应用数学和力学，第9卷第6期（1988年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类超前型微分差分方程的有界解及其渐近性质*

林宜中

（福建师范大学数学系，1987年2月20日收到）

摘　要

本文考虑具有扰动项的超前型微分差分方程，证明了当退化方程具有负指数阶的有界解且扰动项满足一定条件时，扰动方程也具有负指数阶的有界解．

一、引　言

长期以来对微分差分方程的研究，主要是集中于滞后型和中立型，而对超前型方程的探讨，迄今为止仅见到为数不多的结果[1]~[6]．出现这种状况的原因，主要是实际应用背景的推动力不同．现在情况有所改变，用超前型方程作为数学模型的尝试正在引起人们的注意．

如果象滞后型或中立型方程那样，初值给在初始集上，一般地讲超前型方程解存在的区间是很短的，而且在通常意义下零解总是不稳定的．[1]～[4]改用在初始条件$x(t_0)=\xi$之下，考虑方程在$(t_0,+\infty)$上为有界的解的初值问题的提法来克服上述困难．这种提法是取$(t_0,+\infty)\to\mathbf{R}^N$的一切有界连续函数，以上确界范数构成的Banach空间M作为解的状态空间，以代替滞后型方程的状态空间$C([-r,0];\mathbf{R}^N)$．由于状态空间取法的不同，因而在理论上与记号上也有着很大的差别．文[2]等在方程满足一定条件的情况下得到了有界解的存在性与唯一性．然而就最简单的线性方程

$$\dot{x}(t)=\sum_{i=0}^{p}A_i(t)x(t+r_i)\qquad(0=r_0<r_1<\cdots<r_p)\tag{1.1}$$

而言，按他们的条件总是要求

$$\int^{\infty}|A_i(\tau)|d\tau<+\infty$$

可是常系数方程就不满足这条件．本文的作者试图从另一途径寻找存在有界解的条件．由文[8]可得出线性常系数方程存在有界解的条件，当$\lim\limits_{t\to+\infty}A_i(t)$存在时记$A_i(t)=A_{i0}+A_{i1}(t)$ $(i=0,1,\cdots,p)$，可得出在A_{i0}与$A_{i1}(t)$分别满足一定条件时，对任意$s\geqslant0$及$\xi\in\mathbf{R}^N$，方程

* 林宗池推荐．

(1.1) 在 $[s,+\infty)$ 上存在满足初始条件 $x(s)=\xi$ 唯一的有界解 $x(t;\ s,\xi)$ 且 $|x(t;\ s,\ \xi)|\leqslant m_1|\xi|\exp[-\delta(t-s)]$，$\delta>0$、$t\geqslant s$。其中$A_{i0}$是$N\times N$常数矩阵，$A_{i1}(t)$ 是 $t\in[0,+\infty)$ 上的$N\times N$函数矩阵。本文在线性方程（1.1）具有这性质的解的前提下，分别就上述两种情况讨论具有扰动项的方程

$$\dot{y}(t)=\sum_{i=0}^{p}A_i(t)y(t+r_i)+f(t,y(t),y(t+r_1),\cdots,y(t+r_p)) \tag{1.2}$$

满足初始条件

$$y(t_0)=\xi\in\mathbf{R}^N \qquad (t_0\geqslant 0) \tag{1.3}$$

在$[t_0,+\infty)$上有界解的存在性、唯一性，其中

$$f:\ \mathbf{R}_+\times G\to\mathbf{R}^N,\ G=\{(y_0,y_1,\ \cdots,\ y_p):\ (y_0,\ \cdots,\ y_p)\in\mathbf{R}^{N(p+1)},\ |y_i|\leqslant c_1\}$$

本文中以$|\cdot|$表示$\mathbf{R}^N$中的范数，$\|\cdot\|$表示一般的Banach空间中的范数，对$\varphi(\cdot)\in M$记

$$\|\varphi(\cdot)\|_\infty=\sup_{t_0\leqslant\theta<+\infty}|\varphi(\theta)|,\ \|A\|=\sup_{t_0\leqslant\theta<+\infty}\sum_{i=1}^{p}|A_i(\theta)|$$

