

光弹性力学应力分析的新方法

安里千 陈至达

(中国矿院北京研究生部, 1987年6月5日收到)

摘 要

本文提出的光弹性应力分析方法, 仅已知三个截面的等差线条纹级数及其边界上的主应力方向角, 就可进行应力分析, 不仅极大地减少了输入的已知数据和简化了计算程序, 而且提高了应力分析精度, 加快了计算速度。

一、引 言

在光弹性应力分析中, 若不用等倾线, 而只用主应力差进行应力分离, 往往需确定全部边界条件, 并用相容方程全场迭代求主应力和, 既费时, 精度也难保证, 尤其是只需计算个别典型截面的应力状态, 更是事倍功半。

本文提出的应力分析方法, 只需给出三个截面上的主应力差值及这三个截面的边界条件, 就可简便, 迅速地进行应力分析。首先, 用对数函数逼近方法^[1]求导数及插值, 然后在差分格式上, 求解弹性力学平面问题的微分方程^[2], 并用改进欧拉方法^[3]迭代求解主应力方向角。本文提出的方法不仅提高了应力分析精度, 简化了应力分析的计算过程, 而且更适合于光弹性应力分析的全自动化。此方法是简单, 有效的, 其精度完全满足工程要求。

二、应力分析公式

在光弹性力学平面问题中, 主应力差函数 $q(x, y)$ 可由应力光图确定, 自由边界上主应力和函数 $p(x, y)$ 的绝对值等于 $q(x, y)$ 。本文计算是以三个截面边界上的 $|p(x, y)| = q(x, y)$ 及其边界点主应力方向角为基点, 用“根据应力光图直接解答弹性力学问题的方法”, 求得内部各点的主应力和及主方向角。

设一微元体在 x, y 平面内原点附近, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 表示应力分量, σ_1, σ_2 为主应力, $\sigma_1 \geq \sigma_2$, σ_1 与 x 轴夹角为 θ , θ 以逆时针方向为正, $p = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, $q = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$, 则有公式

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{2q} \left[-\frac{\partial q}{\partial y} + \sin(2\theta) \frac{\partial p}{\partial x} - \cos(2\theta) \frac{\partial p}{\partial y} \right] \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{1}{2q} \left[\frac{\partial q}{\partial x} + \sin(2\theta) \frac{\partial p}{\partial y} + \cos(2\theta) \frac{\partial p}{\partial x} \right] \quad (2.2)$$

将此二式化为差方程, 令 $\Delta x = \partial x$, $\Delta y = \partial y$, 横向点号 ($i=1, 2, \dots, N$), 纵向点号 ($j=1, 2, 3$), $p = p_i^j$, $q = q_i^j$, $\theta = \theta_i^j$, 由方程(2.2)得

$$\frac{\partial p_i^i}{\partial x} = - \left[2q_i^i \frac{\partial \theta_i^i}{\partial y} - \frac{\partial q_i^i}{\partial x} - \frac{\partial p_i^i}{\partial y} \sin(2\theta_i^i) \right] / \cos(2\theta_i^i) \quad (2.3)$$

在自由边界点($i=1$)处, 式中 q_i^i , θ_i^i , $|p_i^i|=q_i^i$ 皆已知, 利用对数函数逼近求导(见第三节), 可求出 $\frac{\partial \theta_i^i}{\partial y}$, $\frac{\partial q_i^i}{\partial y}$, $\frac{\partial p_i^i}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial q_i^i}{\partial x}$, 代入(2.3), 则 $\frac{\partial p_i^i}{\partial x}$ 可求出。

$$p_i^i = p_i^i + \int_0^{\Delta x} \frac{\partial p_i^i}{\partial x} dx \quad (2.4)$$

由此式可求得 $i=2$ 三个点处的主应力和 p_j^i ($j=1, 2, 3$)。

方程(2.1)可以表示为:

$$\frac{\partial \theta_i^i}{\partial x} = \frac{1}{2q_i^i} \left[\frac{\partial q_i^i}{\partial y} + \sin(2\theta_i^i) \frac{\partial p_i^i}{\partial x} - \cos(2\theta_i^i) \frac{\partial p_i^i}{\partial y} \right] \quad (2.5)$$

在 $i=1$ 处, 方程右边各项皆已知, 用改进欧拉方法求解此微分方程(见第四节), 可得 θ_i^i ($j=1, 2, 3$)。

再以 $i=2$ 三点为基点, 可求得 $\frac{\partial p_j^i}{\partial x}$, p_j^i , $\frac{\partial \theta_j^i}{\partial x}$, θ_j^i 等, 以此推算下去, 便得到整个截面各点的 p_i^i , θ_i^i 。

