应用数学和力学，第9卷第6期（1988年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

PLK方法适用性的研究*

谈 骏 瑜

（重庆大学应用数学系，1987年3月17日收到）

摘　要

本文基于Π-U理论，对PLK方法应用于奇异摄动问题的适用性进行了研究，给出了形式渐近解的一般公式和应用PLK方法的必要性条件，并举例对本文的方法的应用进行了讨论．

一、引　言

我们知道，PLK方法是奇异摄动理论的一个重要方法．但是，应用PLK方法有时会给出错误的结果[1]．关于PLK方法的适用性，一些文献提出了这个问题，但只对某些特殊的问题进行了讨论．如Wasow[2]讨论了一阶Lighthill方程（Wasow准则），Usher[3]讨论了一阶常微分方程的一阶近似，Comstoch受林家翘的启发研究了另一类型的Lighthill方程[4]，等等．

Притуло和Usher分别提出了PLK法的新形式——重正化技巧[5,6,1]．本文基于Π-U理论研究了PLK法的适用性，给出了渐近解和坐标伸缩函数的一般公式，建立了PLK法适用性的必要条件，改进和发展了Usher等人的结果[3]．最后，我们还举例说明了本文方法的应用．

二、引　理

为以后讨论方便起见，本节我们给出几个引理．

引理1　若$m_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$是正整数，且

$$\sum_{i=1}^{n} m_i=m,\qquad \sum_{s=1}^{K} sm_s=K \tag{2.1}$$

则，(1) $m\leqslant K$，且当$m_2=m_3=\cdots=m_K=0$，$m_1=K$时$m=K$．

(2) $m_K=0$或1，且仅当$m_2=m_3=\cdots=m_{K-1}=0$时$m_K=1$．

(3) 当$K<k<n$时，$m_k=0$．

引理2　如果$m_i\geqslant 0$，$m\geqslant 1$和$K\geqslant 1$是正整数，以及式(2.1)成立，又若$m_j\geqslant 1$ $(1\leqslant j\leqslant K-1)$，令$\bar{m}_j=m_j-1$，$\bar{m}_{j+1}=m_{j+1}+1$，$\bar{m}_i=m_i$ $(i\neq j)$，则

* 张汝清推荐．

(1) $\bar{m}_i$ $(i=1,2,\cdots,K)$是正整数，且有

$$\sum_{i=1}^{K}\bar{m}_i=m,\qquad \sum_{s=1}^{K}s\bar{m}_s=K+1 \tag{2.2}$$

(2) 又若$\tilde{m}_i\geqslant 0$是正整数，以及

$$\sum_{i=1}^{K+1}\tilde{m}_i=m,\qquad \sum_{s=1}^{K+1}sm_s=K+1 \tag{2.3}$$

则若某个$\tilde{m}_i\neq 0$ $(1\leqslant i\leqslant K)$，必有$\tilde{m}_{K+1}=0$，且当$\tilde{m}_{K+1}=1$时 有 $\tilde{m}_1=\tilde{m}_2=\cdots=\tilde{m}_K=0$，即是方程(2.3)只比方程(2.2)多一个解$\tilde{m}_{K+1}=1$，$\tilde{m}_j=0$ $(j=1,2,\cdots,K)$。

引理1、2的证明是容易的，故从略。

我们引进一个变量x的展开式

$$x=z+\varepsilon x_1(z)+\varepsilon^2x_2(z)+\cdots$$

其中z是一个新的自变量，那么

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\right)_{\varepsilon=0}=\left[\frac{d^nu}{dx^n}\ (x_1(z)+2x_2(z)\varepsilon+\cdots)\right]_{\varepsilon=0}=\frac{d^nu}{dz^n}x_1(z)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d^{n-1}x}{d\varepsilon^{n-1}}\right)_{\varepsilon=0}=[(n-1)!x_{n-1}(z)+(n-1)!nx_n(z)\varepsilon+\cdots]'_{\varepsilon=0}$$

$$=(n-1)!nx_n(z)=n!x_n(z)\qquad (n=1,2,\cdots)$$

于是我们给出以下的

定义 对任一正整数n，记

(1) $\dfrac{\bar{\partial}}{\partial\varepsilon}\left(\dfrac{\partial^{n-1}x}{\partial\varepsilon^{n-1}}\right)=n!x_n$ 或 $\dfrac{\bar{\partial}}{\partial\varepsilon}x_{n-1}=nx_n$

