

文章编号: 1000-0887(2004) 03-0239-08

周期分岔解的鲁棒控制*

梁建术¹, 陈予恕¹, 梁以德²

(1. 天津大学 力学系, 天津 300072;

2. 香港城市大学 建筑与结构工程系, 香港)

(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 根据 C_L 方法, 可以得到非线性动力系统的分岔方程和拓扑分岔图. 根据得到的分岔图, 结合控制理论, 提出了周期解的鲁棒控制方法. 该方法将运动模式控制到目标模式. 由于该方法对控制器的参数没有严格的控制, 所以在设计和制造控制器方面是很方便的. 数值研究验证了该方法的有效性.

关键词: 分岔; 拓扑结构; 分岔控制; C_L 方法

中图分类号: O332; O231 文献标识码: A

引 言

考虑下面的动力系统

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

其中 x 和 $f(x)$ 是 n 维向量, “ \cdot ” 表示对时间 t 的导数. 假设 $x = u(t)$ 是方程(1) 的周期为 T 的一个周期解. 如果 $F(x, t, \varepsilon)$ 是关于 x 和 t 的 T 周期的解析函数, Krylov 和 Bogoliubov^[1] 已经证明了方程

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon F(x, t, \varepsilon) \quad (2)$$

有 T 周期解, ε 为小摄动参数. 然而, 他们并没有建立周期解的拓扑结构和系统参数之间的关系, 这种关系不仅在理论上是非常重要的, 而且在振动应用中也是有意义的. 陈予恕和 Langford^[2] 首先发现了这个问题, 并根据应用 LS 约化和奇异性理论发展了一种称之为 C_L 方法^[3]. 并研究了一般的 Mathieu 方程, 给出了六种典型的响应曲线. 当然这也是首次将 LS 约化应用到非自治动力系统中.

本文根据 C_L 方法和控制理论, 提出了一种新的分岔控制方法. 当用于非线性系统的运动模式控制时, 可使得运动模式简单并且稳定.

在第 1 节中, 我们简单仅述了 C_L 方法, 对于无控制的一般 Mathieu 方程得到分岔图, 给出了系数 a_1 , b_1 和 c_1 的计算公式. 在第 2 节中, 提出了周期分岔解的鲁棒控制方法, 给出了控制

* 收稿日期: 2002_11_29; 修订日期: 2003_11_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19990510); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G1998020316); 博士点基金资助项目(D09901, D0200201)

作者简介: 梁建术(1963—), 男, 河北人, 博士(联系人. Tel: 86_311_7813895(h), 13930185695; E_mail: js-liang@eyou.com).

准则和控制函数。在第3节中,数值验证了该方法的有效性。

1 C_L方法和无控制非线性 Mathieu 的分岔图

为了使运动模式简单和稳定,有必要首先研究无控制非线性动力系统的拓扑分岔结构。在文献[2]中,对于一般 Mathieu 方法,给出了周期解的拓扑结构。

考虑具有控制器的一般 Mathieu 方程

$$\ddot{x} + \delta[f(x) + h(x, x, \mu, \delta)] + (1 + \mu)x + f(x, x, \mu) + 2\varepsilon \cos 2t [x + g(x, x, \mu, \varepsilon)] + w(x, x) = 0, \quad (3)$$

其中 μ 为调谐参数,非线性项 h, f 和 g 是 x, x 的解析函数, $w(x, x)$ 为控制器函数。当 $w(x, x) = 0, \delta \neq 0, \varepsilon \neq 0$ 时,根据 LS 约化^[4],给出了分岔方程

$$G = (\mu + i\delta)z + \varepsilon \langle e^{3it}, w \rangle + \langle e^{it}, \delta h + f + 2\varepsilon g \cos 2t \rangle = 0 \quad (4)$$

