F}_zw)\Big\}dV-\iint_{S_\sigma}\delta(\bar{P}_xu+\bar{P}_yv+\bar{P}_zw)dS \qquad (3.14)$$

显然，这个加权余数积分是一个完全变分。因此，这个积分可以重新写为一个泛函的变分。

$$\Pi_L=\sum_i\Big\{\iiint_{V_i}\Big[C+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$-\bar{F}_xu-\bar{F}_yv-\bar{F}_zw\Big]dV\Big\}-\iint_{S_\sigma}(\bar{P}_xu+\bar{P}_yv+\bar{P}_zw)dS \qquad (3.15)$$

在约束条件[(2.14)，(2.18)和(2.20)]的限制下取驻值

$$\delta\Pi_L=0$$

于是，可以用于求解复合材料层合板的杂交能变分原理可表述如下：

在所有保持全局连续性，满足位移已知边界条件和应变ε_x，ε_y，γ_{xy}与位移之间关系的可能位移u，v，w和可能应力σ_z，τ_{xz}，τ_{yz}中，真实的位移和应力$\{u, v, w, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}$可以由如下泛函的驻值条件给出。

$$\Pi_L=\iiint_V\Big[C+\sigma_z\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xz}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$-\bar{F}_xu-\bar{F}_yv-\bar{F}_zw\Big]dV-\iint_{S_\sigma}(\bar{P}_xu+\bar{P}_yv+\bar{P}_zw)dS \qquad (3.16)$$

对于复合材料层合板，这一变分原理是有效的，只要泛函采取(3.15)式。

由于以上推导过程步步可以逆推，以上变分原理作为一个驻值原理很容易得到证明。

作者衷心感谢上海工业大学钱伟长教授富有教益的《广义变分原理》讲座，并衷心感谢蒙特利尔康戈迪亚大学华宋教授的《复合材料》课程。

参 考 文 献

[1] Lekhnitskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Gostekhizdat, Moscow (1950), (in Russian), transl., Holden-Day, San Francisco (1963); second edition, Nauka, Moscow (1977), (in Russian), transl., Mir Publishers, Moscow (1981).

[2] Pipes, R. B., *J. Compos. Mater.*, **4**, Oct. (1970), 538—548.

[3] Altus, E., A. Rotem and M. Shmueli, *J. Compos. Mater.*, **14** (1980), 21—30.

[4] Engblom, J. J. and O. O. Ochoa, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 21, 10, Oct.

(1985), 1759—1776.

[5] Heppler, G. R. and J. S. Hansen, *Adv. in Compos. Mater.* 1, Agu. (1980), 666—692.

[6] Yeh, J. R. and I. G. Tabjbakhsh, *J. Compos. Mater.* 20, 4, Jul. (1986), 347—364.

[7] Natarajan, R., S. V. Hoa and T. S. Sankar, *Int. Numer. Methods Eng.*, 23, 4, Apr. (1986), 623—633.

[8] Lucking, W. M., S. V. Hoa and T. S. Sankar, *J. Compos. Mater.*, 18, 2, Mar. (1984), 188—198.

[9] Rybicki, E. F., *J. Compos. Mater.*, 5 (1971), 354—360.

[10] Khalil, S. A., C. T. Sun and W. C. Hwang, *Int. J. Fract.*, 31, 1, May (1986), 37—51.

[11] Moriya, K., *Nippon Kikai Gakkai Ronbunshu a Hen*, 52, 478, Jun. (1986), 1600—1607.

[12] Spilker, R. L. and D. M. Jakobs, *Int. Numer. Methods Eng.*, 23, 4, Apr. (1986), 555—578.

[13] Wang, S. S. and F. G. Yuan, *J. Appl. Mech.*, 50 (1983), 835—844.

[14] Hsu, P. W. and C. T. Herakovich, *J. Compos. Mater.*, 11 (1977), 422—427.

[15] Tang, S., *J. Compos. Mater.* 10, 1, Jan. (1976), 69—78.

[16] Bar-Yoseph, P. and T. H. H. Pian, *J. Compos. Mater.*, 15, 3, May (1981), 225—239.

[17] Bar-Yoseph, P. and T. H. H. Pian, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 36, 3, Mar. (1983), 309—329.

[18] Pagano, N. J., *Int. J. Solids Structures*, 14 (1978), 385—400.

[19] Wang, J. T. S. and J. N. Dickson, *J. Compos. Mater.*, 12 (1978), 390—401.

[20] Oery, H., H. Reimerdes and S. Dieker, *Z. Flugwiss Weltraumforsch*, 8, 6, Nov.—Dec. (1984), 392—404.

[21] Whitney, J. M. and C. E. Browning, J. Compos. Mater., 6 (1972), 300—303.

[22] Berghaus, D. G. and R. W. Aderholdt, *Exp. Mech.*, 15, 4, Jul. (1975), 173—176.

[23] Spilker, R. L. and S. C. Chou, *J. Compos. Mater.*, 14 (1980), 2—20.

[24] 钱伟长，《广义变分原理》，知识出版社，上海（1985）.

[25] Tsai, S. W. and H. T. Hahn, *Introduction to Composite Materials*, Technomic Publishing Co. Inc. (1980).

[26] Christensen, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, John Wiley and Sons Inc. (1979).

[27] Hull, D., *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge University Press (1981).

Variational Principle of Hybrid Energy and the Fundamentals of 3-D Laminate Theory——A New Approach for the Analysis of Interlaminar Stresses in Composite Laminates

Huang Qian

(Concordia University, Montreal, Canada; Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

This paper discusses the discontinuity of stresses and strains at interlaminar surfaces of composite laminate and presents a 3-D laminate theory for composite materials. This paper also presents a new type of elastic energy based on the globally continuous variables in laminates, different from the traditional potential energy and complementary energy. Then, a variational principle corresponding to the 3-D laminate theory is developed. The theory and the principle could be a basis of verifying the 2-D laminate theory and determining the interlaminar stresses near the free edges.