

文章编号: 1000-0887(2004) 08-0831-06

# 激发介质波前曲面和组织中心的结构

刘深泉

(华南理工大学 应用数学系, 广州 510640)

(刘曾荣推荐)

**摘要:** 通过建立波前表面上的移动坐标系和边界层内的摄动分析, 研究激发介质的波前曲面和组织中心的结构, 得到波前曲面所满足的特征方程, 组织中心所满足的一般方程. 这些特征方程表明激发介质的波前曲面具有扭曲型回卷波、M bius 带型结构等变化; 组织中心的轨迹具有打结、连结型的环型结构. 得到的理论结果不仅解释了 BZ 化学反应产生的波形图案, 而且给出一般激发介质波前曲面和组织中心可能出现的变化.

**关键词:** 激发介质; 波前曲面; 组织中心

**中图分类号:** O534; O362      **文献标识码:** A

## 引 言

BZ 反应产生丰富的波形图案<sup>[1]</sup>, 在浅盘中放置 BZ 溶剂, 实验表明, 溶剂中会出现螺旋、双螺旋和超螺旋等图案<sup>[2]</sup>. 在一定条件下, 螺旋波的波尖会出现漫游现象, 这种漫游的轨迹呈扭曲的螺旋链或花瓣形. 在试管中放入 BZ 溶剂, 则溶剂的变化十分复杂, 波前表现为扭曲曲面、回卷波形和楼梯型等, 对应的组织中心有圆环、螺旋线及其扭曲等形式<sup>[3,4]</sup>. 许多现象与 BZ 反应的机理类似<sup>[5]</sup>, 且呈现类似的波形图案. 如: 阿米巴细菌的聚集、心肌组织等<sup>[6,7]</sup>. 这些现象和 BZ 反应都属激发介质的范围, 理论上都抽象为如下模型:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = \epsilon^2 u + f(u, v), \\ \frac{v}{t} = \epsilon^2 v + g(u, v), \end{cases} \quad (1)$$

这里  $u$  称为快变量,  $v$  为慢变量. 不同形式的  $f(u, v)$ ,  $g(u, v)$  表示不同的模型<sup>[8]</sup>. 方程(1)的共同特点是:  $f$  的零值线  $f(u, v) = 0$  有三个分支  $u = u_-(v)$ ,  $u = u_0(v)$  和  $u = u_+(v)$ ,  $g(u, v) = 0$  的零值线单调变化. 两者的交点在  $f(u, v) = 0$  左边一支  $u = u_-(v)$  上. 对方程(1)附加 Neumann 边界条件, 数值结果表明, 平面具有螺旋结构, 波尖轨迹为扭曲链或扭曲环. 空间具有回卷波及其扭曲的结构, 组织中心具有螺旋形、环形及其扭曲、打结和连接等形式. 对连接和打结型组织中心, 波前曲面和组织中心的关系难于理解<sup>[9]</sup>.

收稿日期: 2002\_09\_05; 修订日期: 2003\_12\_23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19902005)

作者简介: 刘深泉(1964), 男, 洛阳人, 副教授, 博士; 主要研究激发介质的波形图案, 心脏节律, 神经传导, 学习和记忆等(Tel: + 86\_20\_87114815; E-mail: mashqliu@scut.edu.cn)

方程(1)的理论分析表明,波前曲面的法向速度和平均曲率具有线性关系<sup>[10,11]</sup>,由于形式复杂,此关系可以解释简单的波形图案,但对复杂波形则无能为力.本文利用摄动方法,得到激发介质波前曲面和组织中心满足的特征方程,并分析特征方程包含的波形结构

### 1 摄动分析

激发介质的激发态存在于空间的某一区域,此区域包含两个曲面作边界.用快变量  $u$  来描述:从静息态  $u = u_-(v)$  跳跃到激发态  $u = u_+(v)$  的边界曲面称为波前.从激发态  $u = u_+(v)$  恢复到静息态  $u = u_-(v)$  的边界曲面称为波后,波前和波后的相交区域抽象为空间曲线,称为组织中心.在波前的切平面附近,  $u$  变化很小,在法线方向,  $u$  变化很快.慢变量  $v$  变化不明显.