再根据奇异性理论^[5],得到转迁集

$$R_1 = (\mu + \kappa^2)^2 + \alpha + \beta = 0, \quad (5)$$

$\alpha = \delta^2 - \varepsilon^2$ 和 $\beta = (2/|a_1|)(b_1\delta^2 - c_1\varepsilon^2)(1 + O(\varepsilon^4))$ 为开折参数。系数 a_1, b_1, c_1 分别为

$$a_1 = \frac{1}{2}(f_{xxx} + f_{xx'x'}) - \frac{5}{6}f_{xx}(f_{xx} + f_{x'x'}) - \frac{1}{3}f_{x'x'}^2, \quad (6)$$

$$b_1 = - \left[\frac{1}{2}(h_{xxx'} + h_{x'x'x'}) - \frac{1}{2}h_{xx'}(f_{xx} + f_{x'x'}) + \frac{1}{9}f_{xx}^2 + \frac{1}{9}f_{xx}f_{x'x'} - \frac{2}{9}f_{x'x'}^2 \right], \quad (7)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(g_{xxx} + g_{x'x'x'}) - \frac{1}{2}g_{xx}(2f_{xx} + f_{x'x'}) + \frac{1}{6}g_{x'x'}(2f_{xx} + f_{x'x'}) + \frac{1}{16}f_{xxx} + \frac{5}{16}f_{xx'x'} - \frac{1}{48}[21f_{xx}^2 + 25f_{xx}f_{x'x'} + 26f_{x'x'}^2]. \quad (8)$$

方程(6)~(8)中的导数都是在(0)点计算的。

图1给出了系统(3)的转迁集和分岔图。 B_i 和 H_i 分别表示分岔集和滞后集。 H_i 曲线可由 $\alpha = -\beta^2/4$ 给出。在 $\alpha\beta$ 平面内,六个区域中的每一个区域都有自己的拓扑响应曲线。Bogoliubov^[6] 和 Nayfeh^[7] 分别应用平均法和多尺度法研究了 Mathieu-Duffing 方程,所得到的结果分别为图1中的3区域和4区域,其原因他们研究的系统参数范围不同。C_L方法统一这一似乎矛盾的结论。

C_L方法的工程意义表现在三个方面:

1) 从设计上说,利用这种分岔图的拓扑结构和参数之间的关系,可选择系统参数以便使运动状态更为合理和稳定,即优化设计;

2) 从系统识别上说,从响应曲线对应的分岔模式在开折参数空间对应的区域,可确定出系统物理参数的非线性种类。

3) 分岔模式的鲁棒控制,如已知某确定系统的分岔模式为④,可改变参数使之达到所要

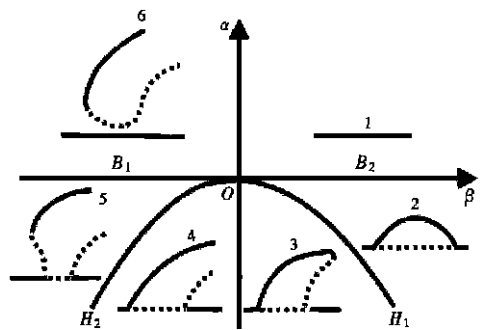


图1 周期分岔解的拓扑分岔图

求的分岔模式②

本文主要是对第三个方面的研究

2 周期分岔解的鲁棒控制

在 $\alpha\beta$ 平面上, 转迁集 $\alpha = -\beta^2/4$, $\alpha = 0$ 和 $\beta = 0$ 将 $\alpha\beta$ 平面划分成 6 个区域(如图 1 所示)。每一个区域都有自己特有的分岔曲线, 在不同的域内分岔曲线的拓扑结构不同, 而在任何一个区域中的所有点都有着相同的拓扑结构的分岔曲线。在 3, 4, 5, 6 区域中均发生了滞后跳跃现象, 使得一个 μ 值对应两个非零定常解, 初始条件决定了那一个解是系统的真实响应。在区域 2 中没有这种现象发生, 即一个 μ 值对应一种运动。由此可以看出, 不同的区域内解的动态特性也不尽相同, 其中区域 2 的运动是一对一的简单的运动。

