

高雷诺数下平面 Poiseuille 流稳定性渐近分析

王发民 黄泽远

(中国科学院力学研究所) (新加坡国立大学)

(周恒推荐, 1987年1月11日收到)

摘 要

本文主要讨论高雷诺数下平面 Poiseuille 流稳定性问题。应用多层结构分析理论, 求出了描述该流体稳定性的 Orr-Sommerfeld 方程特征值的较为合理的逼近式及相应的特征函数的渐近解析解。

一、引 言

在分析粘性和非粘性相交的流体运动方面, Stewartson 和 Williams(1969), Messiter (1970) 提出的多层结构分析理论, 近年来颇受人们重视, 它的主要思想是将流体在各区域中的运动用一个多层结构来描述, 在每一层内研究在该区域内流体呈现的各次的物理特性。这一思想方法现在被称为 Stewartson 三架板理论。

本文所述工作是应用上面的理论讨论 Orr-Sommerfeld 方程对于平面 Poiseuille 模型在高雷诺数下的渐近性质。该工作是作者留英期间在 J. T. Stuart (英皇家学会会员) 指导下, 主要参考了 Hall 和 Smith(1982) 中性曲线下半分枝的工作, 与黄泽远博士共同完成的。

基于当流体雷诺数足够大时, 流体的临界点随着雷诺数的增大而不断趋近于固壁, 临界层和边界层趋近于重叠这一基本现象, 我们应用一个两层结构, 来讨论该流体在高雷诺数下的渐近性质。

事实上, 假定流体的雷诺数足够大, 小扰动干扰波的波数和频率的量级分别为:

$$a \sim O(1), c \sim O(\alpha R)^{-\frac{1}{3}} \quad (1.1)$$

则流体的临界层厚度 $O(\alpha R) \bar{u}_c)^{-\frac{1}{3}}$ 和边界层厚度 $O(\alpha R c)^{-\frac{1}{2}}$ 趋于同一量级 $O(\alpha R)^{-\frac{1}{3}}$ 。

在下面的分析中, 我们应用“简化”的速度和压力方程

$$\left[\frac{1}{\alpha R} (D^2 - \alpha^2) - i(\bar{u} - c) \right] u - \frac{1}{\alpha} \bar{u}' v - i p = 0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \quad (1.2a)$$

$$\left[\frac{1}{\alpha R} (D^2 - \alpha^2) - i(\bar{u} - c) \right] v - \frac{Dp}{\alpha} = 0 \quad (1.2b)$$

$$i\alpha u + Dv = 0 \quad (1.2c)$$

和边界条件

$$u = v = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega_1 = \{y: y \in (y = -1)\} \text{ 上} \quad (1.2d)$$

$$u = 0, v = 1, \quad \text{在 } \partial\Omega_2 = \{y: y \in (y = 0)\} \text{ 上} \quad (1.2e)$$

代替通常采用的 Orr-Sommerfeld 方程。式中 $D = d/dy$ 表示对 y 的偏导数，域

$$\Omega = \{y: y \in [-1, 0]\}$$

在分析方程(1.2)在固壁临域粘性层的特性时，我们引入变换：

$$y = -1 + \varepsilon \eta, \quad \eta \sim O(1) \quad \text{在 } \partial\Omega_\varepsilon \text{ 中} \quad (1.3a)$$

将域 Ω 变为域 Ω_ε 。在该区域内将方程中基本流场的速度分量 \bar{u} 展开为

$$\bar{u} - c = -c + \bar{u}'_w \varepsilon \eta + \frac{1}{2} \bar{u}''_w \varepsilon^2 \eta^2 + \dots \quad (1.3b)$$

