应用数学和力学，第9卷第6期（1988年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 非牛顿幂律流体球向不定常渗流

刘慈群

（中国科学院渗流力学研究室，1987年2月23日收到）

**摘要**

本文研究了弱压缩非牛顿幂律流体球向不定常渗流，导出了抛物型偏微分非线性方程．球向扩散方程是其特殊情况．用Laplace变换的方法，找到了线性化后方程的解析解和渐近解．用影响半径的概念和平均值方法求得了近似解．渐近解和近似解的结构是相似的，从而丰富了非牛顿流体一维不定常渗流的理论．

## 一、前言

1966年，Charas[1]研究了牛顿流体球向不定常渗流，用给出的压力公式可以分析、计算射孔孔眼试井资料．1979年，Oden和Yang[2],Ikoku和Ramey[3]研究了非牛顿幂律流体径向不定常渗流，导出了基本偏微分方程和线性化后的数值反演解和渐近解，从而可以设计、计算将非牛顿流体径向注入地层中的方案．本文在上述工作的基础上，研究了非牛顿幂律流体球向不定常渗流；给出了球向不定常渗流偏微分方程及其线性化后的解析解、渐近解以及近似解．从而丰富、发展了非牛顿幂律流体一维不定常渗流的理论．

## 二、球向不定常渗流方程

根据质量守恒原理，弱压缩流体球向不定常渗流连续性方程可写成

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\cdot v_r)=\phi c\frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.1}$$

式中：$r$为球向坐标；$v_r$为球向渗流速度；$\phi$为孔隙度；$c$为综合压缩系数；$t$为时间坐标；$p$为压力．

非牛顿幂律流体在孔隙介质中运动方程[2,3]

$$v_r^n=-\frac{k}{\mu_e}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{2.2}$$

式中：$k$为渗透率；$\mu_e$为非牛顿流体有效粘度；$n$为流态指数（幂律参数）．

当$n=1$时，式（2.2）简化为牛顿流体渗流的达西定律．当$n<1$时，流体为假塑性流体．当$n>1$时，流体为剪切增稠流体．

将式（2.2）代入式（2.1），经过微分运算，略去压力梯度的平方项；得弱压缩非牛顿幂律流体不定常球向渗流非线性偏微分方程

$$\frac{1}{r^{2n}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2n}\frac{\partial p}{\partial r}\right)=n\cdot c\cdot\phi\left(\frac{\mu_e}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\left(-\frac{\partial p}{\partial r}\right)^{\frac{n-1}{n}}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.3}$$

当$n=1$时，式（2.3）简化为球向热传导线性方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial p}{\partial r}\right)=c\phi\frac{\mu_e}{k}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.4}$$

在半无限介质空间，流向半径为$r_W$的球面井的恒定产量为$Q_0$。将式（2.3）右端压力梯度线性化。即

$$-\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\mu_e}{k}v_r^n\approx\frac{\mu_e}{k}\left(\frac{Q_0}{2\pi r^2}\right)^n \tag{2.5}$$

将式(2.5)代入式(2.3)得，线性化的非牛顿幂律流体球向不定常渗流无量纲方程

$$\frac{1}{r_D^{2n}}\frac{\partial}{\partial r_D}\left(r_D^{2n}\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)=r_D^{2(1-n)}\cdot\frac{\partial p_D}{\partial t_D} \tag{2.6}$$

式中：
$$p_D=\left(\frac{2\pi r_W^2}{Q_0}\right)^n\frac{k}{\mu_e}\frac{p-p_0}{r_W},\quad t_D=\frac{t}{G\cdot r_W^{4-2n}}$$

$$G=nc\phi\frac{\mu_e}{k}\left(\frac{Q_0}{2\pi}\right)^{n-1}r_W^{4-2n},\quad r_D=\frac{r}{r_W}$$

