

# 关于集中载荷作用下不同材料界面的共线裂纹问题

蒋持平 刘又文

(哈尔滨工业大学) (中南工业大学)

(樊大钧推荐, 1986年12月15日收到)

## 摘 要

本文继文[6]之后, 研究在集中力和集中力偶作用下不同材料界面的共线裂纹问题. 得到了几个典型的复应力函数封闭解, 算出了应力强度因子. 本文解答的若干特殊情形, 与前人成果吻合. 通过比较还发现了以往文献[3], [4]在研究含无限长裂纹一类问题中的错误.

## 一、基本公式推导

参阅文[1]与[2], 平面弹性理论问题的解可由两个解析函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 表示. 设 $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ 和 $\tau_{xy}$ 分别表示在直角坐标中的应力分量,  $u$ 和 $v$ 表示位移分量, 则有

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \quad (1.1)$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \quad (1.2)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \quad (1.3)$$

此处  $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$  (1.4)

$\mu$ 为剪切模量,  $\sigma$ 为泊松比. 对于平面应变问题 $\kappa=3-4\sigma$ , 对于平面应力问题 $\kappa=(3-\sigma)/(1+\sigma)$ . 应力函数 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 在弹性体所占域内全纯, 但在集中力和集中力偶作用处有孤立极点. 设弹性体在 $z_0$ 处作用有集中力 $X+iY$ 和集中力偶 $m$ , 则有

$$\Phi(z) = \frac{M}{z-z_0} + \Phi_0(z) \quad (1.5)$$

$$\Psi(z) = \frac{N}{z-z_0} + \frac{\bar{z}_0 M + M_0}{(z-z_0)^2} + \Psi_0(z) \quad (1.6)$$

其中 $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$ 为弹性体所占域内的全纯函数.

$$M = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}, \quad N = \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}, \quad M_0 = -\frac{im}{2\pi} \quad (1.7)$$

若 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 在上半平面 $S^+$ 有定义, 则可利用Schwarz对称原理将 $\Phi(z)$ 越过实轴上无载荷区段(如裂纹处)延拓到下半平面 $S^-$ :

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \quad z \in S^- \quad (1.8)$$

此处  $\bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$ 。这样定义于  $S^+$  的  $\Psi(z)$  可以为延拓后的  $\Phi(z)$  所表达:

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \bar{\Phi}(z) - z\Phi'(z) \quad z \in S^+ \quad (1.9)$$

于是公式(1.2)和(1.3)成为

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\Phi'(z) \quad (1.10)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\Phi'(z) \quad (1.11)$$

显然前述公式完全可以交换  $S^+$  和  $S^-$  的位置。

我们的问题提法如下:如图1,设弹性常数为  $\mu_1$  和  $\kappa_1$  的介质 I 占有上半平面  $S^+$ , 弹性常数为  $\mu_2$  和  $\kappa_2$  的介质 II 占有下半平面  $S^-$ 。约定相应于这两种介质的量以下标 I 和 II 标记。设两种介质沿实轴上  $L_j$  互相联接,  $L$  为  $L_j$  整体, 其余部分  $L'_j$  (裂纹) 上假定不受力。对于  $n$  条有限裂纹, 裂纹端点依次是  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ ; 对于包含两条半无限裂纹在内的  $n+1$  条裂纹, 裂纹端点依次是  $b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, a_1$ 。假设集中力  $X+iY$  和集中力偶  $m$  作用在  $S^+$  的  $z_0$  处, 并设无穷远处应力为零。

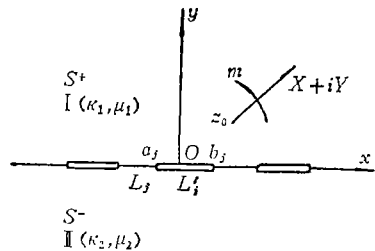


图 1

由公式(1.5)和(1.6), 相应于物质 I 的应力函数  $\Phi_1(z)$  在  $S^+$  的奇性主部为  $M_1/(z-z_0)$ ,  $\Psi_1(z)$  在  $S^+$  的奇性主部为  $N_1/(z-z_0) + (\bar{z}_0 M_1 + M_0)/(z-z_0)^2$ , 其中  $M_1 = -(X+iY)/2\pi(1+\kappa_1)$ ,  $N_1 = \kappa(X-iY)/2\pi(1-\kappa_1)$ ,  $M_0 = -im/2\pi$ 。按公式(1.8)拓展后的  $\Phi_1(z)$  为:

$$\Phi_1(z) = \frac{M_1}{z-z_0} - \frac{N_1}{z-\bar{z}_0} + \frac{M_1(\bar{z}_0-z_0) - M_0}{(z-\bar{z}_0)^2} + \Phi_{10}(z) \quad (1.12)$$