式中 \bar{u}'_w 和 \bar{u}''_w 分别表示 \bar{u} 在 $y \rightarrow -1$ 时一阶导数和二阶导数的极限值； ε 表示该粘性层厚度，它的值由 Orr-Sommerfeld 方程中粘性项与剩余项的平衡确定，即

$$(\alpha R)^{-1} \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{d^4 \phi}{d\eta^4} \sim (\bar{u} - c) \frac{d^2 \phi}{\varepsilon^2 d\eta^2} \quad (1.4a)$$

$$\varepsilon \sim O(\alpha R)^{-\frac{1}{3}} \quad (1.4b)$$

$$\Omega_\varepsilon = \{y: y \in [-1 + \varepsilon, -1]\} \quad (1.5)$$

应该指出，我们用域 Ω_ε 表示粘性层，用域 $\Omega/\Omega_\varepsilon$ 表示主流层。在整个区域 Ω 中，对于给定的 α 及 R ，我们求解 Orr-Sommerfeld 方程下面渐近形式

$$c = \varepsilon c_0 + \varepsilon^2 c_1 + \varepsilon^3 c_2 + \dots \quad (1.6)$$

的特征值及相应的特征函数。其中 c_0, c_1, \dots 为待定常数。

二、主流层分析

在域 $\Omega/\Omega_\varepsilon$ 中，流体主要表现非粘性运动，我们寻求如下形式的级数解

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots, \quad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (2.1a, b, c)$$

将上式代入方程组(1.2)，消去压力 p ，并比较 ε 的幂次，我们得下面的系列方程：

$$O(1): \quad L(v_0) = 0 \quad (2.2a)$$

$$O(\varepsilon): \quad L(v_1) = c_0 (D^2 - \alpha^2) v_0 \quad (2.2b)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad L(v_2) = c_0 (D^2 - \alpha^2) v_1 + c_1 (D^2 - \alpha^2) v_0 \quad (2.2c)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad L(v_3) = \sum_{j=0}^2 c_j (D^2 - \alpha^2) v_{2-j} + (D^2 - \alpha^2) v_0 \quad (2.2d)$$

式中微分算子

$$L = \bar{u}(D^2 - \alpha^2) - \bar{u}' \quad (2.3)$$

在量级 $O(1)$ 中, 齐次方程 $L(v_0) = 0$ 的解必须满足边界条件:

$$v_0 = 1, v_0' = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega_2 \text{ 上} \quad (2.4a)$$

而其它量级中所有非齐次方程, $v_n (n > 0)$ 满足下面的齐次边界条件:

$$v_n = 0, v_n' = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega_2 \text{ 上} \quad (2.4b)$$

由(1.2)的第二个动量方程, 我们可以得到下面计算压力 p_i 的系列方程:

$$p_0 = -i\alpha \int_0^y \bar{u}v_0 dy \quad (2.5a)$$

$$p_1 = -i\alpha \int_0^y (\bar{u}v_1 + c_0v_0) dy \quad (2.5b)$$

$$p_2 = -i\alpha \int_0^y (\bar{u}v_2 + c_0v_1 + c_1v_0) dy \quad (2.5c)$$

(2.1a, b)所求的级数解对所有量级都满足连续性方程:

$$O(\varepsilon^{n-1}): \quad i\alpha u_n + Dv_n = 0 \quad \text{对于 } n=0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

现在让我们逐级求解序列方程(2.2), 显然首次逼近方程(2.2a)满足边界条件(2.4a)的解 v_0 是在 $y=0$ 时一阶导数为零函数取值为1的偶函数。而级数

$$v_0(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} y^{2n} \quad (-1 < y \leq 0) \quad (2.7)$$

满足上述性质。

将上式代入方程(2.2a)并且让 y 的同次幂系数相等得

$$a_2 = -(1 - \alpha^2/2) \quad (2.8a)$$

$$a_4 = \frac{\alpha^2}{3 \times 4} (4 - \alpha^2) \quad (2.8b)$$

.....

$$a_{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)} [(2n-1)(2n-4) + \alpha^2(a_{2n-2} - a_{2n-4})] \quad (n \geq 3) \quad (2.8c)$$

