

桁架结构的灵敏度分析及其在满应力设计中的应用*

唐燮黎 张秀娟

(河海大学工程力学系, 1986年12月4日收到)

摘 要

就桁架结构而言, 本文在结构变化定理的基础上提出了计算杆内力、杆应力和节点位移关于杆面积偏导数(梯度)的一组公式. 与已有的计算结构响应的梯度公式比较, 在一般情形下, 用本文公式进行计算所需的附加载荷个数最少, 因而计算量也小. 这对于广泛使用响应梯度的许多优化方法有减少机时的实用价值. 另外, 我们还将导出的梯度公式用于满应力设计, 得到一个改进的满应力迭代公式. 算例表明与简单应力比法相比, 改进的方法大大地减少了收敛于满应力设计所需的结构重分析次数.

一、引 言

近升年来, 在结构优化设计领域内已积累起大量的可供工程实践应用的算法. 其中有相当一部分使用范围广、效率高的算法, 诸如基于 Kuhn-Tucker 条件的优化准则法, 采用约束线性化的一类数学规划法, 颇大的计算量花费在结构响应(如位移、应力)对设计变量的梯度计算, 即灵敏度分析中. 如所周知, 目前常用的灵敏度分析法有伪载荷法^[1]和虚载荷法^[2]二种. 考虑一个有 n 个设计变量 $A_j (j=1, 2, \dots, n)$, n_j 个节点自由度的有限元结构, 外载有 n_c 种不同的工况. 采用直接刚度法, 结构的刚度方程为

$$KD_l = F_l \quad (l=1, 2, \dots, n_c) \quad (1.1)$$

式中 K 为结构的刚度矩阵, 下标 l 代表工况号. 假设载荷 F_l 与设计变量的取值无关, 则由(1.1)式两边对 A_j 求导得节点位移 D_l 的梯度

$$\frac{\partial D_l}{\partial A_j} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_j} D_l \quad (1.2)$$

又设第 i 单元的应力依赖于节点位移的关系为

$$\sigma_{il} = e_i^T D_l \quad (1.3)$$

其中 e_i 为与设计变量无关的列矢量. 利用(1.2)得到单元应力的梯度

$$\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial A_j} = -e_i^T K^{-1} \frac{\partial K}{\partial A_j} D_l \quad (1.4)$$

(1.3)和(1.4)式为用伪载荷计算结构响应的梯度的表达式. 显然对所考虑的问题而言, 要对

* 叶开沅推荐.

在不同工况作用下的节点位移和单元应力作一完整的灵敏度分析总共需引入 $n \times n_0$ 个附加的伪载荷 $(\partial K / \partial A_j) D_{il}$ 。

虚载荷法则是根据虚功原理在欲求节点位移的方向引入单位虚载荷，我们有（推导可参见文[2]）：

$$\frac{\partial D_{il}}{\partial A_j} = -D_i^T \frac{\partial K}{\partial A_j} D_i \quad (1.5)$$

式中 D_{il} 为在第 l 工况作用下沿 i 方向的节点位移， D_i 为与 i 方向相应的单位虚载荷产生的虚节点位移矢量。又由 (1.3) 式，在引入虚载荷矢量 e_i 后用同样的方法可得到应力分量的梯度表达式

$$\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial A_j} = -d_i^T \frac{\partial K}{\partial A_j} D_i \quad (1.6)$$

式中 d_i 为由虚载荷 e_i 产生的虚节点位移矢量。从式 (1.5) 和 (1.6) 易见用虚载荷法求位移分量的梯度需要引入 n_f 个附加虚载荷；求应力分量的梯度则要引入 n 个附加虚载荷。此因作一完整的灵敏度分析总共需要引入 $n + n_f$ 个附加虚载荷。

下节中我们将应用结构变更定理^[3]来导出桁架结构响应的一组新的梯度表达式，用这组公式进行完整的灵敏度分析只需引入 n 个附加虚载荷，因而较之上述的二种分析法有节省计算量的优点。

二、桁架结构的灵敏度分析

现假定上节中考虑的结构为桁架结构，并设该桁架第 j 杆的横截面积由 A_j 改变为 $a_j A_j$ 而其余杆的面积保持不变，则结构变更第一定理^[3]给出变更后结构的杆内力 \bar{P}_{il} 与变更前结构的杆内力 P_{il} 的关系为

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{il} &= P_{il} + f_{ij} r_{jl} & (i \neq j) \\ \bar{P}_{jl} &= a_j (P_{jl} + f_{jj} r_{jl}) & (i = j) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\text{式中} \quad r_{jl} = \frac{(1-a_j)P_{jl}}{1-(1-a_j)f_{jj}} \quad (2.2)$$

