应用数学和力学，第9卷第2期(1988年2月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

概率度量空间的基本理论及应用(Ⅰ)*

张 石 生

(四川大学数学系，1987年1月9日收到)

摘 要

本文系统地研究概率度量空间的基本理论和应用，讨论了概率度量空间的拓扑结构和性质；给出了概率度量空间，Menger概率度量空间以及概率线性赋范空间可度量化的条件及其度量函数的形式；得出了概率度量空间集合的各种概率有界性的表征等．作为这些结果的应用，我们讨论了概率线性赋范空间中线性算子的理论及概率度量空间中不动点的存在性问题．

一、引言及预备知识

概率度量空间（PM-空间）是用一个统计量描述两点间的距离的一类型空间，从某种意义来说，这种空间更符合客观实际．从1942年K.Menger提出PM-空间的概念以来，到目前这一类空间的理论和应用的研究虽然在某些方面已取得重要的进展[1~11]，但是与PM-空间基本理论和应用有关的许多重要事实，比如PM-空间的拓扑结构和性质，PM-空间中集合的各种概率有界性的表征，PM-空间中线性和非线性算子理论，以及PM-空间中映象的不动点理论等目前仍处于非常薄弱或不甚清楚的阶段．

本文就是针对上述一些重要的未解决的问题而展开的．

全文共分两部分．本文是其中的第一部分．在这部分中讨论了PM-空间的拓扑结构和拓扑性质，给出了PM-空间，Menger PM-空间以及概率线性赋范空间（PN-空间）可度量化的条件及与之有关的度量函数的形式．在第二部分中给出概率度量空间中集合的各种概率有界性的表征．作为本文结果的应用，在第二部分中还讨论了PN-空间中的线性算子理论及PM-空间中映象的不动点理论．

以后我们记$R=(-\infty,\infty)$，$R^+[0,\infty)$，$\mathscr{D}$表一切左连续的分布函数的集合，$\mathscr{D}_0$表$\mathscr{D}$中如下形式的子集合：

$$\mathscr{D}_0=\{f\in\mathscr{D}:f^{-1}(1)\neq\phi\}$$

定义1 一概率度量空间是一有序对$(E,\mathscr{F})$，其中E是抽象集，$\mathscr{F}$是$E\times E\to\mathscr{D}$的映象（我们记$\mathscr{F}(x,y)$为$F_{x,y}$）且满足下面的条件：对任意的x，y，$z\in E$

(PM-1) $F_{x,y}(t)=1$，$\forall t>0$，当而且仅当$x=y$；

(PM-2) $F_{x,y}(0)=0$；

(PM-3) $F_{x,y}=F_{y,x}$；

---

* 中国科学院科学基金资助的课题．

(PM-4) 如果$F_{x,y}(t_1)=1$，$F_{y,z}(t_2)=1$，则$F_{x,z}(t_1+t_2)=1$

定义 2 一映象：$\Delta:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 称为t-范数，如果对任意的a，b，c，$d\in[0,1]$有$\Delta(a,1)=a$，$\Delta(a,b)=\Delta(b,a)$，$\Delta(a,b)\geqslant\Delta(c,d)$，$\forall a\geqslant c$，$b\geqslant d$，且$\Delta(a,\Delta(b,c))=\Delta(\Delta(a,b),c)$。

定义 3 一Menger空间是一三元组$(E,\mathscr{F},\Delta)$，其中$(E,\mathscr{F})$是一概率度量空间，Δ是一t-范数，且满足

(PM-4_m) $F_{x,z}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,y}(t_1),F_{y,z}(t_2))$，$\forall,x,y,z\in E$，$t_1,t_2\geqslant0$

定义 4 一概率线性赋范空间是一有序对$(E,\mathscr{F})$，其中E是一实线性空间，$\mathscr{F}$是$E\to\mathscr{D}$的映象（记$\mathscr{F}(x)$以f_x）满足下面的条件：

(PN-1) $f_x(t)=1$，$\forall t>0$，当而且仅当$x=0$；

(PN-2) $f_x(0)=0$；

(PN-3) $f_{\alpha x}(t)=f_x(t/|\alpha|)$，$\forall\alpha\in R$，$\alpha\neq0$；

(PN-4) 对任意的x，y，$z\in E$和任意的t_1，$t_2>0$，当$f_x(t_1)=1$，$f_y(t_2)=1$，则$f_{x+y}(t_1+t_2)=1$。