容易证明级数 $\{a_{2n}\}$ 当 $\alpha < 2, -1 < y \leq 0$ 时是一致收敛的。

应用上面求得的 v_0 , 我们可以由(2.5a)和连续性方程直接求得 p_0 和 u_0 。它们是:

$$p_0 = -i\alpha \left[y - \frac{y^2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \left(\frac{y^{2n+1}}{2n+1} - \frac{y^{2n+3}}{2n+3} \right) \right] \quad (2.9)$$

$$u_0 = \frac{i}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} (2n) y^{2n-1} \quad (2.10)$$

当 $y \rightarrow -1$ 时, 我们有

$$\lim_{y \rightarrow -1} v_0(y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \quad (2.11a)$$

$$\lim_{y \rightarrow -1} u_0(y) = \frac{-i}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} 2na_{2n} \quad (2.11b)$$

$$\lim_{y \rightarrow -1} p_0(y) = -i\alpha \left[\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \right] \quad (2.11c)$$

其它量级的非齐次方程, 当 v_i 已知时 ($i < \text{量级} - 1$) 可以类似地求解. 就目前的分析, 我们求得 $O(\varepsilon)$ 量级的各分量就够了. 方程(2.2b)满足边界条件(2.3b)的级数为

$$v_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} y^{2n} \quad (2.12a)$$

相应的压力 p_1 和流体运动方向的速度分量为

$$u_1(y) = \frac{i}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} [2nb_{2n} y^{2n-1}] \quad (2.12b)$$

$$p_1(y) = -i\alpha \left\{ -c_0 y - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{b_{2n}}{2n+1} y^{2n+1} + \frac{c_0 a_{2n}}{2n+1} y^{2n+1} - \frac{b_{2n}}{2n+3} y^{2n+3} \right] \right\} \quad (2.12c)$$

式中系数 b_{2n} 可以由下式计算:

$$b_2 = \frac{1}{1 \times 2} (2a_2 - a^2) \quad (2.13a)$$

$$b_4 = \frac{1}{3 \times 4} [\alpha^2 b_2 + c_0 (3 \times 4\alpha - \alpha^2 a_2)] \quad (2.13b)$$

.....

$$b_{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)} [(2n-1)(2n-4)b_{2n-2} + \alpha^2(b_{2n-2} - b_{2n} - c_0 a_{2n-2}) + c_0 \cdot a_{2n}] \quad (n \geq 3) \quad (2.13c)$$

最后应该指出, 从系列方程(2.2)可以看出, 方程中的粘性扩散项在 $O(\varepsilon^3)$ 量级以后的方程中才会出现, 这说明在该区域中流体主要呈现非粘性特性, 是无粘的. 这一结论与一般的物理实验和理论分析是一致的.

三、粘性层分析

如第一小节所述, 在固壁附近的粘性层, 我们应用(1.3)将域 Ω_ε 映射为 Ω_ε, η , 为了满足连续性方程中 $ia u$ 与 $(1/\varepsilon)(dv/d\eta)$ 两项的平衡, 我们在 Ω_ε, η 中求如下形式的逼近解:

$$u = u(\varepsilon, \eta) = u_0(\eta)/\varepsilon + u_1(\eta) + \varepsilon u_2(\eta) + \dots \quad (3.1a)$$

$$v = v(\varepsilon, \eta) = v_0(\eta) + \varepsilon v_1(\eta) + \varepsilon^2 v_2(\eta) + \dots \quad (3.1b)$$

$$p = p(\varepsilon, \eta) = p_0(\eta) + \varepsilon p_1(\eta) + \varepsilon^2 p_2(\eta) + \dots \quad (3.1c)$$