$p_0$为初始流体压力。

相应定产边值条件为

$$p_D(r_D,\ 0)=0 \tag{2.7}$$

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_{r_D=1}=-1 \tag{2.8}$$

$$p_D(\infty,\ t_D)=0 \tag{2.9}$$

## 三、解析解和渐近解

考虑初始条件（2.7），偏微分方程（2.6）和边界条件（2.8）、（2.9）的Laplace变换为

$$\frac{1}{r_D^{2n}}\frac{d}{dr_D}\left(r_D^{2n}\frac{d\bar{p}_D}{dr_D}\right)=s\cdot r_D^{2(1-n)}\bar{p}_D \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{d\bar{p}_D}{dr_D}\right)_{r_D=1}=-\frac{1}{s} \tag{3.2}$$

$$\bar{p}_D(\infty,\ s)=0 \tag{3.3}$$

式中

$$\bar{p}_D(r_D,\ s)=\int_0^{\infty}p_D(r_D,\ t_D)\cdot\exp[-st_D]\cdot dt_D$$

根据二阶常微分方程的解题方法，式（3.1）～（3.3）的解为

$$\bar{p}_D(r_D,s)=\frac{r_D^{\frac{1-2n}{2}}\cdot \mathrm{K}_{\frac{1-2n}{4-2n}}\left(\frac{\sqrt{s}}{2-n}r_D^{\frac{2-n}{2}}\right)}{s^{\frac{3}{2}}\cdot \mathrm{K}_{\frac{3}{4-2n}}\left(\frac{\sqrt{s}}{2-n}\right)}\qquad\left(n<\frac{1}{2}\right)\tag{3.4}$$

式中：$\mathrm{K}_\nu(\cdot)$为$\nu$阶修正第二类贝塞尔函数。

球形井中压力影象函数($r_D=1$)

$$\bar{p}_{WD}(s)=\bar{p}_D(1,s)=\frac{\mathrm{K}_{\frac{1-2n}{4-2n}}\left(\frac{\sqrt{s}}{2-n}\right)}{s^{\frac{3}{2}}\cdot \mathrm{K}_{\frac{3}{4-2n}}\left(\frac{\sqrt{s}}{2-n}\right)}\tag{3.5}$$

当$n=1/2$时，式（3.5）简化为类径向流的情形

$$\bar{p}_{WD}(s)=\frac{\mathrm{K}_0(2\sqrt{s}/3)}{s^{\frac{3}{2}}\cdot \mathrm{K}_1(2\sqrt{s}/3)}\tag{3.6}$$

当$n=1$时，式（3.5）简化为牛顿流的情形

$$\bar{p}_{WD}(s)=\frac{\mathrm{K}_{\frac{1}{2}}(\sqrt{s})}{s^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{K}_{\frac{3}{2}}(\sqrt{s})}\tag{3.7}$$

根据Reiman-Mellin的反演公式

$$p_{WD}(t_D)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\bar{p}_{WD}(s)\cdot\exp[-st_D]\cdot ds\tag{3.8}$$

式中：$\gamma$为实数，直线$s=\gamma$在被积函数$\bar{p}_{WD}$的奇点的右边。只有奇点$s=0$，利用等效路线消去奇点的办法，积分上式得球形井中压力变化的解析公式

$$p_{WD}(t_D)=\frac{4-2n}{\pi^2}\int_0^\infty\frac{1-\exp[-ut_D]}{u^2}\,\frac{du}{J^2_{\frac{3}{4-2n}}\left(\frac{\sqrt{u}}{2-n}\right)+Y^2_{\frac{3}{4-2n}}\left(\frac{\sqrt{u}}{2-n}\right)}\tag{3.9}$$

式中：$J_\nu(\cdot)$，$Y_\nu(\cdot)$为$\nu$阶第一类和第二类贝塞尔函数。

现在求时间$t_D$较大时的渐近解。当$s\to 0$时，

$$\mathrm{K}_\nu(s)\approx\frac{2^{\nu-1}\cdot\Gamma(\nu)}{s^\nu}\tag{3.10}$$

式（3.5）简化为

$$\bar{p}_{WD}(s)\approx\frac{(4-2n)^{2\nu-1}\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\frac{2}{4-2n}\right)\cdot s^{1+\nu}}-\frac{1}{(1-2n)}\cdot\frac{1}{s}\tag{3.11}$$

式中：$\Gamma(\cdot)$为$\Gamma$函数；$\nu=(1-2n)/(4-2n)$。

查Laplace反演表，从式（3.11）反演得渐近解

$$p_{WD}(t_D)=\frac{(4-2n)^{2\nu}}{1-2n}\,\frac{t_D^\nu}{\Gamma\left(\frac{2}{4-2n}\right)}-\frac{1}{1-2n}\tag{3.12}$$

