应用数学和力学，第9卷第3期（1988年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

厄密多项式在结构动力响应计算中的应用

张益松　徐尹格　高德平

（南京航空学院）（北京交通管理干部学院）（南京航空学院）

（1987年6月15日收到）

摘　要

本文利用正交多项式级数部分和的“最佳近似”性，推出了求解结构动力响应的付里叶-厄密多项式展开法．文中详细推导了振动系统的位移和速度响应的分步解析表达式，并讨论了计算格式的稳定性条件，通过了实例考核与精确度对比分析．

一、引　言

一个有限自由度系统，或弹性体在空间离散化后，可建立起它在各瞬时的动力响应关系式，用偏微分方程表示为：

$$M\ddot{x}(t)+C\dot{x}(t)+Kx(t)=p(t) \tag{1.1}$$

为计算离散系统的动力响应，即求出此方程在已知初始位移 $x(0)$ 和初始速度 $\dot{x}(0)$ 下的特解，常用振型迭加法或直接积分法[1]．振型迭加法，是把问题变换成一组独立的微分方程，每个自由度各对应一个方程，迭加各个方程的解，即得问题的结果．直接积分法，是在一系列的时间步长上对方程进行数值积分，在每一步长上计算位移、速度和加速度．虽然这是两种不同的求解方法，但从根本上来说，它们的区别仅在于描述运动的坐标基选得不同．振型迭加法只不过是以新的坐标基代替建立方程所用有限元的节点坐标基．

上述两种方法各有其特点．对于少量的低频振型就足以描述响应的问题，采用振型迭加法是有效的，如果全部振型都需要，则求解完整的一组特征向量就需要花费大量的计算时间，这时采用直接积分法处理较好．振型迭加法只适用于线性问题，而直接积分法却可用于非线性结构，只要在每一时间步长之后逐次修改依赖于变形的刚阵．

本文所提出的方法，在计算步骤上类似于直接积分法，也是从已知位移和速度的那一时刻开始，逐步递增时间，然后解出运动的代数方程．解是近似的，但选定合适的时间间隔可使结果接近于精确解．与直接积分法不同的是，它无需逐次修改刚阵，只需逐次修改力向量．且能利用每一已知的瞬时值推算出以后一段连续时间内的位移响应，给出此厄密多项式的展开级数表达的解析形式解．

二、厄密多项式及广义付氏级数

正交多项式组成重要的正交函数系，在作为基函数表示其它函数时，具有计算和研究方便的特点。厄密（Hermitel）多项式是特殊函数类中的一种正交多项式，是合流超几何函数的特例，其罗德利格斯表达式为[2]：

$$H_n(\tau)=(-1)^n\exp[\tau^2]\frac{d^n\exp[-\tau^2]}{d\tau^n}\qquad(n=0,1,2\cdots)\tag{2.1}$$

它可以看作展开式：

$$\exp[2\tau t-t^2]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\tau)}{n!}t^n\qquad(|t|<\infty)\tag{2.2}$$

的系数，上式左边称为这种多项式的母函数。据此，可以推出厄密多项式的各种性质。其重要特性之一，在于多项式与其导数之间有一简洁递推关系，即

$$H_n'(\tau)=2nH_{n-1}(\tau)\tag{2.3}$$

在 $\tau=0$处有[3]，

$$\left.\begin{aligned}&H_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\\&H_{2n+1}(0)=0,H_{2n}'(0)=0\\&H_{2n+1}'(0)=2(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

易于证明，厄密多项式 $H_n(\tau)$在$(-\infty,\ +\infty)$组成一带权 $\exp[-\tau^2]$的正交函数系，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(\tau)H_n(\tau)\exp[-\tau^2]d\tau=\begin{cases}2^n n!\sqrt{\pi} & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}\tag{2.5}$$

因此在区间$(-\infty,\ +\infty)$内，以厄密多项式为基本函数族，可以类似付里叶三角级数，把满足一定条件的函数$f(\tau)$展为广义付里叶级数[4]：

$$f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nH_n(\tau)\tag{2.6}$$

其中
$$f_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)H_n(\tau)\exp[-\tau^2]d\tau\tag{2.7}$$