用公式

$$\sigma_x = p + q \cos(2\theta)$$

$$\sigma_y = p - q \cos(2\theta)$$

$$\tau_{xy} = q \sin(2\theta)$$

可得各点应力分量。

为了提高计算精度, 每计算一步可用相容方程进行校核。

三、对数函数逼近求导数

现有的逼近公式, 如果已知点少或者步长大, 都不能有效地逼近非线性函数, 即使已知点多也难以逼近极高幂次的函数, 更无法控制其相对误差, 而且由逼近式给出的导数更不精确。

本文使用的对数函数逼近公式^[1], 能把高幂次函数化为低幂次, 只需给出少量的已知点, 便能进行高精度的逼近, 导数精确, 不仅能给出已知点处的导数, 也可以求出未知点处的导数, 并且可以估计误差。

如果已知某未知函数 $f(x)$ 的三个已知数据 y_0, y_1, y_2 , 并且它们对应的 x 坐标为 x_0, x_1, x_2 , 则 $f(x)$ 可写作:

$$f(x) = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{a(x)}$$

引用公式 $a^b = \exp[b \ln a]$, $(\exp[z])' = \exp[z]z'$ 即可得出

$$f(x) = y_0 \exp \left[a(x) \ln \frac{x}{x_0} \right]$$

$$f'(x) = y_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{a(x)} \left[a'(x) \ln \frac{x}{x_0} + \frac{a(x)}{x} \right] + R_A(x) \quad (3.1)$$

其中 $R_A(x)$ 是数值导数的误差项。

把(3.1)式再微分, 使得

$$f''(x) = f(x) \left[\alpha'(x) \ln \frac{x}{x_0} + \frac{\alpha(x)}{x} \right]^2 + f(x) \left[\alpha''(x) \ln \frac{x}{x_0} + \frac{\alpha'(x)}{x} + \frac{\alpha'(x)x - \alpha(x)}{x^2} \right] + R_B(x) \quad (3.2)$$

其中 $R_B(x)$ 为二阶导数的误差项。

在式(3.1)和(3.2)中

$$\alpha(x) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

若 $x_1 \leq x \leq x_2$ 则

$$\alpha_1 = \lg \left(\frac{y_1}{y_0} \right) / \lg \left(\frac{x_1}{x_0} \right)$$

$$\alpha_2 = \lg \left(\frac{y_2}{y_0} \right) / \lg \left(\frac{x_2}{x_0} \right)$$

若 $x_0 \leq x < x_1$ 则

$$\alpha_1 = \lg \left(\frac{y_1}{y_2} \right) / \lg \left(\frac{x_1}{x_2} \right)$$

$$\alpha_2 = \lg \left(\frac{y_0}{y_2} \right) / \lg \left(\frac{x_0}{x_2} \right)$$

$$\text{设 } f(x) = F_1(x) + \tilde{R}_1(x), \quad \alpha_1(x) = \bar{\alpha}(x) + R_1(x)$$

其中

$$\tilde{R}_1(x) = f(x) \left[1 - \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-R_1(x)} \right]$$

$$R_1(x) = \frac{\alpha_1(\xi)}{2} (x - x_1)(x - x_2)$$

绝对误差为

$$R_A(x) = \left[F_1(x) + \tilde{R}_1(x) \right] \left[R_1'(x) \ln \frac{x}{x_0} + \frac{R_1(x)}{x} \right] + \tilde{R}_1(x) \left[\bar{\alpha}_1(x) \ln \frac{x}{x_0} + \frac{\alpha_1(x)}{x} \right] \quad (3.3)$$

因为 $R_1(x)$, $\tilde{R}_1(x)$ 已知, 故相对误差

$$R_A^*(x) = \frac{R_A(x)}{F_1(x) + \tilde{R}_1(x)} \quad (3.4)$$

也可以估算。

二阶导数误差项

$$R_B(x) = R_A'(x) \quad (3.5)$$

本文中的对数逼近式及其导数, 必须满足

$$x_0 \neq 0, \quad f(x_0) \neq 0, \quad \frac{x}{x_0} > 0, \quad \frac{f(x)}{f(x_0)} > 0, \quad |x - x_0| \geq |x_n - x_1|.$$

如果 $f(x)$ 在 $[x_0, x_n]$ 不符合上述条件, 可以平移坐标轴, 使之符合条件。

四、改进欧拉方法求解微分方程

从积分学的角度, 初值问题可以写成

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t)) dt \quad (4.1)$$

如果用梯形公式计算上式中的定积分, 那么

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t)) dt &\approx \frac{1}{2} (f(x_0, y(x_0)) + f(x_1, y(x_1))) (x_1 - x_0) \\ &\approx (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)) (x_1 - x_0) / 2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

