

# 大尺度方柱上波浪力的解析解\*

黄 河 宁

(国家海洋局海洋环境保护研究所, 1986年11月10日收到)

## 摘 要

本文研究了用保角变换方法求解作用在大尺度矩形柱上的波浪力问题。发现只在方柱情况下, 变换后的控制方程仍近似为亥姆霍茨方程, 从而利用圆柱问题的解给出了作用在方柱上波浪力的解析解。

## 一、引 言

对于大尺度矩形柱体上的波浪力问题, 由于矩形截面角点的存在, 精确的理论解是不存在的<sup>[1]</sup>。一般需要借助于有限元<sup>[2]</sup>或布源法<sup>[3]</sup>求解。赵子丹等<sup>[1]</sup>通过保角变换, 将矩形外域变换成单位圆外域, 然后利用圆柱问题的理论解来解矩形柱问题。然而[1]并未对这种变换是否可行做出分析, 在给出的算例中, 也只计算了柱体上个别点的压力值。

本文研究了保角变换法, 发现只在方柱的场合, 变换后的控制方程仍近似为亥姆霍茨方程, 因而可以利用圆柱问题的解, 而对于一般的矩形柱, 变换后的方程成为复杂的非线性方程, 不能利用圆柱问题的解。

## 二、定解问题和区域变换

在理想流体和微幅波的假定下, 设柱体产生的散射波复速度势  $\phi^s$  为:

$$\phi^s(x, y, z, t) = \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \phi^s(x, y) \exp[-i\omega t] \quad (2.1)$$

式中  $k$ ,  $\omega$  分别为波数和圆频率,  $d$  为水深。

二维化后的散射势  $\phi^s(x, y)$  满足如下的控制方程和边界条件:

$$\nabla^2 \phi^s + k^2 \phi^s = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial n} = -\frac{\partial \phi^I}{\partial n} \quad (\text{柱面边界}) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial r} - ik\phi^s = 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad (2.4)$$

\* 钱伟长推荐。

式中  $\phi' = -i2^{-1}\omega^{-1}gH\exp[ikx]$ , 为二维化后的入射波速度势, 入射方向与  $x$  轴平行.

设矩形柱体截面边长为  $A$  和  $B$  (图1), 则由矩形截面外域变换到单位圆外域的关系为<sup>[1]</sup>:

$$z = R \left[ \xi + \frac{a + \bar{a}}{2\xi} + \frac{(a - \bar{a})^2}{24\xi^3} + \frac{(a^2 - \bar{a}^2)(a - \bar{a})}{80\xi^5} + \dots \right] \quad (2.5)$$

式中  $z = x + jy$ ,  $\xi = \xi + j\eta$ ,  $R$  为表征矩形大小的常数,  $a = \exp[2R\pi j]$ ,  $\bar{a} = \exp[-2R\pi j]$ ,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $l$  为与矩形的边长比有关的系数.  $l, R$  的确定详见文献[1].

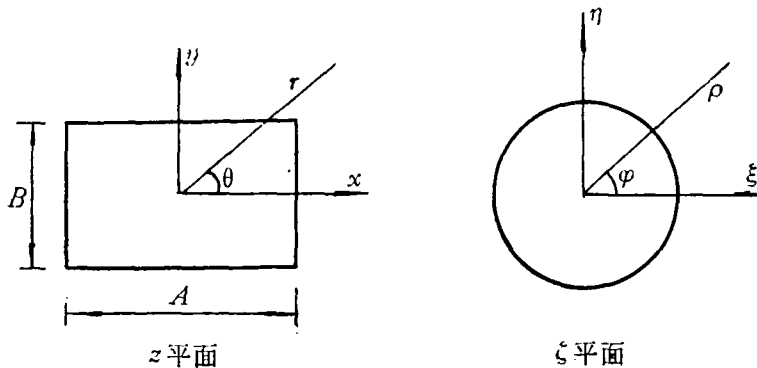


图1  $z$  平面到  $\xi$  平面的变换

根据保角变换的基本理论<sup>[4]</sup>, 在  $\xi$  平面, 方程(2.2)成为如下的形式:

$$\nabla^2 \phi^s + \frac{1}{|\partial\xi/\partial z|^2} k^2 \phi^s = 0 \quad (2.6)$$

由(2.5)略去  $o(\xi^{-3})$  以上的项可导出:

$$\frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{1}{R} \frac{\xi^2}{\xi^2 - c} \quad (2.7)$$

式中  $c = (a + \bar{a})/2$ .

由(2.7)可推导出:

$$\frac{1}{|\partial\xi/\partial z|^2} = R^2 \left( 1 - \frac{2c \cdot \cos 2\varphi}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^4} \right) \quad (2.8)$$

将(2.8)代入(2.6)后得:

$$\nabla^2 \phi^s + (kR)^2 \left( 1 - \frac{2c \cdot \cos 2\varphi}{\rho^2} + \frac{c}{\rho^4} \right) \phi^s = 0 \quad (2.9)$$

显然经过变换(2.5), 原来  $z$  平面的亥姆霍茨方程(2.2)变成了  $\xi$  平面上复杂的非线性方程(2.9). 因此, 这种变换对于求解一般的矩形柱体并不是有效的.