据此，可以把定义在$(-\infty,+\infty)$且满足狄里赫莱条件的函数展开为付里叶-厄密多项式级数。

三、结构动力响应的计算公式

为求解结构振动的瞬态响应，在(1.1)式中将激振力$p(t)$展开为付里叶-厄密多项式级数，即：

$$p(t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_nH_n(\tau)\tag{3.1}$$

其中
$$P_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}p(t)H_n(\tau)\exp[-\tau^2]d\tau\tag{3.2}$$

$$\tau=t/T_0 \tag{3.3}$$

τ 为无量纲变数，T_0为给定参考周期，设

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nH_n(\tau) \tag{3.4}$$

其中

$$A_n=\frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)H_n(\tau)\exp[-\tau^2]d\tau \tag{3.5}$$

对(3.4)式关于 t 求导得：

$$\dot{x}(t)=\frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)A_{n+1}H_n(\tau) \tag{3.6}$$

$$\ddot{x}(t)=\frac{1}{T_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}4(n+2)(n+1)A_{n+2}H_n(\tau) \tag{3.7}$$

将(3.1)，(3.4)，(3.6)，(3.7)代入(1.1)式，并比较$H_n(\tau)$的系数，得，

$$\frac{1}{T_0^2}4(n+2)(n+1)MA_{n+2}+\frac{1}{T_0}2(n+1)CA_{n+1}+KA_n=P_n \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.8}$$

这里，如果M，C，K为$m\times m$阶矩阵，则A_n，P_n为m维向量．又由(3.6)，(3.7)式及已知初始条件，有：

$$x(0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nH_n(0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(-1)^n\frac{(2n)!}{n!} \tag{3.9}$$

$$\dot{x}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nH_n'(0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}2(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!} \tag{3.10}$$

这里记

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad H_n'=\frac{dH_n}{d\tau}$$

(3.8)式有以下两个等价形式：

$$\frac{1}{T_0^2}4(2n+2)(2n+1)MA_{2n+2}+\frac{1}{T_0}2(2n+1)CA_{2n+1}+KA_{2n}=P_{2n} \tag{3.8$'$}$$

$$\frac{1}{T_0^2}4(2n+3)(2n+2)MA_{2n+3}+\frac{1}{T_0}2(2n+2)CA_{2n+2}+KA_{2n+1}=P_{2n+1} \tag{3.8$''$}$$

在(3.8)′和(3.8)″两边分别同乘$(-1)^n\frac{(2n)!}{(n+1)!}$和$(-1)^n\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}$，并对$n$从0到$\infty$求和，得以下两式：

$$-\frac{4}{T_0^2}M(x(0)-A_0)+\frac{2C}{T_0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}A_{2n+1}$$

$$+K\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n+1)!}A_{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n+1)!}P_{2n} \tag{3.11}$$

$$-\frac{2}{T_0}M(\dot{x}(0)-\frac{2}{T_0}A_1)-\frac{2}{T_0}C(x(0)-A_0)$$

$$+K\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}A_{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}P_{2n+1} \tag{3.12}$$

由于

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}=p(0),\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}=\dot{p}(0)$$

其中 $p(0)$和$\dot{p}(0)$都为有限值，由此推知，(3.11)和(3.12)等式右边的项都为收敛的，对于实际问题可求出确定值，记

$$\bar{p}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{(n+1)!}P_{2n} \tag{3.13}$$

$$\tilde{p}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}P_{2n+1} \tag{3.14}$$

由于厄密多项式的加权正交性，一般当 n 较大时，向量 A_n 的模很快趋于较小量级，所以在(3.11)和(3.12)左端求和式中，可略去 $n\geqslant2$的各 A_n 项，从而此两式化为

$$\frac{-4}{T_0^2}M(x(0)-A_0)+\frac{2}{T_0}CA_1+KA_0=\bar{p} \tag{3.11$'$}$$

$$-\frac{2}{T_0}M(\dot{x}(0)-\frac{2}{T_0}C(x(0)-A_0)+KA_1=\tilde{p} \tag{3.12$'$}$$