二、$\int^\infty|A_i(\tau)|d\tau<+\infty$的情况

在这种情况下[2]～[4]已得到方程（1.1）有界解的存在性，对扰动方程（1.2）有：

定理2.1 假设

i） 线性方程（1.1）对任意$\xi\in\mathbf{R}^N$及$s\geqslant0$存在满足$x(s)=\xi$在$[s,+\infty)$上唯一的有界解$x(t;\ s,\xi)$并有$|x(t;\ s,\xi)|\leqslant m_1|\xi|\exp[-\delta(t-s)]$，$\delta>0$，$t\geqslant s$；

ii） 在$\mathbf{R}_+\times G$上f连续，对$\varphi(\cdot)\in G_1=\{\varphi(\cdot):\varphi(\cdot)\in M,\ \|\varphi(\cdot)\|_\infty\leqslant c_1\}$有

$$|f(t,\varphi(t),\varphi(t+r_1),\ \cdots,\ \varphi(t+r_p))|\leqslant m_2\exp[-\lambda t] \qquad (t\geqslant0,\ \lambda>0) \tag{2.1}$$

则存在实数$\mu>0$与$t_1^*\geqslant0$使得当$|\xi|\leqslant\mu$，$t_0\geqslant t_1^*$时方程（1.2）在$[t_0,+\infty)$上存在满足初始条件（1.3）的有界解$y=\varphi(t)$，且当$t\to+\infty$时有$\varphi(t)=O(\exp[-\lambda_1 t])$，$0<\lambda_1<\min\{\delta,\lambda\}$。

定理2.2 如果线性方程（1.1）满足定理2.1的条件i)，方程（1.2）的扰动项f有(2.1)式成立，并有

$$|f(t,y_0,\ \cdots,\ y_p)-f(t,\tilde{y}_0,\ \cdots,\ \tilde{y}_p)|\leqslant\psi(t,|y_0-\tilde{y}_0|,\ \cdots,\ |y_p-\tilde{y}_p|) \tag{2.2}$$

其中$\psi(t,\alpha_0,\ \cdots,\ \alpha_p)$关于$t$是连续非增的且对任一$\zeta\geqslant0$有

$$\lim_{t\to+\infty}\psi(t,\underbrace{\zeta,\ \cdots,\zeta}_{p+1})=0 \tag{2.3}$$

关于α_i（$i=0$，$\cdots$，p）是连续非减的，则存在 $t_2^*\geqslant0$ 使得对 $t_0\geqslant t_2^*$ 方程（1.2）与（1.3）至多具有一个有界解。

定理2.3 如果满足定理2.1的假设条件并有（2.2）、（2.3）式成立，则方程（1.2）的有界解连续依赖于初值。

为了证明上述定理要用到几个引理

引理2.1 如果线性方程（1.1）满足定理2.1的条件 i ），则存在一 $\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^N$ 的发展系统$U(t,s)$ $0\leqslant s\leqslant t<+\infty$有：

$$\|U(t,s)\|\leqslant m_1\exp[-\delta(t-s)] \qquad (0\leqslant s\leqslant t<+\infty) \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=\sum_{i=0}^{p}A_i(t)U(t+r_i,s) \tag{2.5}$$

证明 对任意$\xi\in\mathbf{R}^N$及$0\leqslant s\leqslant t<+\infty$由

$U(t,s)\xi=x(t;\ s,\ \xi)$

确定$U(t,s)$：$\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^N$，显然地$U(t,s)$是$\mathbf{R}^N$上的线性算子，并由

$$\exp[\delta(t-s)]\|U(t,s)\|=\exp[\delta(t-s)]\sup_{|\xi|=1}|U(t,s)\xi|=\exp[\delta(t-s)]$$

$$\cdot\sup_{|\xi|=1}|x(t;\ s,\ \xi)|\leqslant\exp[\delta(t-s)]\sup_{|\xi|=1}m_1|\xi|\exp[-\delta(t-s)]=m_1$$

证得$U(t,s)$是$\mathbf{R}^N$上的有界算子且（2.4）式成立，显然地$U(t,s)$　$0\leqslant s\leqslant t<+\infty$是$\mathbf{R}^N$上的发展系统，对任一$\xi\in\mathbf{R}^N$有