显然 $u_n(\eta)$ 和 $v_n(\eta)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) 在所有量级都满足连续性方程:

$$O(\varepsilon^{n-1}): \quad ia u_n + \frac{dv_n}{d\eta} = 0 \quad (3.2)$$

将上述展开式(3.1)代入(1.2), 我们有下面的系列方程:

$$O(1/\varepsilon): \quad L'(v_0) = 0 \quad (3.3a)$$

$$O(1): \quad L'(v_1) = i \left[M(v_0) - c_1 \frac{d^2 v_0}{d\eta^2} \right] \quad (3.3b)$$

$$O(\varepsilon): \quad L'(v_2) = i \left[M(v_1) - c_1 \frac{d^2 v_1}{d\eta^2} - c_2 \frac{d^2 v_0}{d\eta^2} + 2\alpha^2 \frac{d^2 v_0}{d\eta^2} \right] \quad (3.3c)$$

.....

式中微分算子

$$L' = \frac{d^4}{d\eta^4} - i\bar{u}'_w \left(\eta - \frac{c_0}{\bar{u}'_w} \right) \frac{d^2}{d\eta^2}, \quad M = \bar{u}''_w \left(\frac{\eta^2}{2} \frac{d^2}{d\eta^2} - 1 \right) \quad (3.4a, b)$$

域

$$\Omega_{\varepsilon, \eta} = \{ \eta: \eta \in [\eta_w, \infty) \} \quad (3.4c)$$

$\eta_w = 0$ 表示在固壁上 η 所取得的值.

$v_n(\eta)$ 必须满足齐次边界条件

$$v_n(\eta) = 0, \quad v'_n(\eta) = 0 \quad \text{在 } \partial\Omega_{\varepsilon, \eta} = \{ \eta: \eta = \eta_w \} \quad (3.5)$$

由(1.2)的第二个动量方程, 我们可以求得压力 p_i 所满足的系列方程:

$$O(1): \quad \frac{dp_0}{d\eta} = 0 \quad (3.6a)$$

$$O(\varepsilon): \quad \frac{dp_1}{d\eta} = \frac{d^2 v_0}{d\eta^2} - i\alpha(\bar{u}'_w \eta - c_0)v_0 \quad (3.6b)$$

$$O(\varepsilon^2): \quad \frac{dp_2}{d\eta} = \frac{d^2 v_1}{d\eta^2} - i\alpha(\bar{u}'_w \eta - c_0)v_1 + \left(-\frac{\bar{u}''_w}{2} \eta^2 - c_1 \right) v_0 \quad (3.6c)$$

.....

为了求粘性层结构中各个方程的根, 我们引入变换

$$\zeta = K \left(\eta - \frac{c_0}{\bar{u}'_w} \right) \quad (3.7)$$

将方程的求解域 $\Omega_{\varepsilon, \eta}$ 映射为一个复数域 $\Omega_{\varepsilon, \zeta}$, 而上述方程可以化简为其解与 Airy 函数有关的一个系列方程. 式中

$$K = (i\bar{u}'_w)^{\frac{1}{3}} \quad (3.8a)$$

为一复数, 方程的定义域为

$$\Omega_{\varepsilon, \zeta} = \{ \zeta: \zeta \in [\zeta_w, \zeta_\infty) \} \quad (3.8b)$$

$$\zeta_w = -\frac{c_0}{\bar{u}'_w} K \quad (3.8c)$$

$$\zeta_\infty = \left\{ \zeta = r \exp[i\phi] \mid \phi = \arg(K) + \arg \left(\eta - \frac{c_0}{\bar{u}'_w} \right) \right\} \quad (3.8d)$$

而且

$$r \rightarrow \infty$$

事实上, 如果将(3.7)代入(3.3)我们有

$$O(1): \quad L^*(v_0) = 0 \quad (3.9a)$$

$$O(\varepsilon): \quad L^*(v_1) = \frac{i}{K^2} \left[M^*(v_0) - c_1 \frac{dv_0}{d\zeta} \right] \quad (3.9b)$$

$$O(\varepsilon^2): L^*(v_2) = -\frac{i}{K^2} \left[M^*(v_1) - \sum_{j=1}^2 c_j \frac{d^2}{d\xi^2} v_{2-j} + 2\alpha^2 K^4 \frac{d^2 v_0}{d\xi^2} \right] \quad (3.9c)$$