联立求解上两式得

$$A_0=\left[\left(\frac{4}{T_0^2}M+K\right)-\frac{4}{T_0^2}C\left(\frac{4}{T_0^2}M+K\right)^{-1}C\right]^{-1}\left\{\frac{4}{T_0^2}\left[M-C\left(\frac{4}{T_0^2}M+K\right)^{-1}C\right]x(0)\right.$$

$$\left.-\frac{4}{T_0^2}C\left(\frac{4}{T_0^2}M+K\right)^{-1}M\dot{x}(0)+\bar{p}-\frac{2C}{T_0^2}\left(\frac{4}{T_0^2}M+K\right)^{-1}\tilde{p}\right\} \tag{3.15}$$

$$A_1=\left(\frac{4}{T_0^2}M+K\right)^{-1}\left[\frac{2}{T_0}Cx(0)+\frac{2}{T_0}M\dot{x}(0)+\tilde{p}-\frac{2}{T_0}CA_0\right] \tag{3.16}$$

再由(3.8)式得

$$A_n=\frac{T_0^2}{4n(n-1)}M^{-1}\left[P_{n-2}-KA_{n-2}-\frac{2(n-1)}{T_0}CA_{2-1}\right]\qquad(n\geqslant2) \tag{3.17}$$

得到了A_n后，代回(3.4)和(3.6)式，即得时间步长Δt处的位移和速度

$$x(\Delta t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nH_n(\Delta\tau) \tag{3.4$'$}$$

$$\dot{x}(\Delta t)=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)A_{n+1}H_n(\Delta\tau) \tag{3.6$'$}$$

其中 $\qquad \Delta\tau=\Delta t/T_0 \qquad$ (3.3)′

至于步长的选取应考虑稳定性的要求。

四、计算格式的稳定性

为考虑计算格式的稳定性[5]，在无外力，无阻尼条件下，寻求单自由度系统的逼近算子，即已知$x(0)$和$\dot{x}(0)$，求解方程，

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0 \tag{4.1}$$

由(3.15)，(3.16)和(3.17)依次得：

$$A_0=\frac{x(0)}{1+T_0^2\omega^2/4} \tag*{(3.15)$'$}$$

$$A_1=\frac{\dot{x}(0)\cdot T_0/2}{1+T_0^2\omega^2/4} \tag*{(3.16)$'$}$$

$$A_n=-\frac{T_0^2\omega^2 A_{n-2}}{4n(n-1)} \qquad (n\geqslant 2) \tag*{(3.17)$'$}$$

代入(3.4)′和(3.6)′得

$$\begin{aligned}x(\Delta t)&=\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}H_{2n}(\Delta\tau)+\sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}H_{2n+1}(\Delta\tau)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(T_0\omega)^{2n}}{2^{2n}(2n)!}\frac{x(0)}{1+T_0^2\omega^2/4}H_{2n}(\Delta\tau)\\&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(T_0\omega)^{2n}}{2^{2n}(2n+1)!}\cdot\frac{\dot{x}(0)\cdot T_0/2}{1+T_0^2\omega^2/4}H_{2n+1}(\Delta\tau)\end{aligned} \tag*{(3.4)$''$}$$

$$\begin{aligned}x(\Delta t)&=\frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(T_0\omega)^{2(n+1)}}{2^{2n+1}(2n+1)!}\cdot\frac{x(0)}{1+T_0^2\omega^2/4}H_{2n}(\Delta\tau)\\&\quad+\frac{1}{T_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(T_0\omega)^{2n}}{2^{2n-1}(2n)!}\cdot\frac{\dot{x}(0)\cdot T_0/2}{1+T_0^2\omega^2/4}H_{2n+1}(\Delta\tau)\end{aligned} \tag*{(3.6)$''$}$$