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)\xi=\frac{\partial}{\partial t}x(t;s,\xi)=\dot{x}(t;s,\xi)=\sum_{i=0}^{p}A_i(t)x(t+r_i;s,\xi)$$

$$=\sum_{i=0}^{p}A_i(t)U(t+r_i,s)\xi$$

即（2.5）式成立．证毕．

引理2.2 结果满足定理2.1的条件 i ）且扰动项f有(2.1)式成立，则对任一$\varphi(\cdot)\in G_1$，对

$$\begin{aligned}g(t,\varphi(t))=&f(t,\varphi(t),\ \cdots,\ \varphi(t+r_p))+\sum_{i=1}^{p}A_i(t)\int_{t_0}^{t_0+r_i}U(t+r_i,t+\sigma_1-t_0)f(t+\sigma_1-t_0,\\&\varphi(t+\sigma_1-t_0),\ \cdots,\ \varphi(t+\sigma_1-t_0+r_p))d\sigma_1+\sum_{i=1}^{p}A_i(t)\int_{t_0}^{t_0+r_i}U(t+r_i,r+\sigma_1-t_0)\\&\cdot\sum_{i=1}^{p}A_i(t+\sigma_1-t_0)\,d\sigma_1\int_{t_0}^{t_0+r_i}U(t+\sigma_1-t_0+r_i,t+\sigma_1+\sigma_2-2t_0)f(t+\sigma_1+\sigma_2-2t_0,\\&\varphi(t+\sigma_1+\sigma_2-2t_0),\cdots,\varphi(t+\sigma_1+\sigma_2-2t_0+r_p))d\sigma_2+\sum_{i=1}^{p}A_i(t)\int_{t_0}^{t_0+r_i}U(t+r_i,\\&t+\sigma_1-t_0)\sum_{i=1}^{p}A_i(t+\sigma_1-t_0)d\sigma_1\int_{t_0}^{t_0+r_i}U(t+\sigma_1-t_0+r_i,t+\sigma_1+\sigma_2-2t_0)\\&\cdot\sum_{i=1}^{p}A_i(t+\sigma_1+\sigma_2-2t_0)d\sigma_2\int_{t_0}^{t_0+r_i}U(t+\sigma_1+\sigma_2-2t_0+r_i,t+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-3t_0)\\&\cdot f(t+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-3t_0,\varphi(t+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-3t_0),\ \cdots,\ \varphi(t+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-3t_0\\&+r_p))d\sigma_3+\cdots\end{aligned} \tag{2.6}$$

存在$t^*\geqslant0$．使得对$t_0\geqslant t^*$在$[t_0,+\infty)$上(2.6)式右端的级数一致收敛，$g(t,\varphi(t))$是t的连续函数．

证明 由

$$\int^{\infty} |A_i(\tau)|d\tau < +\infty$$

故存在$t^* \geqslant 0$使得对$t_0 \geqslant t^*$有

$$\|A\| = \sup_{t_0 \leqslant \theta < +\infty} \sum_{i=1}^{p} |A_i(\theta)| < \min\left\{ \frac{2\sqrt{\delta\lambda}}{m_1},\ \frac{\delta}{m_1} \right\}$$

由(2.1)、(2.4)式通过Hölder不等式可算出(2.6)式右端的第n项对$t_0 \geqslant t^*$有

$$\Big| \sum_{i=1}^{p} A_i(t) \int_{t_0}^{t_0+r_i} U(t+r_i, t+\sigma_1-t_0) \sum_{i=1}^{p} A_i(t+\sigma_1-t_0)d\sigma_1 \int_{t_0}^{t_0+r_i} \cdots$$

$$\int_{t_0}^{t_0+r_i} U(t+\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}-(n-1)t_0+r_i,\ t+\sigma_1+\cdots+\sigma_n-nt_0)$$

$$\cdot f(t+\sigma_1+\cdots+\sigma_n-nt_0, \varphi(t+\sigma_1+\cdots+\sigma_n-nt_0),\ \cdots,$$

$$\varphi(t+\sigma_1+\cdots+\sigma_n-nt_0+r_p))d\sigma_n \Big|$$

$$\leqslant m_2 \exp[-\lambda t]\left(\frac{m_1\|A\|}{2\sqrt{\lambda\delta}}\right)^n \qquad (n=1,2,\cdots;\ t \geqslant t_0 \geqslant t^*)$$