对任意时刻  $t$ ,在 上建立局部垂直的移动坐标系  $(s, p)$ ,若  $r$  为 邻域内的点到 的法向距离,则在 的邻域内,建立新的移动坐标系  $(r, s, p)$ .点集  $\{(x, y, z) : r(x, y, z, t) = 0\}$  表示波前曲面 的轨迹.

设原坐标系  $(x, y, z)$  和新移动坐标系  $(r, s, p)$  之间的坐标变换为:

$$\begin{cases} t = t, \\ r = r(x, y, z, t), \\ s = s(x, y, z, t), \\ p = p(x, y, z, t) \end{cases} \tag{2}$$

不失一般性,取  $|r| = 1, r \cdot s = 0, r \cdot p = 0, p \cdot s = 0$ , 方程(1)变为:

$$\begin{cases} \left[ -\frac{u}{r} + \frac{u}{r} r_t + \frac{u}{s} s_t + \frac{u}{p} p_t \right] = 2 \left[ \frac{2u}{r^2} + \frac{2u}{s^2} |s|^2 + \frac{2u}{p^2} |p|^2 + \right. \\ \left. \frac{u}{r} \cdot 2r + \frac{u}{s} \cdot 2s + \frac{u}{p} \cdot 2p \right] + f(u, v), \\ -\frac{v}{r} + \frac{v}{r} r_t + \frac{v}{s} s_t + \frac{v}{p} p_t = \left[ \frac{2v}{r^2} + \frac{2v}{s^2} |s|^2 + \frac{2v}{p^2} |p|^2 + \right. \\ \left. \frac{v}{r} \cdot 2r + \frac{v}{s} \cdot 2s + \frac{v}{p} \cdot 2p \right] + g(u, v) \end{cases} \tag{3}$$

由于 的切平面附近,  $u$  变化很小, 的法向两侧,  $u$  变化很快,用扩大的法向  $r = R$  来观察,得到如下  $O(\epsilon^0)$  阶近似:

$$\begin{cases} \frac{2u}{R^2} + (2r - r_t) \frac{u}{R} + f(u, v) = 0, \\ \frac{v}{R} r_t = \frac{2v}{R^2} \end{cases} \tag{4}$$

由于变量  $v$  在 附近变化不明显,取  $v = v_0$  为常数.方程(4)简化为:

$$\frac{2u}{R^2} + (2r - r_t) \frac{u}{R} + f(u, v_0) = 0 \tag{5}$$

因为  $R$  的范围是  $(-\infty, +\infty)$ ,且 的法向两侧,变量  $u$  从  $u_-(v_0)$  跳跃到  $u_+(v_0)$ ,所以

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{u}{R} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{u}{R} = 0 \tag{6}$$

由反应扩散方程的性质可知, 的特征波速  $c$  满足的方程为:

$$r_t = 2r + c, \tag{7}$$

其中

$$c = \int_{u_-(v_0)}^{u_+(v_0)} f(u, v_0) du \Big|_{-} \left[ \frac{u}{R} \right]^2 dR$$

由于  $r$  表示附近的点到 的法向距离, 则  $r_t$  表示 的法向速度  $c$  表示 的平面特征波速,  $r^2$  与 的平均曲率有关, 方程(7)表示 的法向速度受曲率因素的影响, 这里称为激发介质波前曲面的特征方程 这种 的法向速度受曲率影响的关系, 二维情形由 Keener 首先得到<sup>[8]</sup>, 三维情形由丁达夫和 Grindrod<sup>[10,11]</sup> 分别得到 他们的结果和方程(7)都是描述 法向速度和曲率因素的关系, 但有本质区别: 首先对曲率的理解不同, 形式差别也很大 更重要的是方程(7)形式整洁, 意义明确, 便于深入的理论分析 将方程(7)写成:

$$\frac{r}{t} = \left[ \frac{2r}{x^2} + \frac{2r}{y^2} + \frac{2r}{z^2} \right] + c \tag{8}$$