运动的形式取决于系统的系数和函数 f, g, h 的形式。它们的不同的组合产生不同的运动特征。在工程实际中, 一般说来希望所设计系统的运动越简单越好, 因此, 在结构设计过程中可选系统参数使之达到要求的目标。但有时由于种种因素的限制, 无法使系统处于最佳状态, 此时, 我们可以通过对系统施加控制(或摄动)使系统的运动满足工程运行的要求。

2.1 分岔控制的概念

所谓周期分岔的鲁棒控制就是, 根据系统的力学模型建立数学方程, 用 C.L 方法对之做周期解分岔分析, 根据开折参数平面的分岔图, 选择“目标运动模式”, 依之可计算鲁棒控制器的函数。由于周期解分岔的运动模式在一个开着参数域中是保持的, 所以, 对控制器的结构参数并不提出严格数值的要求, 因而易于工程实现。而通常的分岔控制指的是通过控制手段去改变动力系统分岔现象的各种特征。典型的分岔控制包括镇定不稳的分岔轨道^[8~13], 延迟分岔的出现^[9], 改变分岔点对应的系统参数值^[11], 改变分岔轨道的形状或类型^[10], 有目的地引起新的分岔^[12], 控制极限环的个数、大小、周期、或重数^[13], 优化系统在分岔点附近的动力行为^[14], 通过控制分岔来控制混沌^[8, 11, 15], 等等, 有时甚至会它们的某种组合。

2.2 分岔控制的一些常用方法

尽管分岔现象一般来说十分复杂, 它并不象混沌现象那样放荡不羁而难于预测。因此, 对于分岔能否控制的问题, 人们一开始就没有疑问。然而, 它又不象镇定混沌那样直接, 据我们所知, 分岔只可以用不多的几种方法来控制, 尽管各种方法都有其理论分析和实验或模拟验证, 并且在工程、生物、物理、化学、军事等领域都有一些非常规的应用^[16]。

目前, 分岔控制的手段有几种线性和非线性反馈方法, 应用 wash_out_filter, 频域分析和逼近方法, 以及利用正规型理论, 等等。一般而言, 线性特别是非线性状态反馈是行之有效的分岔控制方法。例如, 应用 wash_out_filter 的状态反馈分岔控制可以应用于高维系统和多种分岔现象的控制, 如果控制问题牵涉到极限环, 则频域分析和逼近方法十分有效。此外, 正规型理论也是分岔分析中常用的自然和精确的工具。

如前所述, 分岔控制的一个难点是要求所用的控制器不能改变分岔的存在性, 而这一要求通常是通过首先满足不改变不动点的存在性而达到的。很多常规的控制器都不满足这个要求, 因为它们大都是按稳定性原则来设计的, 而这一原则又大都依赖于被控制系统的渐近性态。另外, 设计控制器的时候要遵循控制器不能过于复杂的基本原则, 特别是不能比给定的系统还要复杂, 否则就失去实用价值。因此, 分岔控制的设计已经引起了数学、物理、工程、化学、生物, 特别是控制论的专家们的注意。

2.3 鲁棒控制器的设计

在方程(3)中,如控制函数 $w(x, x') = 0$, 则方程(3)成为一般的非线性参数激励振动方程: 如再有 $\varepsilon = 0$, 则方程(3)成为一般的非线性振动方程, 它可含 Duffing 系统, van der Pol 系统, 如 Duffing_van der Pol 系统, 如 $w(x, x') = 0, \varepsilon \neq 0$, 则方程(3)可含 Mathieu 系统, 及其和 Duffing 系统, van der Pol 系统的耦合系统。

在第 1 节中,应用 C_L 方法研究了方程(3)当 $w(x, x') = 0$ 时的一阶近似的分岔图(如图 1 所示)。一个确定的被控系统只有图 1 中的六种分岔图中的一种, 例如系统(3)有区域 4 的分岔图。现在欲将区域 4 控制成为区域 2。如何设计控制器参数呢? 被控制系统的开折参数为 (α_4, β_4) , 欲将之控制成区域 2, 则目标开折参数为 (α_2, β_2) , 则控制器的参数应为 (α_c, β_c) , 它们应由下式确定

$$\alpha_4 - \alpha_2 = \alpha_c, \quad \beta_4 - \beta_2 = \beta_c, \quad (9)$$

所以

$$\alpha_c = \alpha_4 - \alpha_2, \quad \beta_c = \beta_4 - \beta_2. \quad (10)$$