(2) $\dfrac{\bar{\partial}}{\partial\varepsilon}(p^{n-1}u)=p^nu\cdot x_1$

这里，$p=\partial/\partial x$ 和 $\bar{\partial}/\partial\varepsilon=(\partial/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}$ 表示对ε求导后取$\varepsilon=0$的导数。

引理 3 令 $p=\dfrac{\partial}{\partial x}$，$q^K=\dfrac{\bar{\partial}}{\partial\varepsilon}\left(\dfrac{\partial^{K-1}}{\partial\varepsilon^{K-1}}\right)$ $(K=1,2,\cdots)$

则

$$\frac{1}{K!}q^Ku=\sum_{\sum_{i=1}^{K}m_i=m,\ \sum_{s=1}^{K}sm_s=K}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}p^mux_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_K^{m_K} \tag{2.4}$$

其中 $m_i\geqslant 0$ 是正整数，$m=1,2,\cdots,K$。

证 我们用数学归纳法证明，当$K=1,2,3$时不难验证上式成立。假定对某个正整数 K 上式成立，由定义及式(2.4)，有

$$\frac{1}{K!}q^{K+1}u=\sum\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}\Big\{(p^{m+1}u)x_1^{m_1+1}x_2^{m_2}\cdots x_K^{m_K}$$

$$+(p^mu)\Big[m_1x_1^{m_1-1}\cdot 2x_2^{m_2+1}\cdots x_K^{m_K}+x_1^{m_1}m_2x_2^{m_2-1}\cdot 3x_3^{m_3+1}\cdots x_K^{m_K}+\cdots$$

$$+x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots m_K x_K^{m_K-1}(K+1)x_{K+1}\Big]\Big\}=\sum_{m=K}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}p^{K+1}ux_1^{m_1+1}x_2^{m_2}\cdots x_K^{m_K}$$

$$+\Big\{\sum_{m=K-1}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}p^K u\cdot x_1^{m_1+1}x_2^{m_2}\cdots x_K^{m_K}+\sum_{m=K}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}p^K u$$

$$\cdot\Big[m_1x_1^{m_1-1}\cdot 2x_2^{m_2+1}\cdots x_K^{m_K}+\cdots\Big]\Big\}+\cdots+\Big\{\sum_{m=1}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}p^2u\cdot x_1^{m_1+1}$$

$$\cdot x_2^{m_2}\cdots x_K^{m_K}+\sum_{m=2}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}p^2u\Big[m_1x_1^{m_1-1}\cdot 2x_2^{m_2+1}\cdots x_K^{m_K}+\cdots\Big]\Big\}$$

$$+\sum_{m=1}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}pu\Big[m_1x_1^{m_1-1}\cdot 2x_2^{m_2+1}\cdots x_K^{m_K}+\cdots\Big] \tag{2.5}$$

由引理 1 和引理2，上式含$p^m u$ $(m=2,\cdots,K)$ 项之和是

$$\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{K}\bar m_i=m,\ \sum_{s=1}^{K}s\bar m_s=K+1\\ m=2,3,\cdots,K}} p^m u\Big\{\Big[\frac{1}{(\bar m_1-1)!\bar m_2!\bar m_3!\cdots m_K!}+\frac{2}{\bar m_1!(\bar m_2-1)!\bar m_3!\cdots\bar m_K!}+\cdots$$

$$+\frac{K}{\bar m_1!\bar m_2!\cdots\bar m_{K-1}!(\bar m_K-1)!}\Big]x_1^{\bar m_1}x_2^{\bar m_2}\cdots x_K^{\bar m_K}+\frac{K+1}{\bar m_1!\bar m_2!\cdots\bar m_K!(\bar m_{K+1}-1)!}$$

$$\cdot x_1^{\bar m_1}x_2^{\bar m_2}\cdots x_K^{\bar m_K}x_{K+1}^{\bar m_{K+1}}\Big\} \tag{2.6}$$

这里有$\bar m_{K+1}=1$。又由引理2，上式

$$=\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{K+1}\bar m_i=m,\ m=2,\cdots,K\\ \sum_{s=1}^{K+1}s\bar m_s=K+1,\ m_i\geqslant 0}}\frac{\bar m_1+2\bar m_2+\cdots+K\bar m_K+(K+1)\bar m_{K+1}}{\bar m_1!\bar m_2!\cdots\bar m_K!\bar m_{K+1}!}p^m u\, x_1^{\bar m_1}x_2^{\bar m_2}\cdots x_{K+1}^{\bar m_{K+1}}$$

$$=\sum\frac{K+1}{\bar m_1!\bar m_2!\cdots\bar m_{K+1}!}p^m u x_1^{\bar m_1}x_2^{\bar m_2}\cdots x_{K+1}^{\bar m_{K+1}} \tag{2.7}$$