由于  $r$  表示 到点  $(x, y, z)$  的法线距离, 集合  $\{(x, y, z) : r(x, y, z, t) = 0\}$  为波前曲面 所以方程(8)的解可以得到波前曲面

下面用环形坐标系分析方程(8)

$$\begin{cases} x = (R + \cos \theta) \cos \phi, \\ y = (R + \cos \theta) \sin \phi, \\ z = \sin \theta \end{cases} \tag{9}$$

将变换(9)代入方程(8):

$$\frac{r}{t} = \left[ \frac{1}{R + \cos^2 \theta} \frac{2r}{2} + \frac{2r}{2} + \frac{1}{2} \frac{2r}{2} + \left( \frac{1}{1 + \frac{\cos \theta}{R + \cos \theta}} \right) \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \frac{\sin \theta}{2(R + \cos \theta)} \right] + c, \tag{10}$$

对方程(10), 引入  $r = C_3 t + A_3 + d(\theta, \phi)$ , 得到:

$$\begin{aligned} & \frac{2d}{2} + \frac{1}{2} \frac{2d}{2} + \frac{d}{d} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\cos \theta}{R + \cos \theta}} \right] - \\ & \frac{d}{d} \frac{\sin \theta}{(R + \cos \theta)} = \frac{C_3 - c}{d} \end{aligned} \tag{11}$$

设  $R = R_0$ , 用度量  $\theta = R$  来观察方程(11) 对应的  $O(\theta^0)$  近似为:

$$\frac{2d}{2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d} + \frac{1}{2} \frac{2d}{2} = m, \tag{12}$$

方程(12)得到

$$d(\theta, \phi) = B_3 + q_1 \theta^2 + q_2 \ln \theta \quad (4q_1 = m),$$

故方程(10)的  $O(\theta^0)$  近似解为:

$$r(\theta, \phi, t) = C_3 t + A_3 + B_3 + Q_3 \theta^2 + Q_4 \ln \theta + k_3 \quad (0 < \theta < R) \tag{13}$$

从而波前曲面 包含如下结构:

$$Ct + A + B + Q \theta^2 + Q_0 \ln \theta + K = 0, \tag{14}$$

其中  $A, B, C, Q, Q_0, K$  为常数

此波前曲面结构示于图 1, 其中  $R$  固定为常数,  $\theta$  变化很小 方程(14)的特殊形式  $\theta = h$  代入坐标系(9), 得到环面上的扭曲曲面 不同的  $h$  扭曲程度也不同, 图 1(a)为 M bius 带型结构, (b)、(c)、(d)为环面扭曲和环型楼梯等

从图 1 看到, 波前曲面具有环形扭曲结构, 奇数次环面扭曲, 得到 M bius 带型结构 偶数次扭曲, 得到扭曲环形 当扭曲严重时, 出现楼梯形旋转波前 图 1 的(b)、(c)、(d)型曲面在