由定义显然可知，取$F_{x,y}=f_{x-y}$，则概率线性赋范空间是概率度量空间的特例。

定义 5 一Menger概率线性赋范空间是一三元组$(E,\mathscr{F},\Delta)$，其中$(E,\mathscr{F})$是一概率线性赋范空间，Δ是一t-范数，且满足条件

(PN-4_m) $f_{x+y}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(f_x(t_1),f_y(t_2))$，$\forall x,y\in E$，$t_1$，$t_2\in R^+$。

为简单起见，以后我们用PM-空间，M-PM-空间，PN-空间，M-PN-空间分别表概率度量空间，Menger概率度量空间，概率线性赋范空间，Menger概率线性赋范空间。

二、概率度量空间的拓扑结构

定理2.1 设$(E,\mathscr{F})$是一PM-空间，且$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$。在E上$(E\times E\to R^+)$定义函数d：

$$d(x,y)=\inf_t\{t\geqslant0,\ F_{x,y}(t)=1\},\qquad x,y\in E \tag{2.1}$$

则d是E上的度量，故$(E,\mathscr{F})$是一度量空间，记为$(E,\mathscr{F},d)$。

证 由定义和(PM-1)易知$d(x,y)\geqslant0$，$\forall x$，$y\in E$，而且$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；由(PM-3)知$d(x,y)=d(y,x)$。另由$d$的定义，对任意的$x$，$y$，$z\in E$和$\varepsilon>0$，有

$$F_{x,z}\left(d(x,z)+\frac{\varepsilon}{2}\right)=1,\quad F_{z,y}\left(d(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}\right)=1$$

于是由(PM-4)即得

$$F_{x,y}(d(x,z)+d(z,y)+\varepsilon)=1$$

因而有

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)+\varepsilon$$

让$\varepsilon\to0$，即得

$$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$$

证毕。

命题2.2 设$(E,\mathscr{F})$是一PM-空间，且$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$。设d是由(2.1)式定义的度量。设d_α，$\alpha\in(0,1]$，是在E上由下式定义的函数：

$$d_\alpha(x,y)=\inf_t\{t\geqslant0:F_{x,y}(t)>1-\alpha\},\qquad x,\ y\in E \tag{2.2}$$

则对给定的$x,y\in E$，d_α是$\alpha\in(0,1]$的减函数，且

$$d(x,y)=\lim_{\alpha\to 0}d_\alpha(x,y)=\sup_{\alpha\in(0,1]}d_\alpha(x,y) \tag{2.3}$$

证 给定x，$y\in E$，当α_1，$\alpha_2\in(0,1]$，$\alpha_1>\alpha_2$时，显然有

$$\{t\geqslant 0,\ F_{x,y}(t)>1-\alpha_1\}\supset\{t\geqslant 0,\ F_{x,y}(t)>1-\alpha_2\}$$

因而有

$$d_{\alpha_1}(x,\ y)\leqslant d_{\alpha_2}(x,\ y)$$

即d_α关于$\alpha\in(0,1]$是单调减的，故极限$\lim\limits_{\alpha\to 0}d_\alpha(x,y)$存在且

$$\lim_{\alpha\to 0}d_\alpha(x,y)=\sup_{\alpha\in(0,1]}d_\alpha(x,y)$$

另对任一$\varepsilon>0$，由d的定义有

$$F_{x,y}(d(x,y)+\varepsilon)=1,\qquad \forall x,\ y\in E$$

于是对任一$\alpha\in(0,1]$有

$$\inf_t\{t\geqslant 0:F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\leqslant d(x,y)+\varepsilon$$

注意，$\varepsilon>0$和$\alpha\in(0,1]$的任意性，即得

$$\sup_{\alpha\in(0,1]}d_\alpha(x,y)=\sup_{\alpha\in(0,1]}\inf_t\{t\geqslant 0,\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\leqslant d(x,y) \tag{2.4}$$

另由d的定义，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\alpha_0=\alpha_0(\varepsilon)$，使得

$$F_{x,y}(d(x,y)-\varepsilon)<1-\alpha_0$$

于是有

$$\begin{aligned}d(x,y)-\varepsilon&\leqslant\inf_t\{t\geqslant 0:F_{x,y}(t)>1-\alpha_0\}\\&\leqslant\sup_{\alpha\in(0,1]}\inf_t\{t\geqslant 0,\ F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\end{aligned}$$