## 四、近 似 解

本节根据"影响(球)半径"的概念和平均质量守恒方程求问题(2.6)～(2.9)的近似解。

当球形井以定流量工作时，经过时间$t_D$压力扰动传播到$R(t_D)$，即在影响半径$R(t_D)$处满足下述条件

$$p_D(R,\ t_D)=\frac{\partial p_D}{\partial r_D}(R,\ t_D)=0 \tag{2.9$'$}$$

对方程(2.6)从1到$R(t_D)$作加权面积积分，考虑到内、外边界条件(2.8)、(2.9)′，得平均化了的质量守恒方程

$$\frac{du}{dt_D}=1 \tag{4.1}$$

式中：

$$u(t_D)=\int_1^{R(t_D)} p_D(r_D,t_D)\cdot r_D^2 dr_D \tag{4.2}$$

考虑到初始条件(2.7)，常微分方程(4.1)的解

$$u(t_D)=t_D \tag{4.3}$$

满足内、外边界条件(2.8)、(2.9)′的无因次压力函数可写成

$$p_D(r_D,t_D)=\frac{1}{1-2n}(R^{1-2n}-r_D^{1-2n})-\frac{1}{3-2n}\left(R^{1-2n}-\frac{r_D^{3-2n}}{R^2}\right) \tag{4.4}$$

式(4.4)可理解为瞬时状态稳定解，即式(4.4)是下述常微分方程(4.5)

$$\frac{1}{r_D^{2n}}\frac{d}{dr_D}\left(r_D^{2n}\frac{dp_D}{dr_D}\right)=0 \tag{4.5}$$

的解。

将式(4.4)代入式(4.2)、(4.3)得影响半径与时间的关系式

$$R^{4-2n}=6(2-n)(3-n)\cdot t_D+1 \tag{4.6}$$

式(4.4)和式(4.6)组成了非牛顿幂律流体球向不定常渗流的近似解。

当$n=1/2$时，上式简化为径向流的情况

$$p_D=\ln\frac{R}{r_D}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_D^2}{R^2}\right) \tag{4.4$'$}$$

$$R^3=\frac{45}{2}t_D+1 \tag{4.6$'$}$$

当$n=1$时，式(4.4)和式(4.6)简化为牛顿流的情况

$$p_D=\frac{1}{r_D}-\frac{2}{R}+\frac{r_D}{R^2} \tag{4.4$''$}$$

$$R^2=12t_D+1 \tag{4.6$''$}$$

比较式(3.12)和式(4.4)、(4.6)可知：他们公式的结构是相似的；即当$n<1/2$时，

$p_{wD} \sim t_D^{\frac{1-3n}{4-2n}}$；当$n>1/2$，$t_D \gg 1$时，$p_{wD} \sim 1/(2n-1)$。

## 五、小　结

1. 本文求得了非牛顿幂律流体球向不定常渗流的解析解 (3.9)、渐近解 (3.12) 以及近似解 (4.4) 和 (4.6)。

2. 渐近解和近似解的结构是相似的，这说明公式是可信的。

3. 所得结果可以推广应用到地下水渗流、热传导、扩散等工程问题中，如果他们的运动规律也符合幂律定律。从而丰富了非牛顿流体一维不定常渗流的理论。

### 参 考 文 献


[1] Charas, A. T., Unsteady spherical flow in petroleum reservoirs, *Soc. Pet. Eng. J.*, June (1966), 103—114.

[2] Oden, A. S. and H. T. Yang, Flow of non-Newtonian power-law fluids through porous media, *Soc. Pet. Eng. J.*, June (1979), 155—163.

[3] Ikoku, C. U. and H. J. Ramey, Transient flow of non-Newtonian power-law fluids in porous media, ibid, 164—174.


# Transient Spherical Flow of Non-Newtonian Power-Law Fluids in Porous Media


Liu Ci-qun

(*Research Division of Mechanics of Flow Through Porous Media, Academia Sinica*)



### Abstract

The transient spherical flow behavior of slightly compressible, non-Newtonian, power-law fluids in porous media is studied. A nonlinear partial differential equation of parabolic type is derived. The diffusivity equation for spherical flow is a special case of the new equation. We obtained analytical, asymptotic and approximate solutions by using the methods of Laplace transform and weighted mass conservation. The structures of asymptotic and approximate solutions are similar, which enriches the theory of one-dimensional flow of non-Newtonian fluids through porous media.