可以证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(T_0\omega)^{2n}}{2^{2n}(2n)!}H_{2n}(\Delta\tau)=\exp[(T_0\omega/2)^2]\cos\Delta\tau$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(T_0\omega)^{2n}}{2^{2n+1}(2n+1)!}H_{2n+1}(\Delta\tau)=\exp[(T_0\omega/2)^2]\sin\Delta\tau$$

其证明从略，代入(3.4)″和(3.6)″后，统一写成矩阵运算形式如下：

$$\begin{bmatrix}x(\Delta t)\\ \dot{x}(\Delta t)\end{bmatrix}=\frac{\exp[(T_0\omega/2)^2]}{1+(T_0\omega/2)^2}\begin{bmatrix}\cos\Delta\tau & T_0\sin\Delta\tau\\ -\dfrac{1}{T_0}(T_0\omega)^2\sin\tau & \cos\Delta\tau\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(0)\\ \dot{x}(0)\end{bmatrix} \tag{4.2}$$

上式系数矩阵就是逼近算子，其特征根为

$$\lambda=\frac{\exp[(T_0\omega/2)^2]}{1+(T_0\omega/2)^2}(\cos\Delta\tau\pm j\cdot T_0\omega\sin\Delta\tau)$$

谱半径：$$|\lambda|=\frac{\exp[(T_0\omega/2)^2]}{1+(T_0\omega/2)^2}\sqrt{\cos^2\Delta\tau+(T_0\omega)^2\sin^2\Delta\tau} \tag{4.3}$$

为使$|\lambda|\leqslant 1$，首先需$(T_0\omega)<1$，而$\Delta\tau$的取值应在离散值$\sin^{-1}1+k\pi(k=0,1,\cdots\cdots)$附近。这是一个有条件稳定的计算格式，$(T_0\omega)$越小，则$\Delta\tau$的稳定性范围越宽。同时，从精确性考虑，$(T_0\omega)$也不宜取得太小，所以$\Delta\tau(=\Delta t/T_0)$应权衡取值。对于多自由度问题，频率$\omega$为系统的最高频率$\omega_{\max}$，参考周期$T_0$应小于$1/\omega_{\max}$。

五、计 算 例 子

设有一单自由度系统，满足二阶常微分方程：

$$\ddot{x}+x=1 \tag{5.1}$$

给定边界条件：

$$\dot{x}(0)=x(0)=0 \tag{5.2}$$

本问题中，$K=M=1$，$C=0$

$$p(t)=\begin{cases}1 & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

将力函数代入(3.2)式，得

$$\left.\begin{aligned}&P_0=\frac{1}{2}\\ &P_n=\frac{H_{n-1}(0)}{2^n n!\sqrt{\pi}} \qquad (n\geqslant 1)\end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

即

$$P_{2n}=0 \qquad (n\geqslant 1) \tag{5.4}$$

$$P_{2n+1}=\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}n!(2n+1)\sqrt{\pi}} \tag{5.5}$$

代入(3.13)和(3.14)得：

$$\bar{p}=1/2 \tag*{(3.13)'}$$

$$\tilde{p}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!} \tag*{(3.14)'}$$

为求(3.14)′的级数和，令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n+1)n!}x^{n+1}$$

可证

$$\begin{cases}(4x-1)f''(x)+2f'(x)=0\\ f(0)=0 \qquad f'(0)=1\end{cases}$$

由此解得

$$f(x)=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4x})$$

所以

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

从而
$$\tilde{p}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}2f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \tag{3.14$''$}$$

将(5.3)，(5.4)，(5.5)，(3.13)′，(3.14)″代入(3.15)，(3.16)，(3.17)，(这里暂取$T_0=1$)，得

$$\begin{cases} A_0=\dfrac{1}{5}\bar{p} \\ A_1=\dfrac{1}{5}\tilde{p} \\ A_n=\dfrac{P_{n-2}-A_{n-2}}{4n(n-1)} \qquad (n\geqslant 2) \end{cases}$$