于上式左端让$\varepsilon\to 0$，即得

$$d(x,y)\leqslant\sup_{\alpha\in(0,1]}d_\alpha(x,y) \tag{2.5}$$

结合（2.4）和（2.5），命题2.2得证。

定理2.3 设$(E,\ \mathscr{F})$是一PM-空间，设$\mathscr{F}$还满足条件(PM-5)。

(PM-5)对任意的$x,y,z\in E$，t_1，$t_2>0$，$\lambda>0$，当$F_{x,z}(t_1)>1-\lambda$、$F_{y,z}(t_2)>1-\lambda$时，就有$F_{x,y}(t_1+t_2)>1-\lambda$

则 （i）对每一$\alpha\in(0,1]$，由下式定义的函数d_α:

$$d_\alpha(x,y)=\inf_t\{t\geqslant 0:F_{x,y}(t)>1-\alpha\} \tag{2.6}$$

是E上的伪度量；

（ii）对每一$\alpha\in(0,1]$，E中由邻域系

$$\{U\subset E,\ \forall x\in U,\ 存在\varepsilon>0,\ 使得N_x(\varepsilon,\alpha)\subset U\}$$

其中

$$N_x(\varepsilon,\alpha)=\{y\in E:F_{x,y}(\varepsilon)>1-\alpha\}$$

所导出的拓扑$\mathscr{T}_\alpha$与E中由邻域系

$$\{B_\alpha(x,\varepsilon):x\in E,\ \varepsilon>0\}$$

其中

$$B_\alpha(x,\varepsilon)=\{y\in E:d_\alpha(x,y)<\varepsilon\}$$

所导出的拓扑τ_{d_α}是一致的。

证

（i）对每一$\alpha\in(0,1]$易知$d_\alpha(x,y)\geqslant 0, d_\alpha(y,x)=d_\alpha(x,y)$，而且当$x=y$时，必有$d_\alpha(x,y)=0$。另由$d_\alpha$的定义，对每一$\varepsilon>0$，

$$F_{x,z}\left(d_\alpha(x,z)+\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-\alpha,\quad F_{z,y}\left(d_\alpha(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-\alpha$$

于是由条件(PM-5)知

$$F_{x,y}(d_\alpha(x,z)+d_\alpha(z,y)+\varepsilon)>1-\alpha$$

故有

$$d_\alpha(x,y)\leqslant d_\alpha(x,z)+d_\alpha(z,y)+\varepsilon$$

于上式中让$\varepsilon\to 0$即得

$$d_\alpha(x,y)\leqslant d_\alpha(x,z)+d_\alpha(z,y)$$

由于由$d(x,y)=0$不一定有$x=y$。因而对每一$\alpha\in(0,1]$，d_α是E上的伪度量。

（ii）我们只要指出

$$N_x(\varepsilon,\alpha)=B_\alpha(x,\varepsilon) \tag{2.7}$$

即可。事实上，设$y\in N_x(\varepsilon,\alpha)$，故有$F_{x,y}(\varepsilon)>1-\alpha$。但由分布函数$F_{x,y}$的左连续性，故存在$\varepsilon'\in(0,\varepsilon)$，使得$F_{x,y}(\varepsilon')>1-\alpha$，因而有

$$d_\alpha(x,y)=\inf_t\{t\geqslant 0: F_{x,y}(t)>1-\alpha\}\leqslant\varepsilon'<\varepsilon$$

上式表明$y\in B_\alpha(x,\varepsilon)$，此即$N_x(\varepsilon,\alpha)\subset B_\alpha(x,\varepsilon)$。

反之，设$y\in B_\alpha(x,\varepsilon)$，于是$d_\alpha(x,y)<\varepsilon$，因而$F_{x,y}(\varepsilon)>1-\alpha$，即$y\in N_x(\varepsilon,\alpha)$。故$B_\alpha(x,\varepsilon)\subset N_x(\varepsilon,\alpha)$。(2.7)得证。

三、M-PM-空间的拓扑结构

Schweizer, Sklar[10]指出，如果$(E,\mathscr{F},\Delta)$是M-PM-空间，当t-范数Δ满足条件

$$\sup_{t<1}\Delta(t,t)=1$$

时，则M-PM-空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$是可度量化的Hausdorff拓扑空间。在本节中我们将给出另外的可度量化条件及与之相联系的度量函数的形式。

定理3.1 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一M-PM-空间。

（i）当$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$时，则对任意的t-范数Δ，$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一度量空间，其度量d由(2.1)式定义；