根据引理 1 和引理 2，式(2.5)右端的第一项

$$\frac{1}{K!}p^{K+1}ux_1^{K+1}=\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{K+1}m_i=m=K+1\\ \sum_{s=1}^{K+1}sm_s=K+1}}\frac{K+1}{m_1!m_2!\cdots m_{K+1}!}p^m u x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_{K+1}^{m_{K+1}} \tag{2.8}$$

以及最后一项

$$pu(K+1)x_{K+1}=\sum_{\sum_{i=1}^{K+1}m_i=1,\ \sum_{s=1}^{K+1}sm_s=K+1}\frac{K+1}{m_1!m_2!\cdots m_{K+1}!}pu\, x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_{K+1}^{m_{K+1}} \tag{2.9}$$

将式(2.7)、(2.8)、(2.9)代入式(2.5)，则

$$\frac{1}{(K+1)!}q^{K+1}u=\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{K+1}m_i=m,\ m=1,2,\cdots,K+1\\ \sum_{s=1}^{K+1}sm_s=K+1,\ m_i\geqslant 0}}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_{K+1}!}p^m u x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_{K+1}^{m_{K+1}} \tag{2.10}$$

在上面的证明中，当$m_i=0$时有$x_i^{m_i-1}=0$。由于m_i ($i=1,2,\cdots,n$)不能全为零，因此式(2.6)和式(2.7)对所有$m_i\geqslant 0$均成立，故引理得证。

三、渐近解的一般公式

我们考虑摄动问题

$$P_\varepsilon:\left.\begin{array}{l} L_\varepsilon[u_\varepsilon]=F(u,x,y,\varepsilon),\ u=(u_1,u_2,\cdots,u_n) \\ B_{\varepsilon,s}[u_\varepsilon]=G(u,x,y,\varepsilon),\ s=0,1,\cdots,l;\ (x,y)\in D \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

其中y,u,F和G是实向量，x是实数，$\varepsilon>0$是小参数，以及F,G对ε是解析的，L_ε为微分算子，$B_{\varepsilon,s}$为定义在初始时刻或边界上的微分算子。

假定摄动问题P_ε的直接展开式是

$$u_\varepsilon\sim u_0(x,y)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i u_i(x,y),\qquad (x,y)\in D \tag{3.2}$$

其次，我们作自变量x的伸缩坐标变换以及相应的因变量的展开

$$\left.\begin{array}{l} x=z+\varepsilon x_1(z,y)+\varepsilon^2 x_2(z,y)+\cdots \\ \bar{u}(z,y)=\bar{u}_0(z,y)+\varepsilon\bar{u}_1(z,y)+\varepsilon^2\bar{u}_2(z,y)+\cdots \end{array}\right\}(z,y)\in\bar{D} \tag{3.3}$$

其中z是一新的独立变量，且可以得到关于$\bar{u}_i^j$ ($j=1,2,\cdots,n$; $i=0,1,\cdots$)，$(z,y)\in\bar{D}$相应等价的定解问题。

按ε作 Taylor 展开且由Π-U理论，我们有

$$\bar{u}=\bar{u}_0(z,y)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\bar{u}_i(z,y)=u_0+\varepsilon(u_1+x_1u_0')$$

$$+\varepsilon^2\left(u_2+x_1u_1'+\frac{1}{2}x_1^2u_0''+x_2u_0'\right)+\cdots \tag{3.4}$$

其中$u_i=u_i(z,y)$，($'$)表示对z求导。如u_i^k对变量z是非一致的，我们总可以令分量u_i^k等于其性质是比较坏的部分u_{is}^k及性质比较好的部分u_{iw}^k之和，即有

$$u_i^k=u_{is}^k+u_{iw}^k \tag{3.5}$$

且又令

$$\left.\begin{array}{l} \phi_0^k=u_0^k(z,y) \\ \phi_1^k=u_{1s}^k+x_1(u_0^k)' \\ \phi_2^k=u_{2s}^k+x_1(u_1^k)'+\dfrac{1}{2}x_1^2(u_0^k)''+x_2(u_0^k)' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