.....

$$\text{式中} \quad L^* = \frac{d^4}{d\xi^4} - \xi \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (3.10a)$$

$$M^* = \left[\frac{\bar{u}_w''}{2K^2} \left(\xi + \frac{c_0}{2} \right)^2 - 1 \right] \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (3.10b)$$

首次逼近的齐次方程可以化为Airy方程

$$X'' - \xi X = 0 \quad (3.11)$$

如果我们令

$$X = \frac{d^2 v_0}{d\xi^2} \quad (3.12a)$$

容易求得方程(3.3a)满足边界条件(3.4a)的解为

$$v_0 = A_0 \int_{\xi_w}^{\xi} \int_{\xi_w}^{\xi} A_i(z) dz \quad (3.12b)$$

或者写成

$$v_0 = A_0 \{ A_i'(\xi_w) - A_i'(\xi) + \xi \int_{\xi_w}^{\xi} A_i(z) dz \} \quad (3.12c)$$

这儿 A_0 是一个待定的常数,我们在下节将讨论它的取值.

利用已知的函数 v_0 我们由方程(3.6a)及连续性方程可以直接求解速度分量 $u_0(\xi)$ 与压力 $p_0(\xi)$,它们是:

$$p_0(\xi) = \frac{2iA_0}{\alpha} A_i'(\xi_w) \quad (3.13a)$$

$$u_0(\xi) = \frac{iA_0}{\alpha} \int_{\xi_w}^{\xi} A_i(z) dz \quad (3.13b)$$

式中 p_0 在粘性层为一常数,这完全与经典的边界层理论和数值解的结果相符合.

在求解(3.3)中 $O(1)$ 量级的方程时,由于 u_1 所满足的微分方程阶数较低,为了方便,我们用分量 u_1 代替 v_1 .事实上,如果应用连续性方程 $Dv_1 = i\alpha u_1$,并将上面求出的解函数 v_0 代入该方程的右端项得

$$\frac{d^3 u_1}{d\xi^3} - \xi \frac{du_1}{d\xi} = f^*(v_0) \quad (3.14a)$$

$$f^*(v_0) = \frac{-iA_0}{2\alpha} \left\{ \left[\left(\frac{\xi}{K} + \frac{c_0}{2} \right)^2 + c_1 \right] K^2 A_i(\xi) - 2 \int_{\xi_w}^{\xi} \int_{\xi_w}^{\xi} A_i(z) dz \right\} \quad (3.14b)$$

其满足边界条件的解是

$$u_1 = \frac{-iA_0}{2\alpha} \left[\frac{B_1}{5} + \frac{c_0 K}{3} \left(\frac{c_0^2}{4} - c_1 \right) B_2 - 2A_i'(\xi_w) I_1 + 2I_2 + c_1 I_3 \right] \quad (3.15)$$

$$\text{其中} \quad B_1 = \xi^2 A_i(\xi) - 3A_i'(\xi) + 3A_i'(\xi_w) - \xi_w^2 A_i(\xi_w) \quad (3.16a)$$

$$B_2 = A_i(\xi) - A_i(\xi_w) \quad (3.16b)$$

$$I_1 = \int_{\xi_w}^{\xi} B_3(z, 0) dz \quad (3.16c)$$

$$I_2 = \int_{\xi_w}^{\xi} \int_{\xi_w}^{\xi} A_i(z) dz \quad (3.16d)$$

$$I_3 = \int_{\xi_w}^{\xi} A_i(z) dz \quad (3.16e)$$

函数 $B_3(z, 0)$ 的定义见 (Drazin 和 Reid [3], p. 471)。

利用上面求得的解 v_0 和 u_1 , 压力 p_1 和速度分量 v_1 可以直接求得, 它们可以写为:

$$p_1 = A_0 K (1 - \alpha) I_3, \quad v_1 = \frac{A_0}{2K} \int_{\xi_w}^{\xi} u_1(z) dz \quad (3.17a, b)$$