由前面分析可知, α 和 β 取决于参数 $\delta, \varepsilon, a_1, b_1$ 和 c_1 , 5 个参数只有(10)中的两个方程, 因此, 需先根据控制器结构设计的要求确定三个, 然后由方程(10)再确定另外两个参数。

五个参数中的 a_1, b_1 和 c_1 由系统的非线性函数 f, g 和 h 通过方程(6)~(8)确定。由于 a_1, b_1 和 c_1 中含有 f, g 和 h 的成分, 然后将之叠加, 则 $w(x, x')$ 的表达式即可确定。

2.3.1 对 f 和 g 施加控制

由于 f, g 为 x 的偶函数, 所以 $f = f(x, x^2)$, 或 $g = g(x, x^2)$ 。在系数 a_1, b_1, c_1 中, f 和 g 的最高阶导数为 3 阶, 即 xxx, xxx', xx', x'' 。因此在设计控制器的时候, 控制器 $u = u(x, x' > K)$ 中的最高非线性项不能超过 3, 否则控制无效(K 为控制器的增益系数, 以下相同)。另外, 控制器 $u = u(x, x' > K)$ 也要满足是 x 的偶函数这一特征。 f 对三个系数都有影响。 g 仅对系数 c_1 产生影响。

2.3.2 对 h 施加控制

h 为 x 的奇函数, $h = h(x, x')$, 在系数 a_1, b_1, c_1 中, h 的最高阶项为 3 阶, 即 xxx', xxx'', xx' 。控制器 $u = u(x, x' > K)$ 中的最高非线性项也不能超过 3, 同时也要满足是 x 奇函数的特性。 h 仅对系数 b_1 产生影响。

2.3.3 控制准则

对于 Mathieu 系统, 我们期望其定常解运动为区域 2 所给出的形式。当 α, β 不在区域 2 内时, 可以通过对 Mathieu 系统施加反馈控制, 使得 α, β 移动到区域 2 中。所以, 反馈控制准则为

$$\alpha = \delta^2 - \varepsilon^2 < 0, \\ \beta = \frac{2}{|a_1|} (b_1 \delta^2 - c_1 \varepsilon^2) > 2 \sqrt{-\alpha} > 0. \quad (11)$$

从公式(6)中可以看出, a_1 只影响了 β 的大小。所以可以通过对函数 f 的控制来影响 β 数值的大小。而 b_1, c_1 不但影响了 β 的大小, 还将可以影响 β 的符号。另外, 根据控制准方程(11)可以确定控制函数中的增益系数 K 。

例如, 当 α, β 位于区域 3 内时, 我们可以通过简单地改变 a_1 的大小, 使得这两个参数转移到区间 2 中。换句话说, 通过对非线性函数 f 的控制, 可以将系统的滞后跳越这种动态特性消除掉。

3 数值计算

Mathieu 方程

$$\ddot{x} + \delta(x+h) + (1 + \mu)x + f + 2\epsilon \cos 2t(x + g) = 0, \quad (12)$$

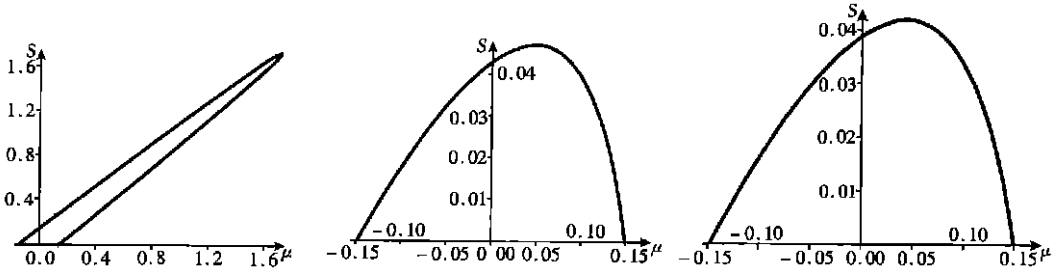
其中: $\delta = 0.173, \mu = 1.164, \epsilon = 0.228, g = 0$