（ii）当t-范数Δ满足条件

$$\Delta(a,b)\geqslant\max\{a+b-1,\ 0\},\qquad\forall a,\ b\in[0,1]$$

时，则对任意的Menger概率度量$\mathscr{F}$，$(E,\mathscr{F},\Delta)$是可度量化的，而且函数d^*：

$$d^*(x,y)=\sup_t\{t: F_{x,y}(t)\leqslant 1-t\} \tag{3.1}$$

就是E上的度量，另由d^*在E上所导出的度量拓扑与由E中的邻域系

$$\{U\subset E:\forall x\in U,\ 存在\varepsilon>0，使得N_x(\varepsilon,\varepsilon)\subset U\} \tag{3.2}$$

其中

$$N_x(\varepsilon,\varepsilon)=\{y\in E: F_{x,y}(\varepsilon)>1-\varepsilon\}$$

所导出的拓扑$\mathscr{T}$是一致的。

证 结论(i)由定理2.1得知。下证结论(ii)。

我们首先指出，由（3.1）式定义的函数d^*具有如下的性质：

$$d^*(x,y)<t \Leftrightarrow F_{x,y}(t)>1-t, \qquad \forall t>0 \tag{3.3}$$

现证d^*是E上的度量。事实上，$d^*(x,y)\geqslant 0$，$d^*(x,y)=0$当而且仅当$x=y$，及$d^*(x,y)=d^*(y,x)$都是显然的。另由d^*的定义，对任意的$\varepsilon>0$和任意的x, y, $z\in E$，有

$$\left.\begin{aligned} &F_{x,z}\left(d^*(x,z)+\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-d^*(x,z)-\frac{\varepsilon}{2}\\ &F_{z,y}\left(d^*(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-d^*(z,y)-\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

于是由(PM-4_m)和上式有

$$\begin{aligned} F_{x,y}(d^*(x,z)+d^*(z,y)+\varepsilon)&\geqslant\Delta\left(F_{x,z}\left(d^*(x,z)+\frac{\varepsilon}{2}\right),\ F_{z,y}\left(d^*(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\\ &\geqslant F_{x,z}\left(d^*(x,z)+\frac{\varepsilon}{2}\right)+F_{z,y}\left(d^*(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}\right)-1\\ &>1-(d^*(x,z)+d^*(z,y)+\varepsilon)\end{aligned}$$

引用（3.3）即得

$$d^*(x,y)<d^*(x,z)+d^*(z,y)+\varepsilon$$

让$\varepsilon\to 0$，即得

$$d^*(x,y)\leqslant d^*(x,z)+d^*(z,y), \qquad \forall x,\ y,\ z\in E$$

为了证明E上由d^*所导出的度量拓扑与由（3.2）中的邻域系所导出的拓扑$\mathscr{T}$是一致的，我们只要注意由（3.3）式可得

$$N_x(\varepsilon,\varepsilon)=\{y\in E: d^*(x,y)<\varepsilon\}$$

即可得知。证毕。

定理3.2 设$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是一M-PM-空间且$\mathscr{F}$满足条件（PM-5）。则由（3.1）式定义的函数$d^*$是$E$上的度量。

证 我们只要证明d^*在E上满足三角不等式即可。事实上，由（3.4）对任意的$x,y,z\in E$有

$$F_{x,z}\left(d^*(x,z)+\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-d^*(x,z)-d^*(z,y)-\varepsilon$$

$$F_{z,y}\left(d^*(z,y)+\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-d^*(x,z)-d^*(z,y)-\varepsilon$$

于是由条件（PM-5）有

$$F_{x,y}(d^*(x,z)+d^*(z,y)+\varepsilon)>1-d^*(x,z)-d^*(z,y)-\varepsilon$$

故由（3.3）有

$$d^*(x,y)<d^*(x,z)+d^*(z,y)+\varepsilon$$

让$\varepsilon\to 0$，即得

$$d^*(x,y)\leqslant d^*(x,z)+d^*(z,y), \qquad \forall x,\ y,\ z\in E$$

注1 当t-范数$\Delta=\min$时，则M-PM-空间$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$中的$\mathscr{F}$满足条件（PM-5）。事实上，对任意的$x,y,z\in E$, t_1, $t_2>0$, $\lambda>0$，当$F_{x,z}(t_1)>1-\lambda$, $F_{z,y}(t_2)>1-\lambda$时，由（PM-4_m）有