因此 $$\bar{u}_i^k=u_{iw}^k+\phi_i^k \tag{3.7}$$

其中ϕ_i^k应被选定使得$\bar{u}_i^k$不比前项$\bar{u}_{i-1}^k$的性质更坏，特别可取$\phi_i^k=0$。为了确定x_i ($i=1,2,\cdots$)，假定某个分量ϕ_i^j满足式(3.6)，则

$$\left.\begin{aligned}&x_1(z,y)=\frac{1}{(u_0^j)'}(\phi_1^j-u_{1s}^j)\\&x_2(z,y)=\frac{1}{(u_0^j)'}\left(\phi_2^j-x_1(u_1^j)'-\frac{1}{2}x_1^2(u_0^j)''-x_2(u_0^j)'-u_{2s}^j\right)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

且其余的分量$\phi_i^k(k\neq j)$能够从方程(3.6)、(3.8)求得，因此所有$\bar{u}_i^k$可以从方程(3.7)得到。

其次，我们有

$$u_i\sim u_{i0}+\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{K!}q^K u_i\varepsilon^K$$

因此 $$u_\varepsilon\sim\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{K!}q^K u_i\varepsilon^{K+i}$$

若$K+i=n$，由引理3，ε^n项的系数是

$$\sum_{K=0}^{n}\frac{1}{K!}q^K u_{n-K}=u_n+\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{K!}q^K u_{n-K}=u_{nw}+u_{ns}$$

$$+\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{K}m_i=m,\ m=1,2,\cdots,K\\ \sum_{s=1}^{K}sm_s=K,\ K=1,2,\cdots,n-1}}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}u_{n-K}^{(m)}x_1^{m_1}\cdots x_K^{m_K}+\frac{1}{n!}q^n u_0\tag{3.9}$$

又由引理1

$$\frac{1}{n!}q^n u_0=\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{n-1}m_i=m,\ m=2,3,\cdots,n\\ \sum_{s=1}^{n-1}sm_s=n}}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_{n-1}!}u_0^{(m)}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_{n-1}^{m_{n-1}}+u_0'x_n\tag{3.10}$$

将式(3.10)代入(3.9)中，且令式(3.9)右端后三项的和等于ϕ_n^j，则有

$$x_n=\frac{1}{(u_0^j)'}\left\{\phi_n^j-\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{K}m_i=m\\ \sum_{s=1}^{K}sm_s=K}}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}(u_{n-K}^j)^{(m)}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_K^{m_K}-u_{ns}^j\right\}$$

$$=\frac{1}{(u_0^j)'}\{\phi_n^j-\bar{x}_n-u_{ns}^j\}\tag{3.11}$$

其中，当$K=1,2,\cdots,n-1$时，$m=1,2,\cdots,K$；当$K=n$时，$m=2,3,\cdots,K(n)$。

因此，渐近解和伸缩坐标的一般公式可得到如下

$$u(z,y)=\bar{u}(z,y)=\bar{u}_0(z,y)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\bar{u}_i(z,y)$$

$$=u_0(z,y)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i(u_{iw}+\phi_i),\quad (z,y)\in\bar{D} \tag{3.12}$$

及
$$x=z+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n x_n(z,y)=z+\frac{1}{(u_0^i)'}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^i\varepsilon^n-\frac{1}{(u_0^i)'}\sum_{n=1}^{\infty}u_{ns}^i\varepsilon^n$$

$$-\frac{1}{(u_0^i)'}\sum_{i=1}^{\infty}\bar{x}_n\varepsilon^n=z-\frac{1}{(u_0^i)'}u_s^i+\frac{1}{(u_0^i)'}\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^i\varepsilon^n-\frac{1}{(u_0^i)'}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{x}_n\varepsilon^n \tag{3.13}$$

于是，我们给出下面的

定理 1 (1)若摄动问题P_ε的形式渐近解取(3.2)的形式且u_0在变量x属于区域 D 中的坐标x_0有奇性. (2)通过坐标伸缩变换(3.3)，若$u_{1s}^i\neq 0$ 和 $(u_0^i)'\neq 0$，$(z,y)\in\bar{D}$，则渐近解和伸缩坐标用(3.12)和(3.13)表示，伸缩函数x_i由(3.11)表示.