(2.1)和(2.2)式中下标 l 代表工况号， f_{ij} 为由作用在 j 杆两端点的一对大小相等方向相反的单位轴向拉力所产生的 i 杆的内力。为此，要给出桁架的任一杆面积的改变所引起的内力改变就必须考虑 n 对这样的附加载荷，它们构成一个单位载荷矩阵，其第 j 列代表作用在第 j 杆的一对轴向单位拉力。文[3]表明这一单位载荷矩阵恰好是联系杆伸长和节点位移的位移变换矩阵 C 的转置，因此用直接刚度法就可得到与单位载荷矩阵相应的节点位移矩阵 y 和杆力矩阵 f （其元素为 f_{ij} ），它们是

$$y = K^{-1} C^T \quad (2.3)$$

和

$$f = k C y \quad (2.4)$$

(2.4) 式中 k 为由各杆刚度 k_j 组成的对角线矩阵。结构变更第二定理^[3]给出了原结构和变更后结构的位移分量 D_{il} 和 \bar{D}_{il} 的关系

$$\bar{D}_{il} = D_{il} + y_{ij} r_{jl} \quad (2.5)$$

式(2.1)，(2.2)和(2.5) 可用来得到杆力，杆应力和节点位移关于杆面积的偏导数公式。

第 j 杆面积的改变是

$$\Delta A_j = (a_j - 1) A_j \quad (2.6)$$

相应的杆力改变为

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_{iu} &= f_{ij} r_{ji} & (i \neq j) \\ \Delta P_{ju} &= (a_j - 1) P_{ju} + a_j f_{jj} r_{ji} & (i = j) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

将 (2.7) 式两边除以 ΔA_j , 利用 (2.6) 和 (2.2) 式, 并令 ΔA_j 趋于零, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_{iu}}{\partial A_j} &= -\frac{P_{iu}}{A_j} f_{ij} & (i \neq j) \\ \frac{\partial P_{ju}}{\partial A_j} &= \frac{P_{ju}}{A_j} (1 - f_{jj}) & (i = j) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

应力的偏导数为

$$\frac{\partial \sigma_{iu}}{\partial A_j} = \frac{\partial}{\partial A_j} \left(\frac{P_{iu}}{A_i} \right) = \begin{cases} \frac{1}{A_i} \frac{\partial P_{iu}}{\partial A_j} & (i \neq j) \\ \frac{1}{A_j} \frac{\partial P_{ju}}{\partial A_j} - \frac{P_{ju}}{A_i^2} & (i = j) \end{cases} \quad (2.9)$$

将 (2.8) 式代入上式得

$$\frac{\partial \sigma_{iu}}{\partial A_j} = -\frac{1}{A_i} \sigma_{ju} f_{ij} \quad (2.10)$$

用推导杆力偏导数的同样方法由 (2.5) 式可以得到

$$\frac{\partial D_{iu}}{\partial A_j} = -\sigma_{ju} y_{ij} \quad (2.11)$$

(2.8), (2.10) 和 (2.11) 为桁架结构响应的一组灵敏度分析公式, 其中 y_{ij} 和 f_{ij} 由式 (2.3) 和 (2.4) 给出. 显见用这一组公式进行完整的灵敏度分析只须引入 n 个附加载荷 C^T .

三、各类灵敏度分析表达式恒同性的证明

用伪载荷法和虚载荷法计算结构响应量梯度表达式的恒等性已有证明 (如见文 [4]), 因此我们只须证明本文导出的梯度表达式与伪载荷法的相应公式的恒同性即可.

记由位移变换矩阵 C 的第 i 行构成的列矢量为 C_i , 则结构的刚度矩阵可以表为

$$K = \sum_{i=1}^n C_i k_i C_i^T \quad (3.1)$$

对于桁架, 应力表达式 (1.3) 中的矢量 l_i 为

$$l_i = \frac{k_i}{A_i} C_i$$

由此得

$$\sigma_{iu} = \frac{k_i}{A_i} C_i^T D_i \quad (3.2)$$

(3.1) 式两边对 A_j 求导得

$$\frac{\partial K}{\partial A_j} = \frac{k_j}{A_j} C_j C_j^T \quad (3.3)$$

将上式代入 (1.2) 的右端并用 (3.2) 得

$$\frac{\partial D_i}{\partial A_j} = -\sigma_{ji} K^{-1} C_j \quad (3.4)$$

从 (3.4) 式可直接得到

$$\frac{\partial D_{i,l}}{\partial A_j} = -\sigma_{jl} \sum_{s=1}^n K_{is}^{-1} C_{js} = -\sigma_{jl} (K^{-1} C^T)_{ij} = -\sigma_{jl} y_{ij} \quad (3.5)$$