$$F_{x,y}(t_1+t_2)\geqslant\min\{F_{x,z}(t_1),\ F_{z,y}(t_2)\}>1-\lambda$$

因而由定理3.2知$(E,\ \mathscr{F},\ \min,\ d^*)$是一度量空间。

四、PN-空间的拓扑结构

在本节我们讨论PN-空间的拓扑结构及度量化问题．我们有下面的结果：

定理4.1　设 $(E,\mathscr{F})$ 是一PN-空间，且$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$。在E上分别定义函数$\|\cdot\|$和$\|\cdot\|_\alpha$，$\alpha\in(0,1]$如下：

$$\|x\|=\inf_t\{t\geqslant0,\ f_x(t)=1\},\qquad x\in E \tag{4.1}$$

$$\|x\|_\alpha=\inf_t\{t\geqslant0,\ f_x(t)>1-\alpha\},\qquad x\in E,\ \alpha\in(0,1] \tag{4.2}$$

则　(i) $\|\cdot\|$是E上的范数，故 $(E,\ \mathscr{F},\ \|\cdot\|)$ 是一线性赋范空间；

(ii) $\|x\|_\alpha$是$\alpha\in(0,1]$的单调减的函数且

$$\|x\|=\lim_{\alpha\to0}\|x\|_\alpha=\sup_{\alpha\in(0,1]}\|x\|_\alpha \tag{4.3}$$

证(i)　我们只要证明$\|\cdot\|$在E上满足范数公理．

(a) 由条件(PN-1)和(PN-2)得知$\|x\|\geqslant0$，且$\|x\|=0$的充分必要条件是$x=0$；

(b) 由 (PN-3)，对任意的$\alpha\in R$，$\alpha\neq0$有

$$\|\alpha x\|=\inf_t\{t\geqslant0:f_{\alpha x}(t)=1\}=\inf_t\{t\geqslant0:f_x(t/|\alpha|)=1\}$$
$$=|\alpha|\inf_t\{t\geqslant0:f_x(t)=1\}=|\alpha|\cdot\|x\|$$

而当$\alpha=0$时显然仍有$\|\alpha x\|=0\cdot\|x\|$。

(c) 又由$\|\cdot\|$的定义，对任意的$\varepsilon>0$，有

$$f_x\left(\|x\|+\frac{\varepsilon}{2}\right)=1,\ f_y\left(\|y\|+\frac{\varepsilon}{2}\right)=1,\qquad x,\ y\in E$$

于是由 (PN-4)，

$$f_{x+y}(\|x\|+\|y\|+\varepsilon)=1,\qquad x,\ y\in E$$

因而

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|+\varepsilon$$

让$\varepsilon\to0$，即得

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$$

故$\|\cdot\|$是E上的范数，而结论(ii)可仿照命题2.2进行证明．定理证毕．

定理4.2　设$(E,\mathscr{F})$是一PN-空间，且$\mathscr{F}$满足下面的条件 (PN-5)：

(PN-5)　对任意的x，$y\in E$和任意的t_1，$t_2>0$，$\lambda>0$，当$f_x(t_1)>1-\lambda$，$f_y(t_2)>1-\lambda$时，就有$f_{x+y}(t_1+t_2)>1-\lambda$。

则　(i) 对每一$\alpha\in(0,1]$，由下式定义的函数p_α：

$$p_\alpha(x)=\inf_t\{t\geqslant0,\ f_x(t)>1-\alpha\} \tag{4.4}$$

是E上的半范数，而且半范数族$\{p_\alpha,\ \alpha\in(0,1]\}$在$E$上是满足分离点的，即对每一$x\in E$，$x\neq0$，存在某一$\alpha\in(0,1]$，使得$p_\alpha(x)\neq0$。

(ii) $(E,\ \mathscr{F})$是由上述半范数族$\{p_\alpha,\ \alpha\in(0,1]\}$所导出的局部凸空间，而且对每一$x\in E$，

$$\mathscr{U}(x)=\{U(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n,\varepsilon):\varepsilon>0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n\in(0,1],\ n\text{ 是自然数}\}$$

是 x 的邻域基，其中

$$U(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n,\ \varepsilon)=\{y\in E:p_{\alpha_i}(x-y)<\varepsilon,\ \alpha_i\in(0,1],\ i=1,\cdots,n\}$$

(iii) E中由x的邻域基$\mathscr{U}(x)$所导出的拓扑与由x的下形的邻域基$\mathscr{N}(x)$：

$$\mathscr{N}(x)=\{N_x(\varepsilon,\alpha):\varepsilon>0,\ \alpha>0\},\qquad \alpha\in(0,1]$$

