应用数学和力学，第9卷第5期（1988年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

用优化方法解接触问题
—试算谐波减速器中的柔轮应力*

叶 庆 凯
（北京大学力学系，1986年12月30日收到）

摘　要

直接应用通常的有限单元程序来解接触问题会遇到数值困难。本文用极值形式表达接触问题，并用优化方法求解。它并不要求事先给出所有边界条件，而只要给出约束条件就可以了，因而特别适宜于求解接触问题。用本文提出的方法对上海交大制造的谐波减速器中的柔轮应力进行了试算，结果与实验数据基本相符。

一、引　言

谐波减速器的基本工作原理是由发生器使柔轮变形来实现转动运动的传递。当发生器使柔轮变形时，发生器与柔轮之间的接触情况事先是不知道的。既不知道两者在那些点上接触，更不知道接触点之间的接触力。它们本身就是问题需要求的结果的一部分。这就是所谓的接触问题。为简单起见这假定发生器是刚性的，因而遇到的是一个刚体与一个弹性体之间的接触问题。

使用通常的有限单元法程序必须事先给定边界条件。或者给定边界处的位移或者给定边界处的外力。但在接触问题中，这两种边界条件均无法事先给出，因而无法直接应用通常的有限单元法程序。

本文用优化方法来迭代求解接触问题。为了使用优化方法，应有一个判断解的"好坏"的指标，然后在此指标取最小的意义下用迭代方法来不断改进所求得的解。当相应的解乃是"最好的"以至无法再予以改进时就得到了所要求的解。

由分析力学中的哈密顿原理可知，对于目前所处理的问题，这样的指标是存在的。即在所有满足接触条件（柔轮不能进入发生器内部）的柔轮允许变形中，实际的平衡态将是相应的变形能为最小的那一个。这样，若以变形后柔轮中的变形能为指标，并将变形能表达为柔轮变形的函数，那么目前所处理的问题将归结为在变形满足一定的不等式约束（即满足接触条件）下求使变形能为最小的变形问题。这是一个典型的非线性规划问题，可用标准的优化程序（例如共轭梯度法等）来求解。

用极值问题的形式来表达接触问题是一种"总体的"表达方式，它并不要求事先给出所

* 朱照宣推荐。

有的边界条件，而只要给出约束条件就可以了。因而特别适宜于求解接触问题。进而，在用极值问题形式求解接触问题后，还可求得实际的接触情况。

二、柔轮中应变能的计算

我们知道，对于保守、完整的力学系统，在有势力作用下，在一切可能位移中，对应平衡的位移所具有的势能为最小。

假定柔轮的厚度很薄，因而可作为平面应力问题来处理。这时系统的总势能即弹性体内所贮存的变形能 V（不计重力的影响）。由于弹性体内贮存的变形能只是位移的函数，因而问题归结为在所有允许位移中求使 V 最小的那一个位移。

现在讨论计算柔轮中应变能的具体方案。

记物体在 x 和 y 方向上的位移为 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$，其中 $(x,y)\in\Omega$，而 Ω 是物体所占的区域。因而，应变 e 的计算公式是

$$e=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^T \tag{2.1}$$

对于线性弹性问题，应力 σ 与应变 e 之间存在关系：

$$\sigma=De \tag{2.2}$$

其中

$$D=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu)\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

这里 E、ν 分别为柔轮材料的杨氏模量和泊松比。它们由材料性质决定，而与 σ 和 e 无关，因而也与 u 和 v 无关。这样，整个解域 Ω 中贮存的总变形能为

$$V=\iint_\Omega\left[\int\sigma^T de\right]dxdy=\frac{1}{2}\iint_\Omega e^T De\,dxdy \tag{2.4}$$

当我们在Sobolev空间中给定了一对函数 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 后，可由式(2.1)算出 e，再由式(2.4)算出 V，可见 V 是 u，v 的泛函。现在要解的乃是Sobolev 空间中具有约束的泛函极值题问。但是，要给出区域 Ω 上的函数 u,v 的一般形式是困难的。通常，限定 u,v 具有某种特定的形式。

可以有许多方法来指定函数 u,v。现将整个区域 Ω 划分为 s 个三角形单元，共得到 l 个节点。当要指定函数 u,v 时，指定它们在这 l 个节点上的值，并假定在每个单元内部函数 u，v 具有形式

$$\left.\begin{aligned}u(x,y)&=c_1+c_2x+c_3y\\ v(x,y)&=c_4+c_5x+c_6y\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