四、特征值和相应的特征函数的渐近解析解

本文的最主要目的是求解当小扰动干扰波的波数为 $O(1)$ 时, 高雷诺数下 Orr-Sommerfeld 方程特征值问题的逼近解。在前面两节的两层结构分析中, 我们求出了各区域内的压力 p_i 和速度分量 u_i, v_i 的函数表示式, 本节我们将通过各分量在整个区域内的拟合来确定前面表示式中的待定常数 A_0 和特征值逼近关系式中的系数 c_i 。

为了明晰起见, 我们将待拟合的各个分量用表格表示如下:

	主流层	粘性层	
	$y \rightarrow -1$	$ \xi \rightarrow \infty$	
u分量	$i \sum_{n=1}^{\infty} 2na_{2n} y^{2n-1}$	$i \epsilon \alpha \int_{\xi_w}^{\xi} A_i(z) dz + u_1(\xi)$	(4.1a)

v分量	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} y^{2n}$	$A_0 \int_{\xi_w}^{\xi} \int_{\xi_w}^{\xi} A_i(z) dz$	(4.1b)
-----	---	---	--------

p分量	$-i\alpha (y - \frac{y^3}{3} - S_1)$	$i A_0 \frac{\bar{u}'_w}{\alpha} A'_1(\xi_w)$	(4.1c)
-----	--------------------------------------	---	--------

表中

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \left(\frac{y^{2n+1}}{2n+1} - \frac{y^{2n+3}}{2n+3} \right) \quad (4.1d)$$

根据微分方程逼近解理论, 令上表中 u_0, v_0, p_0 在主流层中, 当 $y \rightarrow -1$ 时的极限值与它在粘性层中的相应分量, 当 ξ 从 ξ_w 出发沿着路线 L (见图 1), 在区域 S_1 中沿着半射线 $\phi = (\pi/6) + \phi_e$ 使 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时的极限值相等。由于对于稳定模型 $c_i < 0$, ϕ_e 是一个小的正角度。我们可以推导出如下结果:

i) 表中式 (4.1) 由于 $O(1/\epsilon)$ 量级的出现, 我们必须有

$$\int_{\xi_w}^{\infty} A_i(z) dz = 0 \quad (4.2)$$

求解该 Airy 函数积分方程的根

$$\xi_w = 2^{-\frac{2}{3}} c_0 \exp[-11\pi i/12] \quad (4.3)$$

$$\text{得} \quad c_0 = 6.5541297 - 1.6868133i \quad (4.4)$$

ii) 由压力 p_0 的拟合关系式

$$\frac{2iA_0}{\alpha} A'_i(\xi_w) = i\alpha \left[\frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \right] \quad (4.5)$$

$$\text{得} \quad A_0 = \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \right] / A'_i(\xi_w) \quad (4.6)$$

iii) 由量级 $O(1)$ 中主流层分量 $u_0(-1)$ 与粘性层相应分量 $u_1(\infty)$ 的拟合关系式

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{5} \xi_w^2 + \frac{c_0 K}{3} \left(\frac{c_0^2}{4} - c_1 \right) - \frac{2I_2^*}{A_i(\xi_w)} \right] A_i(\xi_w) + \left(2I_1^* - \frac{3}{5} \right) A'_i(\xi_w) \\ & = -4 \sum_{k=1}^{\infty} K a_{2k} / \left\{ \left[\frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \right] / A'_i(\xi_w) \right\} \end{aligned} \quad (4.7a)$$