实际上从(5.1)易知其精确解为：

$$x=\begin{cases} 1-\cos t & (t\geqslant 0) \\ 0 & (t<0) \end{cases}$$

代入(3.5)式得

$$A_0'=\frac{1}{2}\left(1-\exp\left[-\frac{1}{4}\right]\right)$$

$$A_{2n}'=\frac{(-1)^{n-1}\exp\left[-\dfrac{1}{4}\right]}{2^{2n+1}(2n)!} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

比较A_n和A_n'，参见表1，可见本文方法的近似程度。这里因不便给出A_{2n+1}'的精确值，所以，没将A_{2n+1}与之比较。$\bar{A}_n$是在(3.11)，(3.12)式中考虑了截断项的影响而进行一次迭代后的值。

表 1

n	A_n	A_n'	A_n-A_n'	$\bar{A}_n$
0	0.100000E+00	0.110600E+00	−0.105996E−01	0.110860E−00
2	0.500000E−01	0.486750E−01	0.132495E−02	0.486425E−01
4	−0.104167E−02	−0.101406E−02	−0.276032E−04	−0.101339E−02
6	0.868056E−05	0.845053E−05	0.230027E−06	0.844488E−05
8	−0.387525E−07	−0.377256E−07	−0.102690E−08	−0.377004E−07
10	0.107646E−09	0.104793E−09	0.285251E−11	0.104723E−09
12	−0.203875E−12	−0.198472E−12	−0.540248E−14	−0.198339E−12
14	0.280048E−15	0.272627E−15	0.742101E−17	0.272444E−15
16	0.291716E−18	−0.283986E−18	−0.773021E−20	−0.283796E−18
18	0.238330E−21	0.232015E−21	0.631551E−23	0.231860E−21
20	−0.156796E−24	−0.152641E−24	−0.415494E−26	−0.152539E−24
22	0.848464E−28	0.825981E−28	0.224835E−29	0.825429E−28
24	−0.384268E−31	−0.374085E−31	−0.101827E−32	−0.373836E−31
26	0.147795E−34	0.143879E−34	0.391644E−36	0.143628E−34
28	−0.004887E−36	−0.004758E−36	−0.000130E−36	−0.004743E−36
30	0.000001E−36	0.000001E−36	0.000000E−36	0.000001E−36

在(3.4)和(3.6)中，分别取二、三、四、五、六项，以已知的 A_n 代入计算，结果与精确值比较得位移值和速度值分别如表 2、表 3 所示。

表 4 为以 $\bar{A}_n$ 代之以 A_n 所得的位移响应值。

表 2

t	精确值	$\sum_{i=0}^{n} A_i H_i(\Delta\tau)$				
		取二项	取三项	取四项	取五项	取六项
0.50	0.122417E+00	0.162838E+00	0.127576E+00	0.126534E+00	0.110872E+00	0.111141E+00
0.75	0.268311E+00	0.281757E+00	0.242087E+00	0.252439E+00	0.240943E+00	0.242197E+00
1.00	0.459698E+00	0.425676E+00	0.397466E+00	0.418300E+00	0.421356E+00	0.422953E+00
1.25	0.684678E+00	0.594595E+00	0.599002E+00	0.623937E+00	0.648708E+00	0.649379E+00
1.50	0.929263E+00	0.788514E+00	0.851985E+00	0.867610E+00	0.912304E+00	0.910560E+00
1.75	0.117825E+01	0.100743E+01	0.116170E+01	0.114601E+01	0.119272E+01	0.118770E+01
2.00	0.141615E+01	0.125135E+01	0.153345E+01	0.145428E+01	0.146039E+01	0.145324E+01
2.25	0.162817E+01	0.152027E+01	0.197250E+01	0.178598E+01	0.167414E+01	0.167003E+01
2.50	0.180114E+01	0.181419E+01	0.248416E+01	0.213312E+01	0.177377E+01	0.179066E+01
2.75	0.192430E+01	0.213311E+01	0.307372E+01	0.248615E+01	0.170864E+01	0.175685E+01
3.00	0.198999E+01	0.247703E+01	0.374645E+01	0.283395E+01	0.137623E+01	0.149894E+01