因而，只要给定了 u,v 在 l 个节点上的值，也就在整个区域 Ω 上确定了函数 u 和 v。若按上述方法来选取位移函数，那么在第 m 个三角形单元（其参数示于图 1 中）中应变与位移之间的关系为

$$e_m=\frac{1}{2\Delta_m}B_m\delta_m \tag{2.6}$$

其中Δ_m是此单元的面积

$$\delta_m=(u_i,v_i,u_j,v_j,u_k,v_k)^T \tag{2.7}$$

$$B_m=\begin{pmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ a_i & b_i & a_j & b_j & a_k & b_k \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

这里下标i，j，k表示有关变量是属于第m个单元中的第i，j，k个局部节点的。

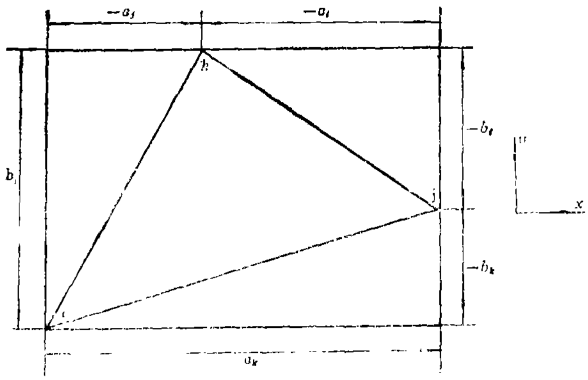

图 1

这样，第m个单元中贮存的变形能为

$$V_m=\frac{1}{2}\ \frac{1}{4\Delta_m}\delta_m^T B_m^T D_m B_m \delta_m=\frac{1}{2}\delta_m^T K_m \delta_m \tag{2.9}$$

而整个区域Ω中贮存的变形能为

$$V=\sum_{m=1}^{s}V_m=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{s}\delta_m^T K_m \delta_m=\frac{1}{2}\delta^T K\delta \tag{2.10}$$

其中K为$2l\times 2l$矩阵，

$$\delta=(u_1,u_2,\cdots,u_l,v_1,v_2,\cdots v_l)^T \tag{2.11}$$

因而，在只允许按上述规定方法来选取位移函数$u(x,y)$和$v(x,y)$时，V是定义在欧氏空间R^{2l}中的函数。相应的问题成为欧氏空间R^{2l}中的有约束寻优问题了。

三、解约束优化问题

这里用Polak-Ribiere共轭梯度法来解相应的寻优问题。为此需要知道函数V的梯度，它是

$$\nabla V=\left(\frac{\partial V}{\partial u_1},\ \cdots,\ \frac{\partial V}{\partial u_l},\ \frac{\partial V}{\partial v_1},\ \cdots,\ \frac{\partial V}{\partial v_l}\right)^T \tag{3.1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \partial V/\partial u_i&=\sum_{j=1}^{l}k_{ij}u_j+\sum_{j=1}^{l}k_{i,l+j}v_j \qquad (i=1,\ \cdots,\ l) \\ \partial V/\partial v_i&=\sum_{j=1}^{l}k_{l+i,j}u_j+\sum_{j=1}^{l}k_{l+i,l+j}v_j \qquad (i=1,\cdots,\ l) \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

这里k_{ij}是矩阵K的元素。

若将矩阵K分成四个$l\times l$的子矩阵

$$K=\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

且令$u=(u_1,\ \cdots,\ u_l)^T$，$v=(v_1,\ \cdots,\ v_l)^T$，则有

$$V=\frac{1}{2}(u^TK_{11}u+u^TK_{12}v+v^TK_{21}u+v^TK_{22}v) \tag{3.4}$$

$$\nabla V=\left[K_{11}u+\frac{1}{2}(K_{12}+K_{21})v,\ \ \frac{1}{2}(K_{12}+K_{21})u+K_{22}v\right] \tag{3.5}$$

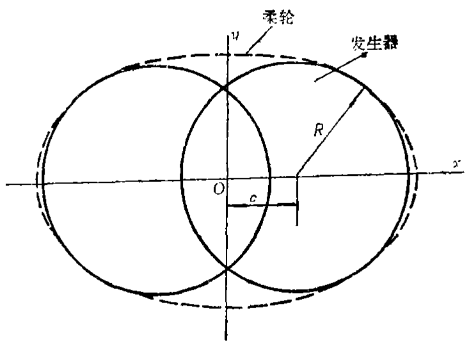

图 2

用投影梯度法来处理约束问题．发生器与柔轮的接触情况如图2所示，其中R是发生器中圆盘的半径，c是相应圆盘的偏心矩．显然，约束条件为柔轮不得进入发生器，亦即（由对称性，只考虑第一象限中的情况）

$$(x_i-c+u_i)^2+(y_i+v_i)^2\geqslant R^2,\quad (i=1,\cdots,l) \tag{3.6}$$

其中(x_i,y_i)是未变形时第i个节点的坐标，而(u_i,v_i)是该节点的位移．上式中若取大于号，表示柔轮上该节点与发生器是脱开的；若取等号，表示柔轮上该节点达到了约束边界，即已与发生器接触．