这与表达式 (2.11) 完全一致。

将 (3.2) 两边对 A_j 求导得到用伪载荷法求应力梯度的公式

$$\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial A_j} = \frac{k_i}{A_i} C_i^T \frac{\partial D_i}{\partial A_j} \quad (3.6)$$

代入 (3.4) 后上式成为

$$\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial A_j} = -\frac{k_i}{A_i} C_i^T \sigma_{jl} K^{-1} C_j \quad (3.7)$$

另一方面, 由 (2.4) 和 (2.3) 式

$$f_{ij} = k_i (C K^{-1} C^T)_{ij} = k_i C_i^T K^{-1} C_j \quad (3.8)$$

利用上式 (3.7) 变为

$$\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial A_j} = -\frac{1}{A_i} \sigma_{jl} f_{ij} \quad (3.9)$$

此即同 (2.10) 式。

四、灵敏度分析在满应力设计中的应用

我们来考虑将第二节中得到的灵敏度分析公式应用于结构的满应力设计的情形。满应力设计的简单应力比迭代式为

$$A_i^{m+1} = A_i^m \max_{1 \leq l \leq n_c} (\sigma_{il}^m / \sigma_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

或

$$A_i^{m+1} = \max_{1 \leq l \leq n_c} (P_{il}^m / \sigma_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.2)$$

上述两式中 A_i^m 和 A_i^{m+1} 分别为第 m 次和第 $m+1$ 次迭代后得到的杆面积; σ_{il}^m , P_{il}^m 为第 m 次迭代后相应于载荷工况 l , i 杆的应力和内力; σ_i 为 i 杆的容许应力, 当 σ_{il}^m 或 P_{il}^m 为正时取为拉伸容许应力, 为负时取为压缩容许应力。

简单应力比法的简便、计算量小及收敛速度与设计变量数目无关的特性是众所周知的, 因此为工程实践所乐于采用。但也早就认识到^{[5]、[6]}在某些情况下简单应力比的收敛速度可能是相当慢的。为加速收敛进程唐燮黎^[7]曾建议应用杆力关于杆面积的 Taylor 展开一次近似式来得到一个修正的迭代式:

$$A_i^{m+1} = \left[P_i^m + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial P_i}{\partial A_j} \right)^m (A_j^{m+1} - A_j^m) \right] / \sigma_i \quad (4.3)$$

更早一些, Gallagher^[6]提出过应用杆应力的 Taylor 展开一次近似式来进行满应力迭代, 称为灵敏度矩阵法。Gallagher 的迭代公式为

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} \right)^m (A_j^{m+1} - A_j^m) = \sigma_i - \sigma_i^m \quad (4.4)$$

应用偏导数公式 (2.8) 和 (2.10), (4.3) 和 (4.4) 均可用来建立改进的满应力设计法。但首先我们就 (4.3) 和 (4.4) 用于静定结构设计的情形作一比较。如所知, 对静定结构有

$$\frac{\partial P_i}{\partial A_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.5)$$

和

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial A_j} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ -\frac{P_i}{A_i} & (i = j) \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.6)$$

应用 (4.5), (4.6) 简化为简单应力比迭代形式

$$A_i^{m+1} = P_i^m / \sigma_i$$

因而只须一次迭代就收敛于满应力设计。而当 (4.4) 式用于静定结构的设计时, 将 (4.6) 代入 (4.4), 并稍作变化就得到

$$A_i^{m+1} = \frac{P_i^m}{\sigma_i} - \frac{A_i^m}{\sigma_i \sigma_i^m} (\sigma_i - \sigma_i^m)^2$$

显然不能通过一次迭代收敛于满应力设计。为此我们宁愿取 (4.3) 的形式。对于有 n_c 个载荷工况的结构, 应用 (2.8) 式, (4.3) 可改写为

$$A_i^{m+1} \max_{1 \leq l \leq n_c} \left\{ \left[\left(P_{li}^m A_i^{m+1} / A_i^m \right) - \sum_{j=1}^n P_{lj}^m f_{ij}^m (A_j^{m+1} / A_j^m - 1) \right] / \sigma_i \right\} \quad (4.7)$$