其中  $\Phi_{10}(z)$  在沿  $L$  (联接处) 割开的全平面全纯。同样推导, 相应于物质 II 的  $\Phi_2(z)$  拓展后在沿  $L$  割开的全平面全纯。于是剩下的问题是决定  $\Phi_{10}(z)$  和  $\Phi_2(z)$ 。它可由联接边界的应力和位移的连续条件确定:

$$[\sigma_y - i\tau_{xy}]^+ = [\sigma_y - i\tau_{xy}]^- \quad \text{全实轴上} \quad (1.13)$$

$$[u + iv]^+ = [u + iv]^- \quad L \text{ 上} \quad (1.14)$$

先讨论只含有限长裂纹 (联结线无限) 的情形。

将公式(1.10)代入(1.13)并令  $z$  分别从  $S^+$  和  $S^-$  趋于实轴上  $t$  值:

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \Phi_2^-(t) - \Phi_2^+(t) \quad \text{全实轴上} \quad (1.15)$$

在(1.12)式代入后移项整理:

$$[\Phi_{10}(t) + \Phi_2(t)]^+ - [\Phi_{10}(t) + \Phi_2(t)]^- = 0 \quad \text{全实轴上} \quad (1.16)$$

由于已假定无穷远应力为零, 并且可假设两个半平面向无穷远回转都为零, 故有

$$\Phi_{10}(\infty) = \Phi_2(\infty) = 0 \quad (1.17)$$

根据 Liouville 定理,

$$\Phi_{10}(z) + \Phi_2(z) = 0 \quad (1.18)$$

现在将(1.14)两边对  $x$  求导并将(1.11)代入

$$\frac{\kappa_1}{\mu_1} \Phi_1^+(t) + \frac{1}{\mu_1} \Phi_1^-(t) = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \Phi_2^-(t) + \frac{1}{\mu_2} \Phi_2^+(t) \quad (1.19)$$

将(1.12)和(1.18)代入上式并稍加整理:

$$\Phi_{10}^+(t) - g \Phi_{10}^-(t) = hf(t) \quad (1.20)$$

$$\text{其中 } g = -\frac{\mu_1\kappa_2 + \mu_2}{\mu_2\kappa_1 + \mu_1}, \quad h = -\frac{\mu_2\kappa_1 + \mu_2}{\mu_2\kappa_1 + \mu_1} \quad (1.21)$$

$$f(t) = \frac{M_1}{t-z_0} - \frac{N_1}{t-\bar{z}_0} + \frac{\bar{M}_1(\bar{z}_0-z_0) - \bar{M}_0}{(t-\bar{z}_0)^2} \quad (1.22)$$

根据文[2], 方程(1.20)的通解为

$$\Phi_{10}(z) = \frac{hX_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z} + X_0(z)P(z) \quad (1.23)$$

$$\text{其中 } X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z-a_j)^{-\frac{1}{2}-i\beta} (z-b_j)^{-\frac{1}{2}+i\beta} \quad (1.24)$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \ln|g| \quad (1.25)$$

$X_0(z)$ 的单值分枝取为, 在沿 $L$ 切开的平面上

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n X_0(z) = 1 \quad (z \in S^+) \quad (1.26)$$

$$\text{而 } P(z) = C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \dots + C_n \quad (1.27)$$

通解(1.23)中的柯西型积分可以由文[2]提供的方法算出.  $P(z)$ 中的常数 $C_1, \dots, C_n$ 则由联结线上位移连续条件确定(前面仅利用了位移对 $x$ 的导函数的连续条件):

$$\begin{aligned} & [u_1(b_j) + iv_1(b_j)]^+ - [u_1(a_j) + iv_1(a_j)]^+ \\ & = [u_2(b_j) + iv_2(b_j)]^- - [u_2(a_j) + iv_2(a_j)]^- \quad j=1, \dots, n \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\text{即 } \int_{a_j}^{b_j} [u_1'(t) + iv_1'(t)]^+ dt = \int_{a_j}^{b_j} [u_2'(t) + iv_2'(t)]^- dt \quad j=1, \dots, n \quad (1.29)$$