表 5 为取 $T_0\omega=0.5$ 时所得的位移响应值。表 6 为本文方法与 Wilson-θ 法(步长取1.0)及精确值比较表格。

表 3

t	精确值	$\sum_{i=0}^{n} A_i H_i(\Delta\tau)$				
		取二项	取三项	取四项	取五项	取六项
0.50	0.479426E+00	0.383362E+00	0.425028E+00	0.421208E+00	0.425479E+00	0.431021E+00
0.75	0.681639E+00	0.536254E+00	0.583129E+00	0.621091E+00	0.624226E+00	0.650059E+00
1.00	0.841471E+00	0.710304E+00	0.743638E+00	0.820038E+00	0.819205E+00	0.852096E+00
1.25	0.948985E+00	0.905511E+00	0.900303E+00	0.991745E+00	0.984990E+00	0.998802E+00
1.50	0.997495E+00	0.112188E+01	0.104688E+01	0.110418E+01	0.109199E+01	0.105606E+01
1.75	0.983986E+00	0.135940E+01	0.117710E+01	0.111957E+01	0.110683E+01	0.100340E+01
2.00	0.909297E+00	0.161807E+01	0.128474E+01	0.994419E+00	0.992752E+00	0.845456E+00
2.25	0.778073E+00	0.189791E+01	0.136354E+01	0.679510E+00	0.710008E+00	0.625436E+00
2.50	0.598472E+00	0.219890E+01	0.140724E+01	0.119885E+00	0.216239E+00	0.440580E+00
2.75	0.381661E+00	0.252105E+01	0.140959E+01	−0.745144E+00	−0.533129E+00	0.459651E+00
3.00	0.141120E+00	0.286436E+01	0.136436E+01	−0.198199E+01	−0.158449E+01	0.942432E+00

表 4

t	精确值	$\sum_{i=0}^{n} A_i H_i(\Delta\tau)$				
		取二项	取三项	取四项	取五项	取六项
0.50	0.122417E+00	0.180152E+00	0.145951E+00	0.144938E+00	0.129385E+00	0.129647E+00
0.75	0.268311E+00	0.299922E+00	0.261447E+00	0.271517E+00	0.260101E+00	0.261322E+00
1.00	0.459698E+00	0.444013E+00	0.416653E+00	0.436921E+00	0.439956E+00	0.441510E+00
1.25	0.684678E+00	0.612426E+00	0.616701E+00	0.640959E+00	0.665558E+00	0.666210E+00
1.50	0.929263E+00	0.805160E+00	0.866721E+00	0.881921E+00	0.926305E+00	0.924608E+00
1.75	0.117825E+01	0.102222E+01	0.117184E+01	0.115658E+01	0.120296E+01	0.119808E+01
2.00	0.141615E+01	0.126359E+01	0.153719E+01	0.146018E+01	0.146625E+01	0.145929E+01
2.25	0.162817E+01	0.152929E+01	0.196791E+01	0.178645E+01	0.167538E+01	0.167139E+01
2.50	0.180114E+01	0.181931E+01	0.246911E+01	0.212760E+01	0.177670E+01	0.178730E+01
2.75	0.192430E+01	0.213365E+01	0.304594E+01	0.247432E+01	0.170222E+01	0.174912E+01
3.00	0.198999E+01	0.247231E+01	0.370352E+01	0.281579E+01	0.136819E+01	0.149757E+01