从而(2.6)式右端的级数在$[t_0, +\infty)$上一致收敛，$g(t, \varphi(t))$连续并有

$$|g(t,\varphi(t))| \leqslant \frac{m_2 2\sqrt{\lambda\delta}}{2\sqrt{\lambda\delta} - m_1\|A\|} \exp[-\lambda t] \qquad (t \geqslant t_0 \geqslant t^*) \tag{2.7}$$

证毕。

引理2.3 如果满足引理2.2的条件，则对$t_0 \geqslant t^*$扰动方程(1.2)与(1.3)在$[t_0, +\infty)$上的有界解等价于积分方程

$$\varphi(t) = U(t,t_0)\xi + \int_{t_0}^{t} U(t,\sigma) g(\sigma, \varphi(\sigma)) d\sigma \tag{2.8}$$

在$[t_0, +\infty)$上的有界解。

证明 设$\varphi(t)$是方程(2.8)在$[t_0, +\infty)$上的有界解，由(2.6)式及f的定义应有$\varphi(\cdot) \in G_1$，由引理2.2知$g(\sigma, \varphi(\sigma))$在$[t_0, +\infty)$上连续有

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0)\xi + U(t,t) g(t,\varphi(t)) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} U(t,\sigma) g(\sigma,\varphi(\sigma)) d\sigma$$

由(2.5)、(2.6)、(2.8)式可得出$\varphi(t)$是扰动方程(1.2)适合(1.3)在$[t_0, +\infty)$上的有界解。

反之，设$\varphi(t)$是初值问题(1.2)与(1.3)在$[t_0, +\infty)$上的有界解，由f的定义应有$\varphi(\cdot) \in G_1$，故可通过(2.6)式作出$g(t, \varphi(t))$，考虑

$$\omega(t) = \varphi(t) - \int_{t_0}^{t} U(t,\sigma) g(\sigma, \varphi(\sigma)) d\sigma$$

由(2.4)、(2.8)两式有$\|\omega(\cdot)\|_\infty < +\infty$，且$\omega(t)$是线性方程(1.1)适合初始条件(1.3)在$[t_0, +\infty)$上的有界解，由有界解的唯一性有$\omega(t) = x(t; t_0, \xi) = U(t, t_0)\xi$故有

$$\varphi(t) = U(t,t_0)\xi + \int_{t_0}^{t} U(t,\sigma) g(\sigma, \varphi(\sigma)) d\sigma$$

证毕。

定理2.1的证明　对每一$\varphi(\cdot)\in G_1$，由引理2.2知可通过(2.6)式作出$[t_0,+\infty)$上的连续函数$g(t,\varphi(t))$，考虑M中的凸闭子集G_1及定义在其上的积分算子

$$(T\varphi)(t)=U(t,t_0)\xi+\int_{t_0}^{t}U(t,\sigma)g(\sigma,\varphi(\sigma))d\sigma \qquad (\varphi(\cdot)\in G_1)$$

有

$$|(T\varphi)(t)|\leqslant m_1|\xi|+\frac{m_1m_2\exp[-\lambda t_0]}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|} \qquad (t\geqslant t_0)$$

取$\bar{t}^*\geqslant 0$使得

$$\frac{m_2\exp[-\lambda\bar{t}^*]}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}<\frac{c_1}{m_1}$$

当$t_0\geqslant t_1^*=\max\{t^*,\bar{t}^*\}$时记

$$\mu=\frac{c_1}{m_1}-\frac{m_2\exp[-\lambda t_0]}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}>0$$

则当$|\xi|\leqslant\mu$时由(2.1)与(2.7)式可以证明T是将G_1映入它自身的全连续算子，由Schauder不动点原理知至少存在一点$\varphi(\cdot)\in G_1$，有$(T\varphi)(\cdot)=\varphi(\cdot)$，则$y=\varphi(t)$即为扰动方程(1.2)适合(1.3)在$[t_0,+\infty)$上的有界解。