考虑到方程(1.11), 同时注意到 $\Phi_1(z)$ 和 $\Phi_2(z)$ 在 $L'$ 上解析, 上式成为

$$\frac{1+\kappa_1}{2\mu_1} \int_{a_j}^{b_j} \Phi_1(t) dt = \frac{1+\kappa_2}{2\mu_2} \int_{a_j}^{b_j} \Phi_2(t) dt \quad j=1, \dots, n \quad (1.30)$$

再考虑到(1.12)和(1.18)

$$(\mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_1 + \mu_1 + \mu_2) \int_{a_j}^{b_j} \Phi_{10}(t) dt = -(\mu_2\kappa_1 + \mu_2) \int_{a_j}^{b_j} f(t) dt \quad j=1, \dots, n \quad (1.31)$$

共 $n$ 个方程可唯一确定 $n$ 个常数 $C_j$ .

当两端裂纹伸向无穷时, 分析过程基本相同. 这里仅指出不同的地方, 注意所讨论的是包含两条半无限裂纹在内的共 $n+1$ 条裂纹.

首先, 我们不能同时假定两个半平面在无穷远处转角为零, 如果假定上半平面在无穷远处的转角为零, 代替(1.17)式, 有

$$\Phi_{10}(\infty) = \Phi_1(\infty) = 0 \quad (1.32)$$

$$\Phi_2(\infty) = Ci \quad (1.33)$$

其中 $C$ 为实常数.乍看起来, 纯虚数 $Ci$ 似乎仅是一个不影响应力的常数, 但是我们很快可以看到, 这种看法是不正确的. 也正是因为疏忽了这一点, 以往研究此类问题的[3]和[4]都引出了错误的结果.

这样考虑后, (1.18)改变为

$$\Phi_2(z) = -\Phi_{10}(z) + Ci \quad (1.34)$$

方程(1.20)改变为

$$\Phi_{10}^+(t) - g\Phi_{10}^-(t) = hf(t) + h^*Ci \quad (1.35)$$

$$\text{其中 } h^* = \frac{\mu_1 k_2 + \mu_1}{\mu_2 k_1 + \mu_1} \quad (1.36)$$

通解(1.23)改变为

$$\Phi_{10}(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{hf(t) + h^*Ci}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z} + X_0(z)P(z) \quad (1.37)$$

计算出其中柯西型积分后, 还有实常数 $C$ 和 $P(z)$ 中复常数 $C_1, \dots, C_n$ 共 $n+1$ 个常数需要确定. 显然, 半无限长裂纹的上下两边的位移是互相独立的, 因此方程(1.31)中 $j=2, 3, \dots, n$ 仅有 $n-1$ 个求解诸常数的方程. 为此我们还必须考虑下半平面在有限长联接线上作用于上半平面的应力主矢 $P+iQ$ 和对原点的主矩 $M^*$ . 这样在上半平面的有限域内, 外力主矢为 $P+iQ+X+iY$ , 对于充分大的 $|z|$ , 有<sup>[2]</sup>

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{2\pi z} (P+iQ+X+iY) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (1.38)$$

设逆时针方向的 $M^*$ 为正, 我们有

$$M^* = -\operatorname{Re} \int_L t[\sigma_y^+(t) - i\tau_{xy}^+(t)] dt = -\operatorname{Re} \int_L t[\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)] dt \quad (1.39)$$

$$\therefore M^* = -\operatorname{Re} \oint_A z\Phi_1(z) dz \quad (1.40)$$

其中 $A$ 为顺时针包围各 $L_j$ 的闭围线的整体, 奇点 $z_0, \bar{z}_0$ 在围线外.

于是由(1.31), (1.38), (1.40)可以得出 $n+1$ 个线代数方程组唯一地确定 $n+1$ 个待定常数.

人们会自然地提出这样一个问题: 为什么在无限长裂纹或有限联接情形要补充给出作用于联接线上的应力主矢和主矩, 而仅含有限长裂纹时却又无须给出呢? 这个问题也包含非常重要的实际工作意义.

实际工程构件例如平板不可能是数学上的无穷大. 当联接线与裂纹长度相比充分小时, 就可以看作有限长联接的情形. 由静力平衡条件, 载荷无论离裂纹端点多远, 在联接线上必引起一个分布力, 这个分布力能合成一个力和一个力偶, 不能被忽略.