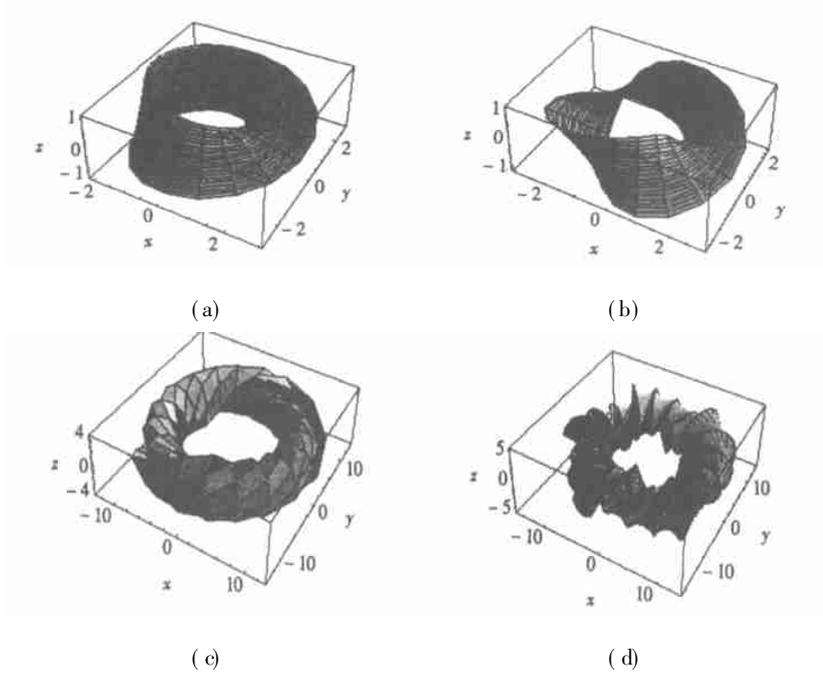


图1 波前曲面结构: (a) M bius 带型结构;  
(b)、(c)、(d) 环面扭曲和环型楼梯

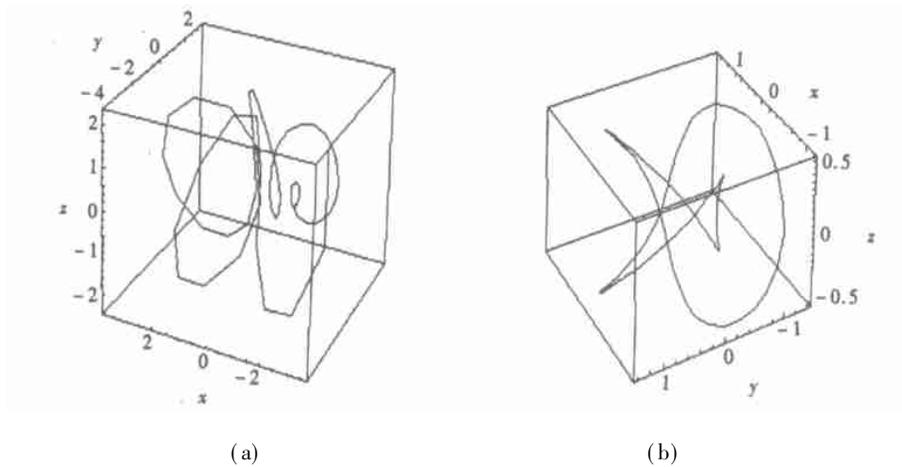


图2 组织中心的轨迹: (a) 螺旋上升结构; (b) 打结型组织中心<sup>[4,7]</sup>

实验或数值计算中经常出现<sup>[3,4]</sup> M bius 带型结构仍需验证

以上分析是波前曲面 的摄动分析,对波后曲面可得同样结果 波前和波后的相交区域抽象为组织中心,则组织中心的运动轨迹为:

$$\begin{cases} \frac{r_f}{t} = \left[ \frac{2r_f}{x^2} + \frac{2r_f}{y^2} + \frac{2r_f}{z^2} \right] + c_f, \\ \frac{r_b}{t} = \left[ \frac{2r_b}{x^2} + \frac{2r_b}{y^2} + \frac{2r_b}{z^2} \right] + c_b \end{cases} \quad (15)$$

对组织中心的研究有大量文献<sup>[5,8,9]</sup>,根据作者的知识,这里首次理论上得到组织中心满足的特征方程,方程(15)解的零值线分别表示波前和波后,两者的交线得到组织中心

在环形坐标系下,组织中心的轨迹包含如下结构:

$$\begin{cases} C_f t + A_f + B_f + Q_f^2 + Q_{f0} \ln + K_f = 0, \\ C_b t + A_b + B_b + Q_b^2 + Q_{b0} \ln + K_b = 0 \end{cases} \quad (16)$$

以上特征方程可知, 组织中心螺旋旋转的同时又向上运动 这和波尖的轨迹极为类似, 故可将组织中心理解为波尖运动和漂移运动的复合, 时间变化时还得到运动轨迹

此外, 特征方程(15)具有环面上  $(p, q)$  扭结结构 最简单的图 1(c)、(b) 型扭结, 在文献 [8, 9] 的数值计算或理论分析中出现过, 一般的理论结果在此首次得到