可以求得 c_1 的值, 式中

$$I_1^* = \int_{\xi_w}^{\infty} B_3(z, 0) dz \quad (4.7b)$$

$$I_2^* = \int_{\xi_w}^{\infty} \int_{\xi_w}^{\infty} A_i(z) dz \quad (4.7c)$$

函数 $B_i(z, 0)$ 是定义在 Stokes 线所化区域上的函数, 而函数 $A_i(z)$ 是按照 Anti-Stokes 线定义的. 积分 I_1^* 的积分线路是 \widehat{AB} (在区域 T_1 中) + \widehat{BC} (在区域 T_2 中) + CD (见图2). 为了确保 $B_i(z, 0)$ 在所经区域内为降函数, 我们采用如下循环关系式进行了转换.

$$B_1(z, p) - B_2(z, p) = 2iA_3(z, p) \quad (4.8a)$$

$$B_2(z, p) - B_3(z, p) = 2iA_1(z, p) \quad (4.8b)$$

$$B_3(z, p) - B_1(z, p) = 2iA_2(z, p) \quad (4.8c)$$

而积分 I_2^* 的积分线路是在 S_2 中 (anti-Stokes 线所分区域), 沿 \widehat{CD} 到 D 进入区域 S_1 , 沿半圆弧线 \widehat{DE} 到半射线 $\phi = (\pi/6) + \phi_0$ 趋于 ∞ . 同理为了保证上式积分收敛, 我们应用了循环关系式

$$A_i(z) = A_i(z, 0), \quad A'_i(z) = A_i(z, -1), \quad \int_{\xi_w}^{\infty} \int_{\xi_w}^{\infty} A_i(z) dz = A_i(z, 2) \quad (4.9a, b, c)$$

由 (4.7) 式可得常数

$$\begin{aligned} c_1 = & \left(\frac{3}{c_0 K} \right) \left\{ \left(\frac{3}{5} - 2I_1^* \right) \frac{A'_i(\xi_w)}{A_i(\xi_w)} - \left(\frac{1}{5} \xi_w^2 + \frac{c_0 K}{3} \cdot \frac{c_0^2}{4} \right) + 2 \left(\frac{I_2^*}{A_i(\xi_w)} \right) \right. \\ & \left. - 4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_{2n} \right) A'_i(\xi_w) / \left[\alpha^2 A_i(\xi_w) \left(\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{(2n+1)(2n+3)} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

其数值结果是:

$$\begin{aligned} c_1 &= -10.3427 + 0.629i && \text{当 } \alpha=1 \text{ 时} \\ c_1 &= -10.3951 + 0.612i && \text{当 } \alpha=0.8 \text{ 时} \\ c_1 &= -10.4391 + 0.598i && \text{当 } \alpha=0.5 \text{ 时} \\ c_1 &= -10.4535 + 0.594i && \text{当 } \alpha=0.3 \text{ 时} \end{aligned}$$