而在有限长裂纹的情形, 这种由平衡产生的约束力分布在无穷联接线上, 当载荷充分远时, 在联接线任何有限部分产生的力就趋于零, 我们就不须考虑这些载荷的影响了. 我们只须令下节(2.22)中 $|z_0| \rightarrow \infty$ 而立即得出 $\Phi_1(z) \rightarrow 0$ , 就可以验证这一点.

上面我们不仅说明了两种情形下求解条件不同的原因, 也说明了在实际工程中, 什么情况下我们必须计及远处载荷的影响, 什么情况下可以忽略它.

## 二、算例及对照

例1 有一条从 $a$ 到 $b$ 的有限长裂纹.

根据(1.23),  $\Phi_{10}(z)$ 在沿 $L(-\infty, a, \text{和 } b, \infty)$ 割开的全平面全纯,

$$\Phi_{10}(z) = X_0(z)[hI(z) + C_1] \quad (2.1)$$

$$\text{这里 } X_0(z) = (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta}(z-b)^{-\frac{1}{2}+i\beta} \quad (2.2)$$

$X_0(z)$ 所取单值分枝为  $z$  从  $S^+$  趋于  $\infty$  时,  $zX_0(z)=1$ . 可以推出, 当  $z$  从  $S^-$  趋于  $\infty$  时,  $zX_0(z)=1/g$

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z} \quad (2.3)$$

为了计算  $I(z)$ , 取

$$I_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_1} \frac{f(t)}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z} \quad (2.4)$$

$$I_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A_2} \frac{f(t)}{X_0^-(t)} \frac{dt}{t-z} \quad (2.5)$$

其中  $A_1$  和  $A_2$  分别为从  $S^+$  和  $S^-$  趋于实轴的直线. 考虑到

$$X_0^+(t) = X_0^-(t) \quad \text{在 } L' \text{ 上} \quad (2.6)$$

$$X_0^+(t) = gX_0^-(t) \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (2.7)$$

立即得出

$$I(z) = \frac{1}{1-g} [I_1(z) - I_2(z)] \quad (2.8)$$

另一方面,  $I_1(z)$  和  $I_2(z)$  很容易根据推广的对无限域的柯西公式得出:

$$I_1(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{X_0(z)} - G_{z_0}(z) - \frac{1}{2}(M_1 - \bar{N}_1) & z \in S^+ \\ -G_{z_0}(z) - \frac{1}{2}(M_1 - \bar{N}_1) & z \in S^- \end{cases} \quad (2.9)$$

$$I_2(z) = \begin{cases} G_{\bar{z}_0}(z) + \frac{1}{2}g(M_1 - \bar{N}_1) & z \in S^+ \\ -\frac{f(z)}{X_0(z)} + G_{\bar{z}_0}(z) + \frac{1}{2}g(M_1 - \bar{N}_1) & z \in S^- \end{cases} \quad (2.10)$$

其中  $G_{z_0}(z)$  和  $G_{\bar{z}_0}(z)$  分别为  $f(z)/X_0(z)$  在  $z_0$  和  $\bar{z}_0$  的奇性主部:

$$G_{z_0}(z) = \frac{1}{X_0(z_0)} \cdot \frac{M_1}{z-z_0} \quad (2.11)$$

$$G_{\bar{z}_0}(z) = \frac{1}{X_0(\bar{z}_0)} \left[ -\frac{\bar{N}_1}{z-\bar{z}_0} + \frac{\bar{M}_1(\bar{z}_0-z_0) - \bar{M}_0}{(z-\bar{z}_0)^2} + \frac{\bar{z}_0 - \frac{1}{2}(a+b) + i\beta(a-b)}{(\bar{z}_0-a)(\bar{z}_0-b)} \cdot \frac{\bar{M}_1(\bar{z}_0-z_0) - \bar{M}_0}{z-\bar{z}_0} \right] \quad (2.12)$$

这样将(2.1)代入(1.31)得

$$\int_a^b J(t) dt = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{其中 } J(t) = \frac{X_0(t)}{X_0(z_0)} \frac{M_1}{t-z_0} + \frac{X_0(t)}{X_0(\bar{z}_0)} \left[ -\frac{\bar{N}_1}{t-\bar{z}_0} + \frac{\bar{M}_1(\bar{z}_0-z_0) - \bar{M}_0}{(t-\bar{z}_0)^2} + \frac{\bar{z}_0 - \frac{1}{2}(a+b) + i\beta(a-b)}{(\bar{z}_0-a)(\bar{z}_0-b)} \cdot \frac{\bar{M}_1(\bar{z}_0-z_0) - \bar{M}_0}{z-\bar{z}_0} \right] + C^* X_0(t) \quad (2.14)$$

$$\text{已设 } C^* = \frac{1}{2}(1+g)(M_1 - \bar{N}_1) - \frac{1-g}{h} C_1 \quad (2.15)$$