## 2 结 论

本文利用摄动方法, 得到激发介质波前曲面和组织中心满足的方程 这里分析表明波前曲面包括回卷曲面、海螺面和楼梯型曲面等结构 其中环面扭曲可形成不同类型的结构, 偶数次的扭曲, 得到环面扭曲结构 奇数次的扭曲, 得到 M bius 带型结构, 严重的扭曲形成旋转楼梯面 这些波前曲面结构, 部分出现在 BZ 实验中或数值计算中 M bius 带型结构仍需验证

利用波前和波后的交线得到组织中心的方程, 其轨迹理解为波尖运动和垂直运动的复合, 特殊情形是环面上的  $(p, q)$  扭曲

M bius 带型波前是一个有趣的结果 将 M bius 带从带形中间撕开, 可得扭曲环面, 此环面再撕开两次可得两个扭曲、连接环面, 若这两个环面分别作为波前曲面, 可得两个相互扭曲、连接的组织中心 文献 [9] 的数值计算表明组织中心具有缠绕、连接形的结构, 且相互连接的是圆环 显然这里的结论比数值结果更深刻, 更具体 波前曲面和组织中心的方程, 提供了丰富的波形结构 大量的数值、实验结果是这里理论的一部分, 系统研究波前曲面的特征方程仍需许多工作

### [参 考 文 献]

- [1] Winfree A T. The Geometry of Biological Time [M]. Second Edition. NY: Springer\_Verlag, 2000.
- [2] Perez\_Munuzuri V, Aliev R, Vasiev B, et al. Super\_spiral structure in an excitable medium [J]. Nature, 1991, **353**(24): 740-742.
- [3] Pertsov A, Aliev R, Krinsky V. Three\_dimensional twisted vortices in an excitable chemical medium [J]. Nature, 1991, **354**(31): 419-421.
- [4] Jahnke W, Skaggs W, Winfree AT. Chemical vortex dynamics in the BZ reaction and in the 2\_variable Oregonator model [J]. J Chem Phys, 1989, **93**(1): 740-749.
- [5] Winfree A T. Stable particle\_like solutions to the nonlinear wave equations of three\_dimensional excitable media [J]. SIAM Rev, 1990, **32**(1): 1-53.
- [6] Hofer T, Sherraff J, Maini P. Cellular pattern formation during dictyostelium aggregation [J]. Phys D, 1995, **85**(3): 425-444.
- [7] Fagen X, Zhilin Q, Garfinkel A. Dynamics of reentry around an obstacle in cardiac tissue [J]. Phys Rev E, 1998, **58**(5): 6355-6358.
- [8] Keener J. The dynamics of three\_dimensional scroll waves in excitable media [J]. Phys D, 1988, **31**(2): 269-276.
- [9] Winfree A T. Persistent tangled vortex rings in generic excitable media [J]. Phys D, 1995, **84**(1): 126-136.
- [10] DING Da\_fu, FENG Zu\_kang. Nonlinear wave dynamics in excitable media [J]. Progress in Physics, 1991, **11**(2): 214-244.

- [11] Grindrod P. *Patterns and Waves* [M]. Oxford Applied Mathematics and Computer Science Series. Oxford: Clarendon Press, 1991.
- [12] 刘深泉. 激发介质中螺旋波的波尖运动[J]. 物理学报, 1998, **47**(7): 1057-1063.
- [13] 刘深泉, 陆启韶, 黄克累. 单扩散回卷波组织中心的运动[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(4): 398-404.

## Structure of Wave Front and Organization Center in Excitable Media

LIU Shen-quan

(Department of Applied Mathematics, South China University of Technology,  
Guangzhou 510640, P. R. China)

**Abstract:** With help of establishing the moving coordinate on the wave front surface and the perturbation analysis in the boundary layer, the structures of wave front and organization center in excitable media were studied. The eikonal equation of wave front surface and general equation of organization center were obtained. These eikonal equations reveal the wave front surfaces have structures of twisted scroll wave and M bius band, the organization centers have structures of knotted and linked ring. These theoretical results not only explain the wave patterns of BZ chemical reaction but also give several possibility structures of wave front surface and organization center in general excitable media.

**Key words:** excitable media; wave front; organization center