推论 1 (1)同定理1(1). (2)若$(u_0^i)'\equiv 0$，$u_{1s}^i\equiv 0$ 及 $(u_1^i)'\neq 0$，则渐近解和伸缩坐标同样以式(3.12)和(3.13)表示，但伸缩函数x_n是

$$x_n=\frac{1}{(u_1^i)'}\left\{\phi_n^i-\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{K}m_i=m\\ \sum_{s=1}^{K}sm_s=K}}\frac{1}{m_1!m_2!\cdots m_K!}(u_{n+1-K}^i)^{(m)}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_K^{m_K}-u_{n+1s}^i\right\} \tag{3.14}$$

其中，当$K=1,2,\cdots,n-1$时，$m=1,2,\cdots,K$；当$K=n$时，$m=2,3,\cdots,K(n)$.

推论 2 (1)同定理1(1). (2)若$u_{1s}^i\equiv 0$和$(u_0^i)'\neq 0$，则渐近解和伸缩坐标仍取式(3.12)和(3.13)所示，又若取$\phi_1^i=0$，则$x_1=0$且伸缩函数$x_n(n\geqslant 2)$是

$$x_n=\frac{1}{(u_0^i)'}\left\{\phi_n^i-\sum_{\substack{\sum_{i=2}^{K}m_i=m\\ \sum_{s=2}^{K}sm_s=K}}\frac{1}{m_2!m_3!\cdots m_K!}(u_{n-K}^i)^{(m)}x_2^{m_2}x_3^{m_3}\cdots x_K^{m_K}-u_{ns}^i\right\} \tag{3.15}$$

其中，当$K=2,3,\cdots,n-1$时，$m=1,2,\cdots,K$；当$K=n$时，$m=2,3,\cdots,K(n)$.

为了保证K次近似解是一致有效的，PLK理论适用性的必要条件可概括如下

(1) 假若，式(3.2)具有奇异性的第一项是u_k，譬如$u_0(x,y)$ 在 $x=x_0$ 是奇异的，且若$\bar{u}_0(z,y)$相应的在$z=z_0$是奇异的，$\phi_k^i(k=1,2,\cdots,K)$应选择得使所有的 $\phi_k^i(i=1,2,\cdots,n)$ 不比相应的$\bar{u}_0^i(z,y)$ $(i=1,2,\cdots,n)$在$z=z_0$更奇异.

(2) ϕ_k^i应选择通过式(3.11)的K 次坐标伸缩使得被确定的 $x_i\neq\infty$ $(i=1,2,\cdots,K)$，$(z,y)\in\bar{D}$，且当$x\to x_0$时，$z\to\zeta\neq z_0$.

(3) 所有ϕ_k^i $(i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,K)$或者$\bar{u}_k^i=u_{kw}^i+\phi_k^i$在整个区域$\bar{D}$对变量 z是非奇异的.

(4) $\phi_k^i(i=1,2,\cdots,n)$应使得$\bar{u}_k^i=u_{kw}^i+\phi_k^i$满足相应的定解条件.

注 1 上面的讨论，对于直接展开式具有长期项的情形仍然成立，且对有限的z，ϕ_k^i 应选择使得$x_i\neq\infty(i=1,2,\cdots,K)$.

注 2 如u_0不具有奇性或不是长期项，而$u_k(k\geqslant 1)$具有奇性或是长期项，则上面的讨论仍然成立.

注 3 Usher[6]研究了一阶常微分方程组并指出一阶近似的必要条件是

$$(\phi_1^i(z)-\tilde{y}_{1,s}^i(z))/f_0^i(z)\neq\infty \tag{3.16}$$

对所有的$z\in\bar{D}$成立。这里，$\tilde{y}_{1,s}^i(z)$和$f_0^i(z)$分别是本文的$u_{1,s}^i(z)$和$u_0^i(z)$，显然，式(3.16)是本文的一种特殊情形。

四、举　例

这里，我们举几个例子以说明本文方法和结果的应用

1．考虑Duffing方程

$$\ddot{u}+u=\varepsilon u^3,\qquad t\geqslant 0 \tag{4.1}$$

初始条件

$$u(\varepsilon,0)=1,\qquad \dot{u}(\varepsilon,0)=0 \tag{4.2}$$

已知直接展开式是

$$u(\varepsilon,t)=\cos t+\varepsilon\left(\frac{1}{32}\cos t+\frac{3}{8}t\sin t-\frac{1}{32}\cos 3t\right)+\varepsilon^2\left(\frac{23}{1024}\cos t\right.$$
$$\left.+\frac{3}{32}t\sin t-\frac{9}{128}t^2\cos t-\frac{3}{128}\cos 3t-\frac{9}{256}t\sin 3t+\frac{1}{1024}\cos 5t\right)+\cdots \tag{4.3}$$