考虑方柱情况, 由文献[1], 这时  $l = 1/4$ ,  $a = \exp[2^{-1}\pi j]$ ,  $\bar{a} = \exp[-2^{-1}\pi j]$ , 则  $c = 0$ , 方程(2.9)成为:

$$\nabla^2 \phi^s + (kR)^2 \phi^s = 0 \quad (2.10)$$

相应的边界条件为:

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial n} = -\frac{\partial \phi^l}{\partial n} \quad (\rho=1) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \phi^s}{\partial \rho} - ikR \phi^s = 0 \quad (\rho \rightarrow \infty) \quad (2.12)$$

方程(2.10)~(2.12), 在 $\zeta$ 平面定义了一个散射势问题, 波数为无量纲形式 $kR$ , 入射波 $\phi^l = -i2^{-1}\omega^{-1}gH \exp[ikR\xi]$ .

因此, 对于方柱问题, 变换关系(2.5)将 $z$ 平面上求解方形外域的亥姆霍茨方程边值问题, 转换成在 $\zeta$ 平面上求解圆形外域的亥姆霍茨方程边值问题, 而(2.10)~(2.12)的解是很容易求出的.

### 三、方柱问题的解

在 $\zeta$ 平面, (2.10)~(2.12)的解为:

$$\phi^s = -i \frac{gH}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta_n) \frac{J'_n(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} H_n^{(1)'}(kR\rho) \cos n\varphi \quad (3.1)$$

式中 $\beta_0=1$ ,  $\beta_n=2i^n$ ,  $n \geq 1$ .

流场中某点总的波浪动水压力为:

$$p = -\rho' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = i\omega\rho' \frac{\text{ch}k(z+d)}{\text{ch}kd} (\phi^l + \phi^s) \exp[-i\omega t] \quad (3.2)$$

式中 $\rho'$ 为流体密度.

作用在柱体上 $x$ 方向的波浪力由下式求出:

$$F_x = \int_{-a}^0 \left\{ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p \Big|_{x=\frac{A}{2}} dy - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p \Big|_{x=-\frac{A}{2}} dy \right\} dz \exp[-i\omega t] \quad (3.3)$$

将 $\phi^l$ 和 $\phi^s$ 的表达式代入(3.2), 注意到 $\rho=1$ 对应于柱体边界. 然后将(3.2)代入(3.3), 积分后得到波浪入射方向与 $x$ 轴平行时作用在方柱上的波浪力为:

$$F_x = \frac{1}{2} \rho' g H A B \frac{\text{th}kd}{Ak} \left\{ 2i \sin \frac{kA}{2} + 2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^N -2i^n \frac{J'_n(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} \cdot H_n^{(1)}(kR) \cos n\varphi \right\} \exp[-i\omega t] \quad (3.4)$$

式中 $\cos n\varphi (n=1, 3, 5, \dots, N)$ , 可利用如下的公式化为 $\cos\varphi$ 的函数:

$$\left. \begin{aligned} \cos 3\varphi &= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi \\ \cos 5\varphi &= 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi \\ \cos 7\varphi &= 64\cos^7\varphi - 112\cos^5\varphi + 56\cos^3\varphi - 7\cos\varphi \\ \cos 9\varphi &= 256\cos^9\varphi - 576\cos^7\varphi + 432\cos^5\varphi - 120\cos^3\varphi + 9\cos\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

由(2.5)可以得到如下的公式:

$$x = R(\rho \cos \varphi + \cos 2l\pi\rho^{-1} \cos \varphi - \frac{1}{6} \sin^2 2l\pi\rho^{-3} \cos 3\varphi + \dots) \quad (3.6)$$

$$y = R\left(\rho \sin \varphi - \cos 2l\pi\rho^{-1} \sin \varphi + \frac{1}{6} \sin^2 2l\pi\rho^{-3} \sin 3\varphi + \dots\right) \quad (3.7)$$

在(3.6)式中, 令  $x = A/2$ ,  $\rho = 1$ , 并利用(3.5)式, 则  $\cos \varphi$  可以由(3.6)式解出. 等效惯性力系数定义为:

$$C_n^* = \frac{F_{\max}}{2^{-1} \rho' g H A B \text{th} k d} \quad (3.8)$$

如果波浪入射方向与  $x$  轴夹角为  $\gamma$ , 则入射势为:

$$\phi^I = -i \frac{gH}{2\omega} \exp[\lambda k(x \cos \gamma + y \sin \gamma)] \quad (3.9)$$

在  $\zeta$  平面散射势的解为:

$$\begin{aligned} \phi^S &= -i \frac{gH}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta_n) \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} H_n^{(1)}(kR\rho) \cos n(\varphi - \gamma) \\ &= -i \frac{gH}{2\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta_n) \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} H_n^{(1)}(kR\rho) [\cos n\varphi \cdot \cos n\gamma + \sin n\varphi \cdot \sin n\gamma] \end{aligned} \quad (3.10)$$