对$0<\lambda_1<\min\{\delta,\lambda\}$由(2.8)与(2.7)式可算出：

$$|\exp[\lambda_1 t]\varphi(t)|\leqslant m_1\exp[\delta t_0]|\xi|\exp[-(\delta-\lambda_1)t]+\chi(t)$$

其中

$$\chi(t)=\begin{cases}\dfrac{m_1m_2}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}\,\dfrac{2\sqrt{\lambda\delta}}{\lambda-\delta}\exp[-(\delta-\lambda_1)t]\{\exp[-(\lambda-\delta)t_0]\\ \qquad -\exp[-(\lambda-\delta)t]\} \qquad (\delta<\lambda)\\ \dfrac{m_1m_2 2\sqrt{\lambda\delta}}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}\exp[-(\delta-\lambda_1)t]\cdot(t-t_0) \qquad (\delta=\lambda)\\ \dfrac{m_1m_2}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}\,\dfrac{2\sqrt{\lambda\delta}}{\delta-\lambda}\{\exp[-(\lambda-\lambda_1)t]-\exp[-(\delta-\lambda)t]\\ \qquad \cdot\exp[(\delta-\lambda)t_0]\} \qquad (\delta>\lambda)\end{cases}$$

均有$\lim\limits_{t\to+\infty}\chi(t)=0$，即当$t\to+\infty$时$\varphi(t)=O(\exp[-\lambda_1 t])$，证毕。

定理2.2的证明　设$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$是方程(1.2)适合(1.3)在$[t_0,+\infty)$上的两个有界解，由(2.8)式有

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}|U(t,\sigma)||g(\sigma,\varphi_1(\sigma))-g(\sigma,\varphi_2(\sigma))|d\sigma \qquad (t\geqslant t_0)$$

由t^*的取法知当$t_0\geqslant t^*$时有$\|A\|<\delta/m_1$. 由(2.2)、(2.6)式可得：

$$\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty\leqslant\frac{m_1}{\delta-m_1\|A\|}\psi(t_0,\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty,\cdots,\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty)$$

如果$\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty\neq 0$，由(2.3)式知存在$t^{**}\geqslant 0$使得对$t_0\geqslant t^{**}$有

$$\psi(t_0,\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty,\cdots,\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty)<\frac{\delta-m_1\|A\|}{m_1}\eta\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty$$

$$(0<\eta<1)$$

则当$t_0 \geqslant t_2^* = \max\{t^*, t^{**}\}$时应有

$$\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty < \eta\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty \qquad (0<\eta<1)$$

从而得出$\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)$，$t\geqslant t_0$，证毕。

定理2.3的证明 设方程(1.2)具有初值$y_i(t_0)=\xi_i\ (i=1,2)$ $t_0\geqslant\max\{t_1^*, t_2^*\}$在$[t_0,+\infty)$上的有界解分别记为$\varphi_i(t)$，由(2.8)式在$[t_0,+\infty)$上有

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|\leqslant m_1|\xi_1-\xi_2|+\eta\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty \qquad (t\geqslant t_0, 0<\eta<1)$$

$$\therefore \qquad \|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty \leqslant \frac{m_1}{1-\eta}|\xi_1-\xi_2|$$

证毕。

三、$\lim\limits_{t\to+\infty} A_i(t)$存在的情况

在这种情况下用文[8]的方法可得出方程(1.1)有界解的存在性，对扰动方程(1.2)有：

定理3.1 若线性方程(1.1)满足定理2.1的条件 i)，方程(1.2)的扰动项f有(2.1)式成立且$\lambda>\min\{m_1\|A\|,\ m_1^2\|A\|^2/4\delta\}$，当$\lambda>m_1\|A\|$时有

$$m_2<\frac{\lambda-m_1\|A\|}{m_1}c_1 \tag{3.1a}$$

当$\lambda>m_1^2\|A\|^2/4\delta$时有

$$m_2<\frac{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}{m_1}c_1 \tag{3.1b}$$

则存在实数$\mu>0$使得当$|\xi|\leqslant\mu$时方程(1.2)在$t\geqslant t_0\geqslant 0$上存在满足初始条件(1.3)的有界解$y=\varphi(t)$，且当$t\to+\infty$时有$\varphi(t)=O(\exp[-\lambda_1 t])$，$0<\lambda_1<\min\{\delta,\ \lambda\}$。