3.1 将区域 3 控制到区域 2

当 $f = 0.25x^3 - 0.92, h = 0$ 时, 系统 (12) 所对应的分岔参数 $\alpha = -0.222055, \beta = 0.01279929397$ 在区域 3 内. 欲将分岔参数控制到区域 2 中, 只需改变参数 β 的大小即可, 所以可通过对函数 f 施加反馈控制来完成. 分别采用控制函数 $u = Kx^2$ 和 $u = Kxx^2$, 控制后的分岔参数如表 1 所示, 控制后的响应曲线如图 2 所示.

表 1 区域 3 控制到区域 2 的控制器设计以及控制结果

f 控制函数	K	α	β
$u = Kx^2$	0.25	-0.22055	0.4681546121
$u = Kxx^2$	2.5	-0.22055	0.5296484531

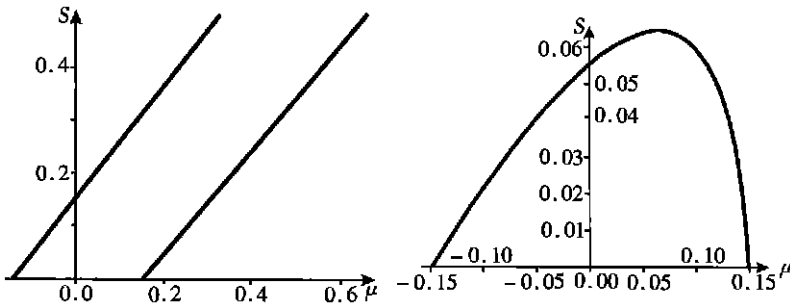


(a) 无控制时的响应曲线 (b) $u_f = Kx^2$ 的响应曲线 (c) $u_f = Kxx^2$ 的响应曲线

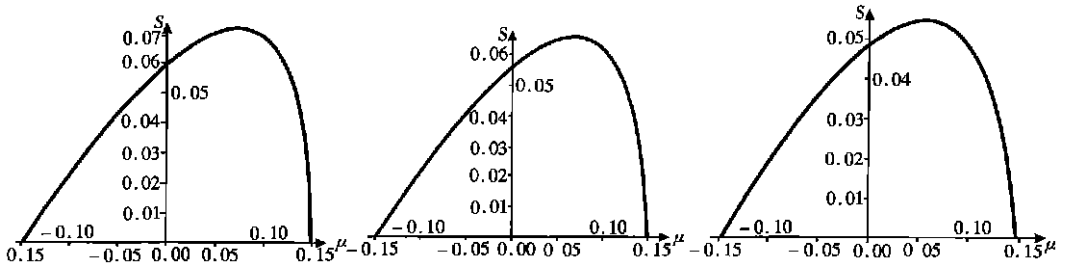
图 2 区域 3 控制前后的响应曲线

表 2 区域 4 控制到区域 2 的控制器设计以及控制结果

		K	α	β
h 的控制函数	$u = Kx^2$	-15.0	-0.22055	0.346152
	$u = Kx^2x^2$	-40.0	-0.22055	0.306246666
g 的控制函数	$u = Kxx^2$	-25.0	-0.22055	0.333564
	$u = Kx^3$	-10.0	-0.22055	0.4028759998