将此式代入(4.1), 即得

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 2^{-1} h_0 (f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)) \\ \text{一般地} \quad y_{n+1} &= y_n + 2^{-1} h_n (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})) \end{aligned} \quad (4.3)$$

截断误差

$$T_1 = y_{n+1} - y_n - hf(x_n, y(x_n))$$

利用泰勒展开式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + 2^{-1} h^2 y''(x_n) + O(h^3) \quad (4.4)$$

可得

$$T_1 = O(h^2)$$

类似(4.4)有

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + 2^{-1} h^2 y''(x_{n+1}) + O(h^3) \quad (4.5)$$

把(4.4)和(4.5)式相减并利用等式 $y''(x_{n+1}) = y''(x_n) + O(h^3)$, 得到

$$2y(x_{n+1}) - 2y(x_n) - h(y'(x_n) + y'(x_{n+1})) = O(h^3)$$

改进欧拉方法的截断误差为

$$T_2 = y(x_{n+1}) - y(x_n) - 2^{-1} h (f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))) = O(h^3) \quad (4.6)$$

偏微分方程(2.1)和(2.2)虽然含有多个变量, 但化为差分方程后, 在沿 x 方向计算时, 各分点处的偏导数 $\partial q/\partial y$, $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$ 都已求出, 故可把偏微分方程看作是常微分方程, 用改进欧拉方法求解 θ , 于是

$$\theta_{i+1}^c = \theta_i^c + \frac{h}{2q_i} \left[\frac{\partial q_i}{\partial y} + \frac{\partial p_i}{\partial x} \sin(2\theta_i^c) - \frac{\partial p_i}{\partial y} \cos(2\theta_i^c) \right] \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \theta_{i+1}^c &= \theta_i^c + \frac{h}{2} \left\{ \frac{1}{2q_i} \left[\frac{\partial q_i}{\partial y} + \frac{\partial p_i}{\partial x} \sin(2\theta_i^c) - \frac{\partial p_i}{\partial y} \cos(2\theta_i^c) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2q_{i+1}} \left[\frac{\partial q_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x} \sin(2\theta_{i+1}^c) - \frac{\partial p_{i+1}}{\partial y} \cos(2\theta_{i+1}^c) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} (\theta_{i+1}^c)_{new} &= \theta_i^c + \frac{h}{2} \left\{ \frac{1}{2q_i} \left[\frac{\partial q_i}{\partial y} + \frac{\partial p_i}{\partial x} \sin(2\theta_{i+1}^c) - \frac{\partial p_i}{\partial y} \cos(2\theta_{i+1}^c) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2q_{i+1}} \left[\frac{\partial q_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial p_{i+1}}{\partial x} \sin(2\theta_{i+1}^{old}) - \frac{\partial p_{i+1}}{\partial y} \cos(2\theta_{i+1}^{old}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 θ_i^c ——第 i 点的修正值, θ_{i+1}^c ——第 $i+1$ 点的第一次估算值,

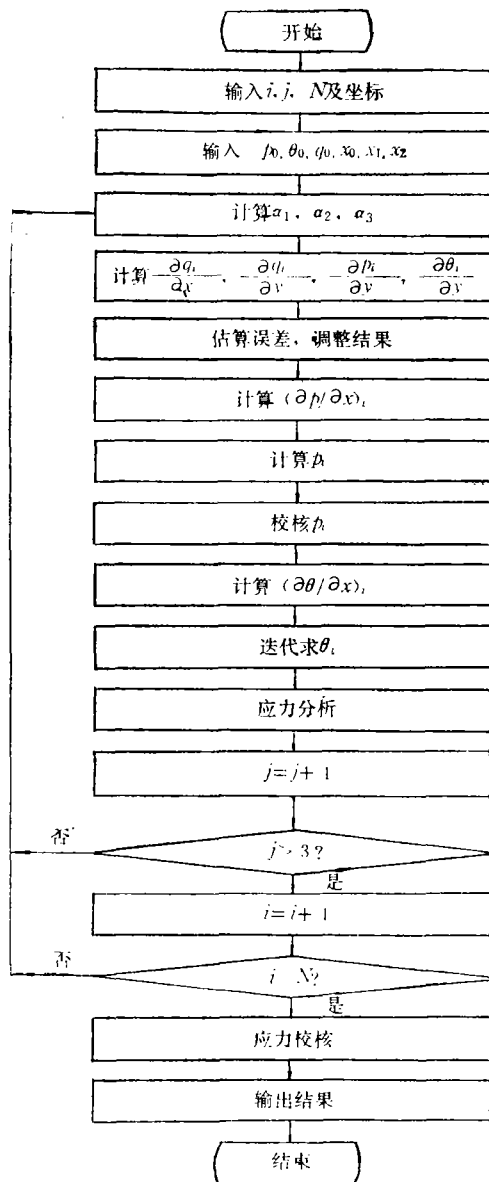
θ_{i+1}^c ——第 $i+1$ 点的第一次修正值, $(\theta_{i+1}^c)_{old}$ ——第 $i+1$ 点的前一次修正值,

$(\theta_{i+1}^c)_{new}$ ——第 $i+1$ 点的新的修正值, $h = x_{i+1} - x_i$.