定理3.2 如果线性方程(1.1)满足定理2.1的条件 i)，方程(1.2)的扰动项f有(2.1)式成立，$\lambda>\min\{m_1\|A\|,\ m_1^2\|A\|^2/4\delta\}$，并有

$$|f(t,y_0,\ \cdots,\ y_p)-f(t,\tilde{y}_0,\ \cdots,\ \tilde{y}_p)|\leqslant m_3\exp[-\lambda t][|y_0-\tilde{y}_0|+\cdots+|y_p-\tilde{y}_p|] \qquad (t\geqslant t_0) \tag{3.2}$$

当$\lambda>m_1\|A\|$时有

$$m_3<\frac{\lambda-m_1\|A\|}{m_1(p+1)} \tag{3.3a}$$

当$\lambda>m_1^2\|A\|^2/4\delta$时有

$$m_3<\frac{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}{m_1(p+1)} \tag{3.3b}$$

则(1.2)与(1.3)至多只有一个有界解。

定理3.3 如果满足定理3.1的条件且有(3.2)与(3.3)式成立，则方程(1.2)的有界解连续依赖于初值。

在上述定理的证明中要用到：

引理3.1 如果满足引理2.2的条件，并有$\lambda>\min\{m_1\|A\|,\ m_1^2\|A\|^2/4\delta\}$，则对任一$\varphi(\cdot)\in G_1$，(2.6)式右端的级数在$[t_0,+\infty)$上一致收敛，$g(t,\varphi(t))$是$t$的连续函数。

证明 在$\lambda>\min\{m_1\|A\|,\ m_1^2\|A\|^2/4\delta\}$的情况下可以象引理2.2那样证明对$\varphi(\cdot)\in G_1$，

(2.6)式右端的级数在$[t_0,+\infty)$上一致收敛，从而$g(t,\varphi(t))$是t的连续函数，且当$\lambda>m_1\|A\|$时有

$$|g(t,\varphi(t))|\leqslant\frac{m_2\lambda}{\lambda-m_1\|A\|}\exp[-\lambda t]\qquad(t\geqslant t_0)\tag{3.4}$$

当$\lambda>m_1^2\|A\|^2/4\delta$时有

$$|g(t,\varphi(t))|\leqslant\frac{2m_2\sqrt{\lambda\delta}}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}\exp[-\lambda t]\qquad(t\geqslant t_0)\tag{3.5}$$

证毕.

注　显然在满足引理3.1假设条件的情况下，引理2.3仍成立.

定理3.1的证明　对任一$\varphi(\cdot)\in G_1$，由引理3.1知可由(2.6)式作出在$[t_0,+\infty)$上的连续函数$g(t,\varphi(t))$，考虑M中的凸闭子集G_1及定义在其上的积分算子

$$(T\varphi)(t)=U(t,t_0)\xi+\int_{t_0}^{t}U(t,\sigma)g(\sigma,\varphi(\sigma))d\sigma\qquad(\varphi(\cdot)\in G_1)$$

当$\lambda>m_1\|A\|$时取$\mu=(c_1/m_1)-m_2/(\lambda-m_1\|A\|)$，由(3.1a)式知有$\mu>0$，当$\lambda>m_1^2\|A\|^2/4\delta$时取$\mu=c_1/m_1-m_2/(2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|)$，由(3.1b)式知有$\mu>0$，当$|\xi|\leqslant\mu$时由(2.1)及(3.4)或(3.5)式可以证明$T$是将$G_1$映入自身的全连续算子，由Schauder不动点原理知至少存在一$\varphi(\cdot)\in G_1$有$(T\varphi)(\cdot)=\varphi(\cdot)$，则$y=\varphi(t)$即为(1.2)满足(1.3)在$[t_0,+\infty)$上的有界解. 用与定理2.1的证明中同样的方法可证明当$t\to+\infty$时有$\varphi(t)=O(\exp[-\lambda_1 t])$，证毕.