(a) 区域 4 无控制响应曲线 (b) $u_h = Kx^2$ 的响应曲线



(c) $u_g = Kx^2x>$ 的响应曲线 (d) $u_g = Kxx^2$ 的响应曲线 (e) $u_g = Kx^3$ 的响应曲线

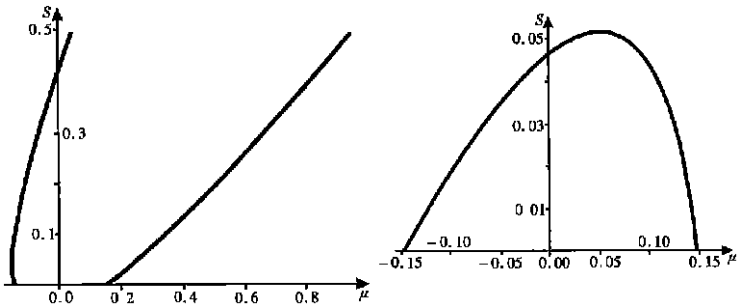
图 3 区域 4 控制前后的响应曲线

3.2 将区域 4 控制到区域 2

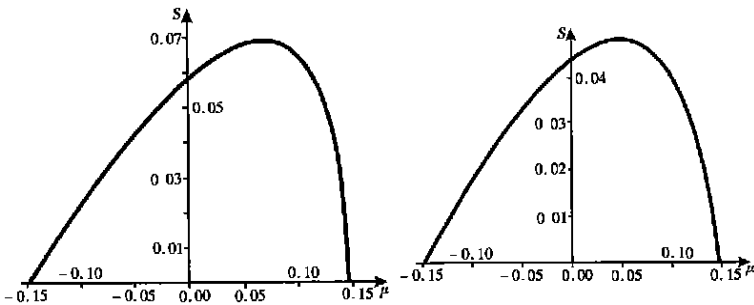
当 $f = 2.5x^3, h = 0$ 时, 系统(12) 所对应的分岔参数 $\alpha = -0.022055, \beta = -0.012996$ 在区域 4 内. 欲将分岔参数控制到区域 2 中, 可通过改变 β 的符号来实现. 也就是说, 通过对函数 g, h 的控制可以将分岔参数移动到区域 2 中. 控制函数以及控制的结果如表 2. 控制后的响应曲线如图 3 所示.

表 3 区域 5 控制到区域 2 的控制器设计以及控制结果

		K	α	β
h 的控制函数	$u = Kx^2x>$	-100.0	-0.22055	0.4259626666
g 的控制函数	$u = Kxx^2$	-50.0	-0.22055	0.320976
	$u = Kx^3$	-20.0	-0.22055	0.4596



(a) 区域 5 无控制响应曲线 (b) $u_h = Kx^2x>$ 的响应曲线



(c) $u_g = Kxx^2$ 的响应曲线 (d) $u_g = Kx^3$ 的响应曲线

图 4 区域 5 控制前后的响应曲线

3.3 将区域 5 控制到区域 2

当 $f = 2.5x^3$, $h = 15x^3$ 时, 系统(12) 所对应的分岔参数 $\alpha = -0.022055$, $\beta = -0.372144$ 在区域5 内. 控制方法与2 类似. 控制函数以及控制的结果如表3. 控制后的响应曲线如图4 所示.

4 结 论

C_L 方法在将 LS 方法从自治系统推广到非自治系统和引入奇异性理论后, 对研究非线性振动(自治的、非自治的) 系统的分岔特性是十分有效的方法, 它可建立解的拓扑结构和系统参数之间的关系, 克服了此前非线性振动理论只能分析在确定系统参数下求一个确定的周期解的不足.

根据 C_L 方法得到的分岔结果, 结合控制理论, 通过 f, g, h 函数的反馈控制可控制系统的运动模式, 如可以将滞后跳跃这种非线性现象很好地抑制, 使系统的运动变得相对简单. 在设计控制器的时候, 有时要求控制器满足是 x 的偶函数(或奇函数), 其次控制器中的非线性项不能大于3 次项, 否则控制器是无效的. 对于控制当中的增益系数, 可以根据控制准则方程来计算. 根据以上几点要求, 我们总可以设计出一种能够满足要求的控制器, 使得分岔参数 α, β 总是位于控制目标要求的区域内. 由于目标参数只要位于规定的区域内即可达到控制运动模式的目的, 因而控制器参数的设计数值要求并不严格, 这给设计带来了方便.

以上建议的控制方法我们称之为周期分岔解的鲁棒控制.