利用上列各式迭代, 可求得给定误差限内的 θ_i 值。本文的求解方法是将偏微分方程化为

常微分方程，简化了求解过程，便于计算机程序化，迭代结果可以人为控制。计算表明，此方法收敛速度很快。

五、应力分析程序流程图



六、应力分析实例

通过二例分别考察本文的应力分析方法的计算结果与理论值，有限元计算值及通常光弹性实验计算值之间的偏差。

例1 对径受压圆盘，直径 $D=40$ 毫米，厚度 $d=6$ 毫米，载荷 $p=90$ 公斤，用本文的方法计算一个截面的应力分量，与理论比较最大偏差为 1.9 公斤/厘米²，最大相对偏差 4% 。图中

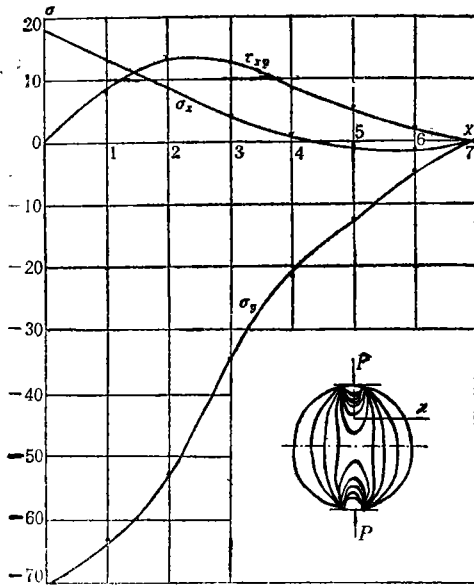


图 1 对径受压圆盘应力分布

实线为本文方法的计算值,圆点为理论计算值。
 例2对径受压圆环, 外径 $R=20\text{mm}$, 内径 $r=10\text{mm}$ 载荷 $P=60\text{kg}$ 。本文计算值与已有实验值比较, 最大偏差不大 5%。图中实线为本文计算值, 圆点为已有实验值。

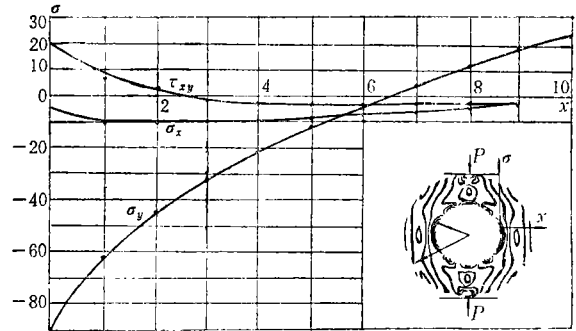


图 2 对径受压圆环应力分布

七、结 论

本文使用的对数逼近求导方法, 比当前其他数值方法求导数的精度高, 尤其对高幂次非线性函数逼近精度更佳, 是其他数值方法难以达到的。本文的应力分析程序, 需要的已知数据少, 简化了计算过程, 极大地缩短了计算时间, 也为光弹性应力分析的全自动化创造了有利条件。

参 考 文 献

- [1] 赵元民, 《函数逼近方法》, 黑龙江科学技术出版社(1981)。
- [2] 陈至达, 《根据应力光图直接求解弹性力学平面问题》, 力学学报, 5, 3 (1962)。
- [3] Bajpai, A. C., I. M. Calus and J. A. Fairley, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Addison-Welsley Publishing Company (1977)。
- [4] 武汉大学和山东大学计算数学教研室编, 《计算方法》, 人民教育出版社 (1978)。

A New Method of Stress Analysis in Photoelasticity

An Li-qian Chen Zhi-da

(Graduate School, China Institute of Mining, Beijing)

Abstract

A new method of stress analysis in photoelasticity has been developed in this paper. Only the orders of isochromatic fringes and boundary conditions in three sections are adopted to analyse the stress components in these sections. The method requires minimum known data and can quickly analyse stress components. It reduces computational programs.