定理3.2的证明　设$\varphi_1(t)$与$\varphi_2(t)$是方程(1.2)满足(1.3)在$[t_0,+\infty)$上的两个有界解，由(2.8)式有

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|\leqslant\int_{t_0}^{t}|U(t,\sigma)||g(\sigma,\varphi_1(\sigma))-g(\sigma,\varphi_2(\sigma))|d\sigma\qquad(t\geqslant t_0)$$

当$\lambda>m_1\|A\|$时由(2.4)、(2.6)和(3.2)式得出

$$\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty\leqslant\frac{m_1m_3(p+1)}{\lambda-m_1\|A\|}\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty$$

由(3.3a)得出$\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)\,t\geqslant t_0$；当$\lambda>m_1^2\|A\|^2/4\delta$时有

$$\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty\leqslant\frac{m_1m_3(p+1)}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|}\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty$$

由(3.3b)得出$\varphi_1(t)\equiv\varphi_2(t)\,t\geqslant t_0$. 证毕.

定理3.3的证明　设方程(1.2)具有初值$y_i(t_0)=\xi_i\ (i=1,2)$在$[t_0,+\infty)$上的有界解分别记为$\varphi_i(t)$，则由(2.8)式知在$[t_0,+\infty)$上有

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|\leqslant|U(t,t_0)||\xi_1-\xi_2|+\int_{t_0}^{t}|U(t,\sigma)||g(\sigma,\varphi_1(\sigma))-g(\sigma,\varphi_2(\sigma))|d\sigma$$

当$\lambda>m_1\|A\|$时由(2.4)、(2.6)及(3.2)式得出

$$\frac{\lambda-m_1\|A\|-m_1m_3(p+1)}{\lambda-m_1\|A\|}\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty\leqslant m_1|\xi_1-\xi_2|$$

由(3.3a)式有$\lambda-m_1\|A\|-m_1m_3(p+1)>0$，记

$$\mathscr{M}=\frac{m_1(\lambda-m_1\|A\|)}{\lambda-m_1\|A\|-m_1m_3(p+1)}>0$$

即有

$$\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty\leqslant\mathscr{M}|\xi_1-\xi_2|$$

同理当$\lambda>m_1^2\|A\|^2/4\delta$时，用(3.3b)式可得出

$$\|\varphi_1(\cdot)-\varphi_2(\cdot)\|_\infty\leqslant\tilde{\mathscr{M}}|\xi_1-\xi_2|$$

其中
$$\tilde{\mathscr{M}}=\frac{m_1(2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|)}{2\sqrt{\lambda\delta}-m_1\|A\|-m_1m_3(p+1)}>0$$
证毕。

参 考 文 献

[1] Doss, S. and S. K. Nasr, On the functional equation $dy/dx=f(x,y(x),y(x+h))$, $h>0$, *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 713—716.

[2] Sugiyama, S., On some problems of functional-differential equations with advanced argument, *Proc. U. S.-Japan Seminar Differential and Functional Equations*, Minnesota, June (1967), Benjamin, New York (1967), 367—382.

[3] Anderson, C. H., Asymptotic oscillation results for solutions to first-order nonlinear differential-difference equations of advanced type, *J. Math. Anal. Appl.*, **24** (1968), 430—439.

[4] Kato, T. and J. B. Mcleod, The functional-differential equation $y'(x)=ay(\lambda x)+by(x)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 891—937.

[5] Kusano, T. and H. Onose, Nonlinear oscillation of second order functional differential equations with advanced argument, *J. Math. Soc. Japan*, **29** (1977), 541—559.

[6] Onose, H., Oscillatory properties of the first order differential inequalities wtih deviating argument, *Funkcial. Ekvac.*, 26 (1983), 189—195.

[7] 郑祖庥、林宜中，具超前变元微分方程的基本存在性定理，福建师范大学学报（自然科学版），2 (1983), 17—24.

[8] 林宜中，具超前变元微分方程的几个问题，福建师范大学学报（自然科学版），1(1985), 9—16.

The Bounded Solution of a Class of Differential-Difference Equation of Advanced Type and Its Asymptotic Behavior

Lin Yi-zhong

(Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper, we consider the differential-difference equation of advanced type with perturbation term. It is shown that if the bounded solution of the reduced equation has negative exponential order and the perturbation term f satisfies certain condition, then the bounded solution of the perturbation equation has negative exponential order.