其中

$$N_x(\varepsilon,\alpha)=\{y\in E:f_{x-y}(\varepsilon)>1-\alpha\}$$

所导出的拓扑是一致的。

证

(i) 对每一$\alpha\in(0,1]$和任一$x\in E$，易知$p_\alpha(x)\geqslant 0$；$p_\alpha(0)=0$；另对任一$\lambda\in R$，$\lambda\neq 0$有

$$p_\alpha(\lambda x)=\inf_t\{t\geqslant 0:f_{\lambda x}(t)>1-\alpha\}=\inf_t\left\{t\geqslant 0:f_x\left(\frac{t}{|\lambda|}\right)>1-\alpha\right\}$$
$$=|\lambda|\inf_t\{t\geqslant 0:f_x(t)>1-\alpha\}=|\lambda|\cdot p_\alpha(x)$$

又当$\lambda=0$时，显然有$p_\alpha(0,x)=0\cdot p_\alpha(x)$。

另由p_α的定义和任意的$\varepsilon>0$有

$$f_x\left(p_\alpha(x)+\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-\alpha,\quad f_y\left(p_\alpha(y)+\frac{\varepsilon}{2}\right)>1-\alpha$$

于是由条件(PN-5)，即得

$$f_{x+y}(p_\alpha(x)+p_\alpha(y)+\varepsilon)>1-\alpha$$

故有

$$p_\alpha(x+y)=\inf_t\{t\geqslant 0:f_{x+y}(t)>1-\alpha\}\leqslant p_\alpha(x)+p_\alpha(y)+\varepsilon$$

让$\varepsilon\to 0$，即得

$$p_\alpha(x+y)\leqslant p_\alpha(x)+p_\alpha(y),\qquad x,y\in E,\ \alpha\in(0,1]$$

因而得证对每一$\alpha\in(0,1]$，p_α是E上的半范数。

其次对任一$x\in E$，$x\neq 0$，若对$\forall\alpha\in(0,1]$有$p_\alpha(x)=0$，即

$$\inf_t\{t\geqslant 0:f_x(t)>1-\alpha\}=0,\qquad \forall\alpha\in(0,1]$$

故对任一$\varepsilon>0$，有

$$f_x(\varepsilon)>1-\alpha,\qquad \forall\alpha\in(0,1]$$

让$\alpha\to 0$，即得$f_x(\varepsilon)=1$，$\forall\varepsilon>0$，由(PN-1)即得$x=0$。矛盾。由此矛盾知存在某一$\alpha\in(0,1]$，使得$p_\alpha(x)\neq 0$。

结论(i)得证。

(ii) 因$\{p_\alpha,\ \alpha\in(0,1]\}$是$E$上的半范数族，故由局部凸空间的一般理论知结论(ii)成立。

(iii) 为了证明结论(iii)我们首先证明

$$N_x(\varepsilon,\alpha)=U(x,\ \alpha,\ \varepsilon)\tag{4.5}$$

事实上，设$y\in N_x(\varepsilon,\alpha)$，于是有$f_{x-y}(\varepsilon)>1-\alpha$。由分布函数$f_{x-y}$的左连续性，存在$\varepsilon'\in(0,\varepsilon)$，使得

$$f_{x-y}(\varepsilon)\geqslant f_{x-y}(\varepsilon')>1-\alpha$$

从而有

$$\inf_t\{t\geqslant 0:f_{x-y}(t)>1-\alpha\}\leqslant\varepsilon'<\varepsilon$$

故$y\in U(x,\ \alpha,\ \varepsilon)$。反之，设$y\in U(x,\ \alpha,\ \varepsilon)=\{y\in E:p_\alpha(x-y)<\varepsilon\}$，故有

$$p_\alpha(x-y)=\inf_t\{t\geqslant 0: f_{x-y}(t)>1-\alpha\}<\varepsilon$$

因而

$$f_{x-y}(\varepsilon)>1-\alpha，\text{即} y\in N_x(\varepsilon,\alpha)$$

把上面的讨论结合起来得知（4.5）成立。

另对每一$U(x, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \varepsilon)\in\mathscr{U}(x)$有

$$U(x, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \varepsilon)=\{y\in E: p_{\alpha_i}(x-y)<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n, \alpha_i\in(0,1]\}$$

$$=\bigcap_{i=1}^n U(x, \alpha_i, \varepsilon)=\bigcap_{i=1}^n N_x(\varepsilon, \alpha_i)$$