上式即为应用杆力梯度得到的改进满应力迭代公式。当对各杆还有最小横截面积约束 $A_i \geq \underline{A}_i$ 时, 应取由 (4.7) 式算得的 A_i^{m+1} 与 \underline{A}_i 中较大者作为 $m+1$ 次的迭代近似解。

五、算 例

在应用 (4.7) 式进行满应力设计时, 为避免由于忽略杆力的 Taylor 展开式二次项所引起过大的线性化误差, 在以下例子中均先做一次简单应力比迭代, 然后再用 (4.7) 式进行迭代。用本方法计算所得之结果与完全用简单应力比法以及用加速应力比法 (第二种 α 取法)^[7] 所得之结果作了比较。从表 1、表 2 和表 5 可以看出为达到收敛于同一精度的解, 使用本文方法所需的结构重分析次数只是简单应力比法的十分之一, 也只是加速应力比法的二分之一到三分之一, 因此大大提高了收敛速度。由于在结构优化设计中分析结构要占用较大的计算量, 因而减少重分析次数对于提高计算效率有重要意义。所列举的三个算例的几何尺寸、载荷工况、应力限以及设计变量的初值叙述如下。

1. 三杆平面桁架

杆长相同的三杆桁架的几何形状和尺寸示于图 1。弹性模量 $E = 10^7$ 磅/吋², 重度 $\rho = 0.1$ 磅/吋³, 拉压容许应力限相同为 $\sigma = 25$ 千磅/吋²。结构承受两种载荷工况, 分别为 $P_1 = 10$ 千磅和 $P_2 = 10$ 千磅。初始设计取为 $A_1 = A_2 = A_3 = 1$ 吋²。

2. 四杆空间桁架

结构的几何尺寸示于图 2, 材料的弹性模量、重度和各杆的拉压容许应力同例 1。两种承

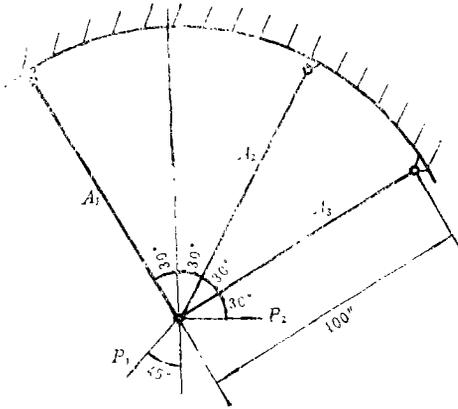


图1 三杆桁架

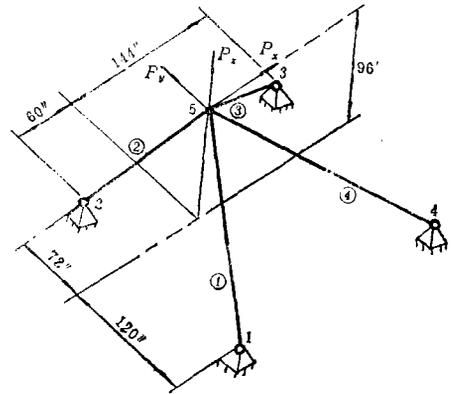


图2 四杆空间桁架

表1 三杆平面桁架满应力设计的结果比较

杆号	简单应力比法		加速应力比法		本文方法	
	面积 (吋 ²)	应力 (千磅/吋 ²)	面积 (吋 ²)	应力 (千磅/吋 ²)	面积 (吋 ²)	应力 (千磅/吋 ²)
1	0.53716	25.000	0.53715	25.000	0.53715	25.000
2	0.20301	24.999	0.20299	25.000	0.20299	25.000
3	0.80167	-25.000	0.80168	-25.000	0.80168	-25.000
重量(磅)	15.418		15.418		15.418	
分析次数	50		10		5	

表2 四杆空间桁架满应力设计的结果比较

杆号	简单应力比法		加速应力比法		本文方法	
	面积 (吋 ²)	应力 (千磅/吋 ²)	面积 (吋 ²)	应力 (千磅/吋 ²)	面积 (吋 ²)	应力 (千磅/吋 ²)
1	1.5999	-25.000	1.5996	-25.001	1.5999	-25.000
2	2.5282	-25.000	2.5284	-25.000	2.5282	-25.000
3	2.1302	-25.000	2.1298	-25.001	2.1302	-25.000
4	0.6450	-24.999	0.6454	-24.997	0.6450	-24.999
重量(磅)	113.83		113.83		113.83	
分析次数	45		11		4	