表 5

t	精确值	$\sum_{i=0}^{n} A_i H_i(\Delta\tau)$				
		取二项	取三项	取四项	取五项	取六项
0.50	0.122417E+00	0.161484E+00	0.152632E+00	0.152371E+00	0.149132E+00	0.149149E+00
0.75	0.268311E+00	0.280045E+00	0.270085E+00	0.272673E+00	0.270296E+00	0.270374E+00
1.00	0.459698E+00	0.423605E+00	0.416523E+00	0.421731E+00	0.422363E+00	0.422463E+00
1.25	0.684678E+00	0.592165E+00	0.593272E+00	0.599505E+00	0.604628E+00	0.604670E+00
1.50	0.929263E+00	0.785725E+00	0.801660E+00	0.805666E+00	0.814803E+00	0.814700E+00
1.75	0.117825E+01	0.100429E+01	0.104302E+01	0.103903E+01	0.104875E+01	0.104844E+01
2.00	0.141615E+01	0.124785E+01	0.131867E+01	0.129888E+01	0.130014E+01	0.129969E+01
2.25	0.162817E+01	0.151641E+01	0.162994E+01	0.158331E+01	0.156018E+01	0.155993E+01
2.50	0.180114E+01	0.180997E+01	0.197817E+01	0.189041E+01	0.181734E+01	0.181802E+01
2.75	0.192430E+01	0.212853E+01	0.236468E+01	0.221778E+01	0.205700E+01	0.206001E+01
3.00	0.198999E+01	0.247209E+01	0.279079E+01	0.256266E+01	0.226122E+01	0.226885E+01

表 6

	t	精确解	本文方法 取四项	Wilsoll-θ (步长1.0)
位移	1.0	0.459698	0.418300	0.412060
	2.0	1.41615	1.45428	1.26077
速度	1.0	0.841471	0.820038	0.736181
	2.0	0.909297	0.994419	0.837583

六、讨　论

从表 1 看出，A_n的值很接近于A_n'的值，说明从(3.11)，(3.12)至(3.11)′，(3.12)′的推导过程中引入的近似是合理的。而且也可以看到，n越大时，A_n比A_{n+1}要高约三个量级，舍去后几项，引入的截断误差不会太大。A_n经过一次迭代后的数值$\bar{A}_n$与A_n'更为接近。

由表2和表3，可以看到结果令人满意的。一般来说，项数取得越多，结果就越接近精确值。在不同的t处，结果的偏离程度有好有坏，这不难解释。从公式(4.3)出发，应以$|\lambda|\leqslant 1$作为基准选择$\Delta\tau$，分步长递推可得更为理想的结果。如所料，表4的结果更显精确一些。表5在参考周期T_0取较小时所计算的位移值，近似程度也较好。表6说明了本文方法的精度比Wilson-θ法还高。

本文方法较之用幂级数展开方法[6]有明显的优点。因为它对于力函数利用积分方法展开，适用于某些离散或分段连续函数及导数不存在的场合，应用上较为方便。按正交多项式展开的付里叶级数，其部分和是函数空间中的"最佳平方逼近"，它比一般幂级数有限和表达方式的精度高。

参考文献

[1] Bathe, K. J. and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Elements Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 306-362.

[2] Arthur Erdélyi, *High Transcendental Functions*, Vol. II., McGraw-Hill Book Co. Inc. (1953).

[3] H. H. 列别捷夫，《特殊函数及其应用》，张燮译，高等教育出版社 (1957).

[4] 王竹溪、郭敦仁，《特殊函数概论》，科学出版社 (1979).

[5] Yienkiewicz, D. C., *The Finite Element Methods*, third edition, McGraw-Hill Book Co., 569-606.

[6] 朱礼文，结构响应分析的幂级数方法，应用力学学报，1 (1987).

The Usage of Hermite Polynomial in the Calculation of Structural Dynamic Responses

Zhang Yi-song

(*Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing*)

Xu Yin-ge

(*Beijing Jiaotong Manager College, Beijing*)

Gao De-ping

(*Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing*)

Abstract

This paper employs the best approximation of part series sum of normal polynomials, and propeses a new method with the Fourier-Hermite polynomial expansion expressing structural dynamic responses. Analytic expressions of displacement and velocity responses of vibrational systems are established in this paper, and stability condition of the step-by-step algorithm is discussed. Finally, a computational example is demonstrated, and the precision of its results is compared with conventional methods.