式(4.3)是非一致有效的($t>0$)。为了消除长期项，作坐标伸缩(3.11)～(3.12)，有

$$\left.\begin{aligned}
&\phi_0=\cos z,\ \phi_1=\frac{3}{8}z\sin z-x_1\sin z\\
&\phi_2=\frac{3}{32}z\sin z-\frac{9}{128}z^2\cos z-\frac{9}{256}z\sin 3z+\frac{3}{8}z\left(\frac{1}{32}\sin z\right.\\
&\qquad\left.+\frac{3}{8}\sin z+\frac{3}{8}z\cos z+\frac{3}{32}\sin 3z\right)-\frac{9}{128}z^2\cos z-x_2\sin z\\
&\quad=\frac{57}{256}z\sin z-x_2\sin z
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

首先，如果设$\phi_1=\phi_2=\sin z$，则初始条件(4.2)不能被满足。令$\phi_1=\phi_2=0$，又有$u_0'=-\sin z\neq 0$，由定理可得

$$x_1(z)=\frac{3}{8}z,\qquad x_2(z)=\frac{57}{256}z \tag{4.5}$$

于是二次一致有效近似解为

$$\left.\begin{aligned}
&u(z,\varepsilon)=\cos z+\frac{\varepsilon}{32}(\cos z-\cos 3z)+\varepsilon^2\left(\frac{23}{1024}\cos z-\frac{3}{128}\cos 3z+\frac{1}{1024}\cos 5z\right)\\
&t=\left(1+\frac{3}{8}\varepsilon+\frac{57}{256}\varepsilon^2\right)z
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

式(4.6)与文[7]的结果是一致的。

2．薄翼的超音速绕流问题

我们知道，直接展开式是[1]

$$\frac{u}{U}=1-\varepsilon\frac{T'}{B}+\varepsilon^2\left[\frac{1}{B^2}\left(1-\frac{M^4(1+\gamma)}{4B^2}\right)T'^2-\frac{1+\gamma}{2}\cdot\frac{M^4}{B^3}yT'T''-TT''\right]+O(\varepsilon^3) \tag{4.7}$$

其中$(1+\gamma)M^4B^{-3}yT'T''/2$是长期项(当$y\to\infty$)。又$u_0\equiv1$及$\varepsilon$的一次项$T'/B$不是长期项，即是$u_{1s}\equiv0$且$u_0'\equiv0$或$u_{1s}+x_1u_0'\equiv0$即$\phi_1\equiv0$。由推论1，有

$$-\frac{\gamma+1}{2}\cdot\frac{M^4}{B^3}yT'T''+x_1\left(-\frac{T''}{B}\right)=0 \tag{4.8}$$

因此 $$x_1=-\frac{\gamma+1}{2B^2}M^4yT'$$

于是得到

$$\frac{u}{U}=1-\varepsilon\frac{T'(s)}{B},\qquad \xi=s-\varepsilon\frac{\gamma+1}{2B^2}M^4yT'(s) \tag{4.9}$$

3. Lighthill 方程

$$(x+\varepsilon u)\frac{du}{dx}+u=0,\quad u(1)=1 \tag{4.10}$$

直接展开式是

$$u=\frac{1}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}\right)+\cdots \tag{4.11}$$

且在$x=0$有奇性，且后项的奇性比前项高。由前节的讨论，可求得

$$x_1=(z-z^{-1})/2,\ u_0(z)=z^{-1},\ u_1(z)=0 \tag{4.12}$$

为消除二次项的奇性，由式(3.11)可得

$$\phi_2=-x_2z^{-2} \tag{4.13}$$

若取$\phi_2=0$，因此

$$x_2(z)=0;\qquad u_2(z)=0 \tag{4.14}$$

那么二次近似解是

$$u=z^{-1}\text{ 或 }z=u^{-1};\ x=z+\varepsilon(z-z^{-1})/2=u^{-1}+\varepsilon(u^{-1}-u)/2 \tag{4.15}$$