上式表明$\mathscr{U}(x)$与$\mathscr{N}(x)$等价，故分别由它们所导出的拓扑等价。

推论4.3 设（E, $\mathscr{F}$, Δ）是一M-PN-空间，其中$\Delta=\min$。设p_α，$\alpha\in(0,1]$是由（1.4）式定义的函数，则定理4.2的结论仍成立。

证 我们只要注意当$\Delta=\min$时，$\mathscr{F}$满足条件(PN-5)，故推论的结论由定理4.2得知。

五、概率度量空间的拓扑性质

在前面几节中我们已证明当$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$时，则PM-空间（E, $\mathscr{F}$）是一度量空间，而当$\mathscr{F}$满足（PM-5）或（PN-5）时，则M-PM-空间和PN-空间分别是度量空间和局部凸空间。因此度量空间和局部凸空间的许多重要概念都可移植到这些空间中来。作为例子我们考察下面的一些概念。

定义 6 设（E, $\mathscr{F}$）是一PM-空间，其中$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$。序列$\{x_n\}\subset E$称为d-收敛于$x\in E$，其中d由（2.1）式定义，记为$x_n\xrightarrow{d}x$，如果对任给的$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，当$n\geqslant N$时有$F_{x_nx}(\varepsilon)=1$；$\{x_n\}\subset E$称为d-Cauchy列，如果对任给的$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，当m, $n\geqslant N$时有$F_{x_m,x_n}(\varepsilon)=1$。称（$E$, $\mathscr{F}$）是d-完备的，如果对E中的每一Cauchy列，都d-收敛于E中的一点。称集合$A\in(E, \mathscr{F})$是按d为ε-稠的，$\varepsilon>0$，如果对每一$x\in E$，存在$x_*\in A$，使得$F_{x,x_*}(\varepsilon)=1$。称（E, $\mathscr{F}$）是d-全有界的，如果对每一$\varepsilon>0$，存在有限子集$A\subset E$，使得A按d在E中是ε-稠的。

定义 7 设（E, $\mathscr{F}$, Δ）是M-PM-空间，再设或者$\mathscr{F}$满足（PM-5）或设Δ满足条件$\Delta(a,b)\geqslant\max\{a+b-1,0\}$，$a$, $b\in[0,1]$。设d^*由(3.1)式定义。E中的序列$\{x_n\}$称为d^*-收敛于$x\in E$（记为$x_n\xrightarrow{d^*}x$），如果对任给的$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，当$n\geqslant N$时，有$F_{x_nx}(\varepsilon)>1-\varepsilon$；$\{x_n\}\subset E$称为$d^*$-Cauchy列，如果对任给的$\varepsilon>0$，存在$N=N(\varepsilon)$，当$m$, $n\geqslant N(\varepsilon)$时，有$F_{x_n,x_m}(\varepsilon)>1-\varepsilon$。称($E$, $\mathscr{F}$, Δ)是d^*-完备的，如果对E中任何d^*-Cauchy列都收敛于E中的某一点。称集$A\subset E$是d^*-ε-稠集，如果对每一$x\in E$，存在$x_*\in A$，使得$F_{x_*,x}(\varepsilon)>1-\varepsilon$。称（$E$, $\mathscr{F}$, Δ）是d^*-全有界的，如果对每一$\varepsilon>0$，存在有限集$A\subset E$，使得A在E中是ε-稠的。

定理5.1 设(E, $\mathscr{F}$)是一PM-空间，且$\mathscr{F}$取值于$\mathscr{D}_0$。则E是d-完备的（d由(2.1)式定义），当而且仅当对E中每一满足如下条件的d-闭子集族$\mathscr{L}$有$\bigcap_{M\in\mathscr{L}}M\neq\phi$：

（i）$\mathscr{L}$具有限交性质；

（ii）对每一$\varepsilon>0$，存在$A\in\mathscr{L}$，使得$D_A(\varepsilon)=1$，其中

$$D_A(t)=\sup_{s<t}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(s),\qquad t\in R \tag{5.1}$$

证 我们只要证明由条件(ii)可推出下面的条件(ii)′，于是结论由一熟知的结果(见[12，定理4.3.10]) 即可得知：

(ii)′ 对每一$\varepsilon>0$，存在$A\in\mathscr{L}$，使得A的直径

$$\delta(A)=\sup_{x,y\in A}d(x,y)\leqslant\varepsilon$$

事实上，由假定对每一$\varepsilon>0$，存在$A\in\mathscr{L}$，使得$D_A(\varepsilon)=1$，因而有

$$\sup_{s<\varepsilon}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(s)=1$$