[参 考 文 献]

- [1] Krylov N, Bogoliubov N. Les methods de la mecanique nonlinear[J]. Monographie. Chaire de la Phys and Math of Academic Science. U K, 1934, 8: 44—51.
- [2] CHEN Yu_shu, Langford W F. The subharmonic bifurcation solution of nonlinear Mathieu's equation and Euler dynamically bucking problem[J]. Acta Mech Sinica, 1988, 20(4): 522—532.
- [3] Yu P, Huseyin K. Parametrically excited nonlinear systems: a comparison of certain methods[J]. Int J Non-Linear Mechanics, 1998, 33(6): 967—978.
- [4] Chow S Y, Hale J K. Methods of Bifurcation Theory [M]. New York: Springer, 1982.
- [5] Golubisky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory (Vol. 1) [M]. New York: Springer, 1985.
- [6] Bogoliubov N, Mitropolsky Y A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations [M]. New York: Gordon & Breach, 1961.
- [7] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: Wiley, 1979.
- [8] Abed E H, Wang H O, Chen R C. Stabilization of period doubling bifurcation and implications for control of chaos[J]. Physica D, 1994, 70(1): 154—164.
- [9] Wang H O, Abed E H. Bifurcation control of a chaotic system[J]. Automatica, 1995, 31(9): 1213—1226.
- [10] Kang W. Bifurcation and normal form of nonlinear control systems—Parts I and II [J]. SIAM J Contr Optim, 1998, 36(1): 193—232.
- [11] Chen G, Dong X. From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications [M]. Singapore: World Scientific Pub Co, 1998.
- [12] Abed E H. Bifurcation-theoretic issues in the control of voltage collapse[A]. In: Chow J H, Kokotovic P V, Thomas R J Eds. Proc IMA Workshop on Systems and Control Theory for Power Sys [C]. New York: Springer, 1995, 1—21.

- [13] Chen G, Lu J, Yap K C. Controlling Hopf bifurcation[A]. In: Ueta T, Chen G Eds. Proc Int Symp Circ Sys [C]. 3. USA: Monterey, C A, 1998, 693—642.
- [14] Basso M, Evangelisti A, Genesio R, et al. On bifurcation control in time delay feedback systems[J]. Int J Bifur Chaos, 1998, 8(4): 713—721.
- [15] Chen G. Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering Systems [M]. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.
- [16] Chen G, Moiola J L, Wang H O. Bifurcation control: theories, methods and applications[J]. Int J Bifur Chaos, 2000, 10(3): 511—548.
- [17] CHEN Yu_shu, Leung Andrew Y T. Bifurcation and Chaos in Engineering [M]. London: Springer, 1998.
- [18] 陈予恕, 杨彩霞, 吴志强, 等. 具有平方、立方非线性项的耦合动力学系统 1: 2 内共振分岔[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(8): 817—824.
- [19] LI Xin_ye, CHEN Yu_shu, WU Zhi_qiang, et al. Bifurcation of nonlinear normal modes of M_DOF systems with internal resonance[J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, 34(3): 104—407.
- [20] Sundararajan P, Noah S. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting arc length continuation method[J]. ASME J Vib Acoustics, 1995, 119(1): 9—20.

Robust Control of Periodic Bifurcation Solutions

LIANG Jian_shu¹, CHEN Yu_shu¹, Andrew Y. T. Leung²

(1. Department of Mechanics, Tianjin University,
Tianjin 300072, P. R. China;

2. Department of Building and Construction, City University of
Hong Kong, Hong Kong, P. R. China)

Abstract: The topological bifurcation diagrams and the coefficients of bifurcation equation were obtained by C_L method. According to obtained bifurcation diagrams and combining control theory, the method of robust control of periodic bifurcation was presented, which differs from generic methods of bifurcation control. It can make the existing motion pattern into the goal motion pattern. Because the method does not make strict requirement about parametric values of the controller, it is convenient to design and make it. Numerical simulations verify validity of the method.

Key words: bifurcation; topological structure; bifurcation control; C_L method