由(3.9), (3.10), (3.3)可以得出  $x$  方向波浪力为:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} \rho' g H A B \text{th} k d \left\{ \frac{4i}{A B k^2 \sin \gamma} \sin\left(\frac{A}{2} k \cos \gamma\right) \sin\left(\frac{B}{2} k \sin \gamma\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{A k} \sum_{n=1,3,5,\dots}^N (-2i^n) \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} H_n^{(1)}(kR) \cdot \cos n\gamma \cos n\varphi \right\} \exp[-i\omega t] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$y$  方向波浪力计算公式为:

$$F_y = \int_{-d}^0 \left\{ \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} p \Big|_{y=\frac{B}{2}} dx - \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} p \Big|_{y=-\frac{B}{2}} dx \right\} dz \exp[-i\omega t] \quad (3.12)$$

则  $y$  方向的波浪力为:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{1}{2} \rho' g H A B \text{th} k d \left\{ \frac{4i}{A B k^2 \cos \gamma} \sin\left(\frac{A}{2} k \cos \gamma\right) \sin\left(\frac{B}{2} k \sin \gamma\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{B k} \sum_{n=1,3,5,\dots}^N (-2i^n) \frac{J_n'(kR)}{H_n^{(1)'}(kR)} H_n^{(1)}(kR) \sin n\gamma \cdot \sin n\varphi \right\} \exp[-i\omega t] \end{aligned} \quad (3.13)$$

式中  $\sin n\varphi$  ( $n=1, 3, 5, \dots, N$ ) 利用以下公式化为  $\sin \varphi$  的函数:

$$\left. \begin{aligned}
 \sin 3\varphi &= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \\
 \sin 5\varphi &= 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi \\
 \sin 7\varphi &= 7\sin\varphi - 56\sin^3\varphi + 112\sin^5\varphi - 64\sin^7\varphi \\
 \sin 9\varphi &= 9\sin\varphi - 120\sin^3\varphi + 432\sin^5\varphi - 576\sin^7\varphi + 256\sin^9\varphi \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} (3.14)$$

在(3.7)式中, 令  $y=B/2$ ,  $\rho=1$ , 并利用(3.14)式, 则  $\sin\phi$  可以由(3.7)式解出。当  $\gamma=\pi/2$  时, (3.13)式括号中的第一项由下式代替:

$$\frac{2i}{Bk} \sin \frac{kB}{2}$$

#### 四、计算结果

应用本文给出的公式, 计算了大尺度方柱的等效惯性力系数  $C_m^*$ , 并与 Isaacson<sup>[3]</sup>采用布源法的结果以及 Mogridge 等<sup>[5]</sup>的实验值进行了比较(图2)。当  $\gamma=0^\circ$  时, 解析解与数值解稍有差别, 当  $\gamma=45^\circ$ ,  $kA \geq 1.0$  时, 解析解与数值解相当吻合。

计算中发现, 式(3.4), (3.1), (3.13)中的级数收敛很快, 取  $N=5$  与  $N=7$ , 计算结果最大相对误差小于 0.002。

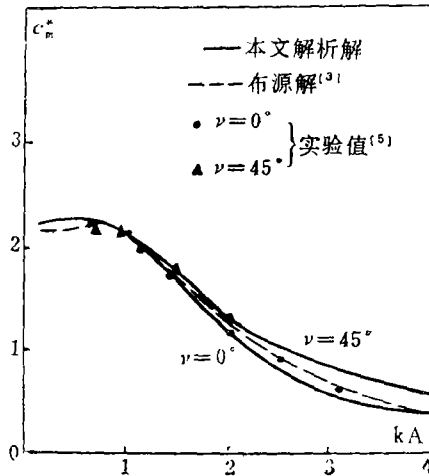


图2. 方柱的等效惯性力系数  $C_m^*$

#### 参 考 文 献

- [1] 赵子丹、陆君良, 微幅波对矩形垂直墩柱的作用, 海洋学报, 2, 3 (1980), 137—152.
- [2] Shamkar, N.J., T. Balendra and C.E. Soon, Wave forces on large vertical cylinders of square and rectangular sections, *The Institution of Engineers, Australia* (1982), 36—43.
- [3] Isaacson, M., de St. Q., Wave forces on large square cylinders, *Mechanics of Wave-Induced Forces on Cylinders*, ed. T.L. Shaw Pitman, London (1979), 609—622.

- [ 4 ] 梁昆淼, 《数学物理方法》, 人民教育出版社 (1979), 441—446.
- [ 5 ] Mogridge, G.R. and W.W. Tamieson, Wave forces on square caissons, *Proc. 15th Coastal Eng. Conf., Honolulu*, 3 (1976), 2271—2289.

## An Analytical Solution of Wave Forces on Large Square Cylinder

Huang He-ning

*(Institute of Marine Environmental Protection State Oceanic  
Administration, Dalian)*

### Abstract

Wave forces on large square cylinder are determined by using the conformal transformation method. It is found that only for square cylinder, the governing equation is still the Helmholtz equation after the conformal transformation. An analytical solution of wave forces on square cylinder is presented by using the solution of wave forces on a circular cylinder.