进一步，我们能够证明式(4.15)即是精确解。假定有$x_{n-1}=0$，$u_{n-1}=0$，将式(3.3)代入式(4.10)且令$x_n=0$，我们有

$$\frac{d}{dz}(zu_n)=(-1)^{n-1}(x_1')^{n-1}u_0'(-zx_1'+x_1u_0)=0,\ u_n(1)=0\qquad(n\geqslant2) \tag{4.16}$$

于是有$x_n=0$，$u_n=0$。其次当$x\to0^+$时，$z\to[\varepsilon/(2+\varepsilon)]^{\frac12}=\zeta>0$或$u=u_0\to[(2+\varepsilon)/\varepsilon]^{\frac12}$及$x_1\to-[\varepsilon/(2+\varepsilon)]^{-\frac12}$。因此在区域$0<\zeta\leqslant z<\infty$，$u(z)$已没有奇性。

4. 我们看微分方程组[3]

$$\left.\begin{aligned}&du^{(1)}/dx=-(1+2\varepsilon)^{\frac12}u^{(2)},\ u^{(1)}(0)=1\\&du^{(2)}/dx=(1+2\varepsilon)^{\frac12}u^{(1)},\qquad u^{(2)}(0)=0\end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

对于$-\infty<x<+\infty$。其二次近似解是

$$\left.\begin{aligned}&u^{(1)}=\cos x-\varepsilon x\sin x-(1/2)\varepsilon^2(x^2\cos x-x\sin x)\\&u^{(2)}=\sin x+\varepsilon x\cos x-(1/2)\varepsilon^2(x^2\sin x+x\cos x)\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

为消除长期项，可得一次有效近似解

$$u^{(1)}=\cos z,\ u^{(2)}=\sin z,\ x=z+x_1(z)\varepsilon=z(1-\varepsilon) \tag{4.19}$$

其中，$x_1=-z$，$x_1(0)=0$。其次，有 $u_{2w}^{(i)}\equiv 0$，$u_{2s}^{(i)}=u_2^{(i)}$ $(i=1,2)$，且由方程(3.11)给出

$$\phi_2^1\equiv\bar{u}_2^{(1)}=(3/2)z\sin z-x_2\sin z,\ \phi_2^2\equiv\bar{u}_2^{(2)}=(3/2)z\cos z-x_2\cos z \tag{4.20}$$

由方程(4.20)之一可以确定x_2，且对于方程(4.20)的$\bar{u}_2$应选择得使满足初始条件 $\bar{u}_2^{(i)}(0)=0$ 和$x_2(0)=0$。我们试取$u_2^{(j)}\equiv 0$ ($j=1$ 或 2)，由式(4.20)给出$x_2=3z/2$，而 $\bar{u}_2$ 的另外一个分量也恒等于零且对有限的z是非奇异的，又有 $x_2(0)=0$。最后，我们得到二次是效近似解是

$$u^{(1)}=\cos z,\quad u^{(2)}=\sin z,\quad x=z\left(1-\varepsilon+\frac{3}{2}\varepsilon^2\right) \tag{4.21}$$

参 考 文 献

[1] Nayfen, A. H., *Perturbation Methods*, John Wiley, New York, Ch. 3 (1973).

[2] Wasow, W. A., On the convergence of an approximation method of M. J. Lighthill, *J. Rational Mech. Anal.*, 4 (1955), 751—767.

[3] Usher, P. D., Necessary conditions for applicability of Poincaré-Lighthill perturbation theory, *Quart. Appl. Math.*, **28** (1971), 463—471.

[4] Comstock, C., On Lighthill's method of strained coordinates, *SIAM J. Appl. Math.*, **16** (1968), 596—602.

[5] Pritulo, M. F., On the determination of uniformly accurate solutions of differential equations by the method of perturbation of coordinates, *J. Appl. Math. Mech.*, **26** (1962), 661—667.

[6] Usher, P. D., Coordinate stretching and interface location Ⅱ, a new PL expansion, *J. Computational Phys.*, **29**, 3 (1978), 29—39.

[7] Jordan, D. W. and P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford (1977), 152—155.

The Study of Applicability for PLK Method

Tan Jun-yu

(*Chongqing University, Chongqing*)

Abstract

This paper researches the applicability of the PLK method, we give the general formulae of the asymptotic solution and strained coordinates, and we establish necessary conditions for the applicability PLK method. Besides, the applicability of the approach is also exemplified by means of examples in this paper.