从而有

$$F_{x,y}(\varepsilon)=1,\ \forall x,y\in A,\ \text{即}d(x,y)\leqslant\varepsilon,\ \forall x,\ y\in A$$

故条件(ii)′成立。定理证毕。

类似地可得下面的结果：

定理5.2 设 $(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$ 是一Menger PM-空间，或Δ满足条件$\Delta(a,b)\geqslant\max\{a+b-1,\ 0\}$，$\forall a,\ b\in[0,1]$，或$\mathscr{F}$满足条件(PM-5)。则$E$是$d^*$-完备的，其中$d^*$由 (3.1) 式定义，当而且仅当对$E$中每一满足如下条件的$d^*$-闭子集族$\mathscr{L}$都有$\bigcap_{M\in\mathscr{L}}M\neq\phi$：

(i) $\mathscr{L}$具有限交性质；

(ii) 对每一$\varepsilon>0$，存在$A\in\mathscr{L}$，使得$D_A(\varepsilon)>1-\varepsilon$，其中$D_A(t)$由 (5.1) 式定义。

证 由假定对每一$\varepsilon>0$，存在$A\in\mathscr{L}$，使得

$$D_A(\varepsilon)=\sup_{s<\varepsilon}\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(s)>1-\varepsilon$$

因而有

$$\inf_{x,y\in A}F_{x,y}(\varepsilon)>1-\varepsilon$$

从而由 (3.3) 有

$$\delta(A)=\sup_{x,y\in A}d^*(x,y)\leqslant\varepsilon$$

故定理的结论由[12，定理4.3.10]得知。证毕。

定理5.3 设 $(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$ 满足定理5.2中的条件。

(1) 下列结论等价：

(a) E是紧的；

(b) E是可数紧的；

(c) E是列紧的。

(2) E是全有界的当而且仅当E是可分的。

(3) E是Hausdorff的正规的正则的仿紧空间。

(4) 若 $(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$ 还是完备的，则

(a) E是Čech完全空间；

(b) 设$\{A_i\}_{i\geqslant1}$是E中的无处稠密集的序列，则$E\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$在$E$中稠。

证 在定理的条件下，$(E,\ \mathscr{F},\ \Delta)$是可度量化空间，而且其度量函数由(3.1)式定义，故定理的结论由熟知的结果（见[12]）得知。

参 考 文 献

[1] 张石生，概率度量空间中映象的不动点定理及应用，中国科学，A辑，6 (1983)，495—504.

[2] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社 (1984).

[3] Zhang Shi-sheng, On the theory of probabilistic metric spaces with applications, *Acta. Math. Sinica*, New Series, 1, 4 (1985), 366—377.

[4] Zhang, S.S., The metrization of probabilistic metric spaces with applications, *Zbornik Radova Prirodnomate-Matickog Fakulteta u Novom Sadu, Serija Za Matematiku*, 15, 1 (1985), 107—117.

[5] Hicks, T. L. and P. L. Sharma, Probabilistic metric structures: Topological classification, Ibid, 14, 1 (1984), 35—42.

[6] Hicks, T. L. and P. L. Sharma, Random normed structures, Ibid, 14, 1 (1984), 43—50.

[7] Hadzic, O., Some fixed point theorems in probabilistic metric spaces, Ibid, 15, 1 (1985), 23—36.

[8] Radu, V., On some fixed point theorems in probabilistic metric spaces, *Seminarul de Teoria Probabilitatilor, si Applicatii*, 74 (1985), 1—10.

[9] Constantin, Gh, On some classes of contraction mappings in Menger spaces, Ibid, 76 (1985), 1—10.

[10] Schweizer, B., A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 673—675.

[11] Schweizer, B. and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York, Amsterdam, Oxford (1983).

[12] Engelking, R., *General Topology*, Warszawa (1977).

[13] Nadler, S. B., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, 30 (1969), 475—487.

Basic Theory and Applications of Probabilistic Metric Spaces (Ⅰ)

Zhang Shi-sheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

This paper is devoted to the study of the basic theory and applications of probabilistic metric spaces (PM-space). In this paper the topological structure and properties for PM-space are considered. The conditions of metrization and the form of metric functions for PM-spaces, Menger PM-spaces and probabilistic normed linear spaces (PN-space) are given and the characterizations of various probabilistically bounded sets are presented. As applications we utilize these results obtained in this paper to study the linear operator theory and fixed point theory on PM-spaces.