迭代过程中，若柔轮上的某节点已与发生器接触，则它的进一步的移动只有两种可能：(1)与发生器脱开；(2)沿发生器滑动．为判别应取哪一种情况来继续进行迭代，可计算函数V的负梯度方向．若它与这一点处发生器的外法线方向的夹角α为锐角，进一步迭代时柔轮将在这一点处脱离发生器，此时不必修改函数V的负梯度方向．若α为钝角，进一步迭代时柔轮上的这一点将沿发生器滑动，此时应以函数V的负梯度方向在相应节点处发生器的切线方向上的投影（即投影梯度）来计算进一步的搜索方向，并强制该节点仍与发生器相接触．

由上述分析，可引入下述约束算子与投影算子（令$s_i=x_i-c+u_i$，$t_i=y_i+v_i$）：

$$u_i'=N(u_i)=\begin{cases} u_i, & \text{若 } s_i^2+t_i^2\geqslant R^2 \\ c-x_i+Rs_i/\sqrt{s_i^2+t_i^2}, & \text{若 } s_i^2+t_i^2<R^2 \end{cases}$$

$$v_i'=N(v_i)=\begin{cases} v_i, & \text{若 } s_i^2+t_i^2\geqslant R^2 \\ -y_i+Ry_i/\sqrt{s_i^2+t_i^2}, & \text{若 } s_i^2+t_i^2<R^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial u_i}\right)'=P\left(\frac{\partial V}{\partial u_i}\right)=\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial u_i}, & \text{若 } s_i^2+t_i^2>R^2 \\ & \text{或 } s_i^2+t_i^2=R^2 \text{ 但 } \dfrac{\partial V}{\partial u_i}dx_1+\dfrac{\partial V}{\partial v_i}dy_1>0 \\ dy_1\times S/T, & \text{其它情况} \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial v_i}\right)'=P\left(\frac{\partial V}{\partial v_i}\right)\begin{cases}\dfrac{\partial V}{\partial v_i}, & \text{若} s_i^2+t_i^2>R^2 \\ & \text{或} s_i^2+t_i^2=R^2 \text{但} \dfrac{\partial V}{\partial u_i}dx_1+\dfrac{\partial V}{\partial v_i}dy_1>0 \\ -dx_1\times S/T, & \text{其它情况}\end{cases}$$

其中

$$dx_1=2R^2s_i,\ dy_1=2R^2t_i,\ T=dx_1^2+dy_1^2,$$

$$S=\frac{\partial V}{\partial u_i}dy_1-\frac{\partial V}{\partial v_i}dx_1 \qquad (i=1,2,\cdots,l).$$

四、例　　子

用上述优化方法对谐波减速器中的柔轮应力进行了试算。所取数据如下：

1) 柔轮数据：

齿数$N=4\times168$，

内径$R_i=24.525$厘米，

外径$R_0=25.040625$厘米，

齿高$H=0.15$厘米，

齿顶宽度$D=0.07$厘米。

2) 发生器数据取如下六组（其单位为厘米）：

(1) $\begin{cases}c=0.25\\R=24.35\end{cases}$　(2) $\begin{cases}c=0.24\\R=24.36\end{cases}$　(3) $\begin{cases}c=0.23\\R=24.37\end{cases}$

(4) $\begin{cases}c=0.22\\R=24.38\end{cases}$　(5) $\begin{cases}c=0.21\\R=24.39\end{cases}$　(6) $\begin{cases}c=0.20\\R=24.40\end{cases}$

计算结果如表1所示。

表 1

	SXX_{max}	SYY_{max}	SXY_{max}	PN
(1)	111	151	37	81—93
(2)	134	168	144	63—98
(3)	320	256	259	53—103
(4)	555	377	403	45—106
(5)	819	480	567	37—108
(6)	1128	605	721	29—110

其中　SXX_{max}，SYY_{max}，SXY_{max}的量纲为公斤/厘米，PN是接触段相应的齿轮编号。

上述计算结果与上海交大所做的实验结果基本相符。在实验中，所取的偏心矩$c=0.23$厘米，而测得的最大应力为800公斤/厘米。

Solve a Contact Problem by Optimization Method——to Calculate the Stresses for the Softwheel in a Harmonic Gear

Ye Qing-kai

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing*)

Abstract

It is difficult to solve the contact problem by usual finite element program. In this paper, we express the contact problem as an optimization problem. In this form we do not need to know all boundary conditions in advance. We only need to know the constraint conditions. This method is especially good for solving contact problem. Using this method, we calculate the stresses of the softwheel in the harmonic gear given by Shanghai Jiaotong University, and the results are in good agreement with the experimental results.