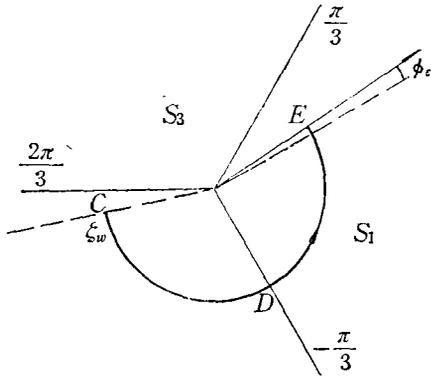


图1 $\int_{\xi_w}^{\infty} \int_{\xi_w}^{\infty} A_i(z) dz$ 的积分路线

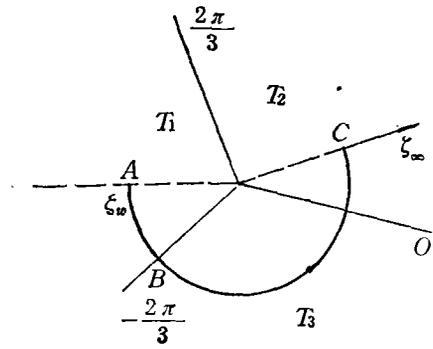


图2 $\int_{\xi_w}^{\infty} B_3(z, 0) dz$ 的积分路线

表1 特征值 c 的逼近解与数值解比较

	R	α	c_r	c_i
A)	10^{10}	1.	0.003040	-0.000780
B)			0.003045	-0.000777
A)	10^{11}	1.	0.001412	-0.000363
B)			0.001413	-0.0003624
A)		0.8	0.001521	-0.000391
B)			0.001523	-0.000390
A)		0.5	0.001780	-0.000458
B)			0.001784	-0.000453
A)		0.3	0.002108	-0.000543
B)			0.002128	-0.000527
A)	10^{12}	1.	0.000855	-0.000169
B)			0.000855	-0.000168
A)		0.5	0.000826	-0.000203
B)			0.000825	-0.000200
A)		0.3	0.000979	-0.000252
B)			0.000984	-0.000251
A)	10^{13}	1.	0.0003042	-0.0000783
B)			0.0003041	-0.0000786
A)	10^{14}	1.	0.0001412	-0.0000364
B)			0.0001412	-0.0000365
A)	10^{21}	1.	0.000000655	-0.000000188
			0.0000006559	-0.0000001883

注: A: 由式 $c = \epsilon c_0 + \epsilon^2 c_1 + \dots$ 所得结果, B: 由直接求解 Orr-Sommerfeld 方程所得结果

应该指出, 上面两层结构的分析是比较合理的. 表1中我们列出了 Orr-Sommerfeld 方程特征值由该逼近式中求得结果与其直接求解该方程的数值结果的比较, 可以看到它们有五位有效数字是相同的. 在图3中我们绘出了特征函数由上面两层结构分析中所得数值结果图形 (对于 $\alpha=1, R=10^{10}$) 它与我们以前直接求解 O-S 方程的数值结果接近, 只是在临界点附

近有小量的差别, 该文所述数学方法便于推广到更高阶的逼近, 同时也会适应于其它平行流和接近于平行流的稳定性分析。

最后, 笔者感谢英国帝国理工学院的 J. T. Stuart 教授, 在我们留学英国期间他给了很大的帮助和精心的指导, 并感谢该院计算中心提供使用计算机方面的方便。

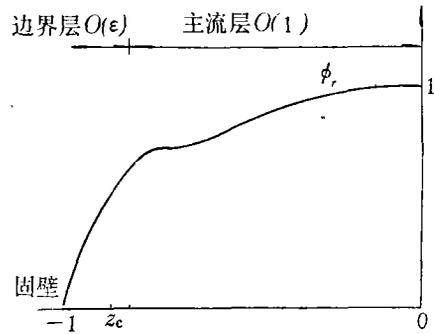


图3 特征函数的图形($\alpha=1$)

参 考 文 献

- [1] Abramowitz, M. and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematics*, Dover Publication, U.S.A. (1972).
- [2] Davey, A., A simple numerical method for solving Orr-Sommerfeld problems, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **26** (1973), 401—411.
- [3] Drazin, P. G. and W. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press (1982).
- [4] Hall, P. and F. T. Smith, A suggested mechanism for nonlinear wall roughness effects on high Reynolds number flow stability, *Studies in Appl. Math.*, **66** (1982), 241—265.
- [5] Stuart, J. T., *Laminar Turbulent Transition*, ed. R. Eppler and H. Fasel, Springer Verlag Berlin Heidelberg Press (1980).

Asymptotic Analysis of Stability Problem of Plane Poiseuille Flow for High Reynolds Number

Wang Fa-min

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Ng, Tiak Wan

(National University of Singapore, Singapore)

Abstract

A study of the stability of plane Poiseuille flow at higher Reynolds number is made. Within a "triple-deck" structural framework, the qualitative behaviour of the eigenvalue of Orr-Sommerfeld equation is analytically obtained. The corresponding eigenfunction is formulated approximately.