载工况被考虑, 工况1为 $P_x=10$ 千磅, $P_y=20$ 千磅, $P_z=-100$ 千磅; 工况2为 $P_x=20$ 千磅, $P_y=-50$ 千磅, $P_z=-15$ 千磅。各杆初始面积为10吋²。

3. 八杆空间桁架

该桁架的节点3~6为固定铰支座, 外载作用于自由节点1和2(图3)。各节点的空间坐标和二种载荷工况分别列于表3和表4, 弹性模量 $E=2 \times 10^5$ 牛顿/毫米², 各杆的拉伸容许应力均取为250牛顿/毫米², 压缩容许应力均取为200牛顿/毫米², 材料重量为 $\rho=10^{-4}$ 牛顿/毫米³, 各杆的最小截面面积和初始设计杆面积相同, 分别为0.1毫米²和100毫米²。

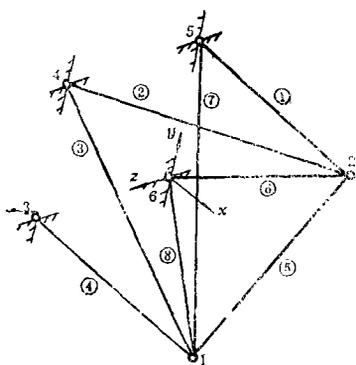


图3 八杆空间桁架

表3 八杆空间桁架的节点坐标 (单位 米)

节点号	1	2	3	4	5	6
x	4	4	0	0	0	0
y	0	3	0	3	3	0
z	3	0	3	3	0	0

表4 八杆空间桁架的载荷工况 (单位 千牛顿)

载 荷	节 点 1			节 点 2		
	x	y	z	x	y	z
工况 1	10	30	10	10	20	10
工况 2	-10	30	-10	-10	-20	10

表5

八杆空间桁架满应力设计的结果比较

杆 号	简单应力比法		加速应力比法		本文方法	
	面积 (毫米 ²)	应力 (牛顿/毫米 ²)	面积 (毫米 ²)	应力 (牛顿/毫米 ²)	面积 (毫米 ²)	应力 (牛顿/毫米 ²)
1	0.1000	-184.33	0.1000	-184.32	0.1000	-184.31
2	93.689	-200.01	93.690	-200.01	93.691	-200.00
3	260.32	-200.00	260.32	-200.00	260.32	-200.00
4	159.90	250.01	159.90	250.01	159.90	250.00
5	79.581	-200.00	79.580	-200.00	79.579	-200.00
6	125.05	249.99	125.05	250.00	125.05	250.00
7	0.100	-100.99	0.1000	-100.99	0.1000	-100.99
8	58.410	249.99	58.409	249.99	58.408	249.99
重量(牛顿)	366.56		366.56		366.56	
分析次数	75		16		5	

参 考 文 献

- [1] Fox, R. L., Constraint surface normals for structural synthesis techniques, *AIAA J.*, 3 (1965), 1517—1518.
- [2] Sander, G., and C. Fleury, A mixed method in structural optimization, *Int. J. Num. Mech. Engng.*, 13, 2 (1978), 385—404.
- [3] 马吉德 (英), 《结构最优设计》, 蓝偶恩译, 中国建筑工业出版社 (1980).
- [4] Fleury, C., A unified approach to structural weight minimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 20 (1979), 17—38.
- [5] Razani, R., Behaviour of fully stressed design of structures and its relationship to minimum-weight design, *AIAA J.*, 3, 12, 2262—2268.
- [6] Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz eds., *Optimum Structural Design, Theory and Applications*, John Wiley & Sons (1973), 33—49.
- [7] 唐燮黎, 一个新的满应力设计方法, 1980年全国计算力学会议文集, 北京大学出版社 (1981), 256—262.

Sensitivity Analysis of Truss Structures and Its Application to the Fully Stressed Design

X. Tang Zhang Xiu-juan
(*Hehai University, Nanjing*)

Abstract

Based upon the theorems of structural variations this paper derives a set of expressions for calculating partial derivatives of internal forces, stresses and joint displacements with respect to bar areas for truss structures. Compared with the known formulas for finding the gradients of structural behaviours the calculation effort with the proposed expressions in this paper is usually smaller because the additional virtual loadings needed are relatively fewer. It is of practical significance to various optimization methods in which the calculation of gradients of behaviours is widely used. Moreover, applying the derived formulas to the fully stressed design (FSD), we obtain an improved iterative method for FSD. The numerical examples show that the new method considerably reduces the reanalysis number required to converge to an FSD in comparison with the simple stress ratio method.