为了从(2.13)计算常数  $C^*$ , 考察如图 2 围道积分  $\oint J(z)dz$ , 围道  $A$  在通过割线  $L$  后在下半平面进入了  $X_0(z)$  的另一枝. 令  $A$  收缩于  $ab$ , 不难得出

$$\oint_A J(z)dz = (1-g) \int_a^b J(t)dt = 0 \quad z_0, \bar{z}_0 \text{ 在 } A \text{ 外} \quad (2.16)$$

利用留数定理容易得出

$$2\pi i \left[ \frac{X_0(z_0)}{X_0'(z_0)} M_1 - \frac{X_0^*(\bar{z}_0)}{X_0'(\bar{z}_0)} N_1 - C^* \right] = 0 \quad (2.17)$$

$$\text{其中 } X_0^*(\bar{z}_0) = (r_1 \exp[-i\theta_1])^{-\frac{1}{2} - i\beta} (r_2 \exp[-i\theta_2])^{-\frac{1}{2} + i\beta} \quad (2.18)$$

$$X_0(\bar{z}_0) = (r_1 \exp[-i\theta_1])^{-\frac{1}{2} - i\beta} [r_2 \exp[i(2\pi - \theta_2)]]^{-\frac{1}{2} + i\beta} \quad (2.19)$$

$$\therefore \frac{X_0^*(\bar{z}_0)}{X_0(\bar{z}_0)} = \exp \left[ -2\pi i \left( -\frac{1}{2} + i\beta \right) \right] = -\exp[2\pi\beta] = g \quad (2.20)$$

$$C^* = M_1 - gN_1 \quad (2.21)$$

经最后整理我们获得:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & h_1 \left[ \frac{M_1}{z-z_0} - \frac{N_1}{z-\bar{z}_0} + \frac{(\bar{z}_0-z_0)M_1 - M_0}{(z-\bar{z}_0)^2} \right] + h_2 \frac{X_0(z)}{X_0(z_0)} \cdot \frac{M_1}{z-z_0} \\ & + h_2 \frac{X_0(z)}{X_0(\bar{z}_0)} \left[ -\frac{N_1}{z-\bar{z}_0} + \frac{(\bar{z}_0-z_0)M_1 - M_0}{(z-\bar{z}_0)^2} + \frac{z_0 - \frac{1}{2}(a+b) + i\beta(a-b)}{(\bar{z}_0-a)(\bar{z}_0-b)} \right. \\ & \left. \cdot \frac{M_1(\bar{z}_0-z_0) - M_0}{z-\bar{z}_0} \right] + h_2(M_1 - gN_1)X_0(z) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{其中 } h_1 = \frac{\mu_1\kappa_2 + \mu_1}{\mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_1 + \mu_1 + \mu_2}, \quad h_2 = \frac{\mu_2\kappa_1 + \mu_2}{\mu_1\kappa_2 + \mu_2\kappa_1 + \mu_1 + \mu_2} \quad (2.23)$$

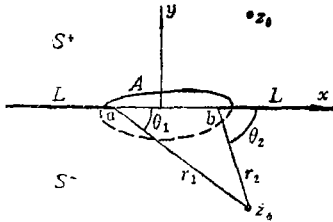


图 2

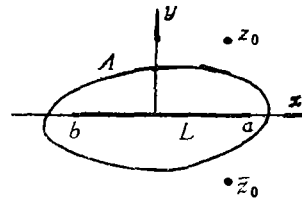


图 3

## 例2 两条半无限裂纹.

由通解(1.37),  $\Phi_{10}(z)$  在沿  $ba$  (注意,  $ba$  即  $L$  为联接处) 割开的全平面全纯, 见图3.

$$\Phi_{10}(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{hf(t) + h^*Ci}{X_0^+(t)} \frac{dt}{t-z} + C_1 X_0(z) \quad (2.24)$$

其中  $X_0(z)$  见(2.2), 但所取分枝为  $z$  趋于  $\infty$  时 (包括从  $S^+$  和  $S^-$ )  $zX_0(z) = 1$  的分枝. 由与例 1 同样的方法, 我们得到

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & h_1 \left[ \frac{M_1}{z-z_0} - \frac{N_1}{z-\bar{z}_0} + \frac{(\bar{z}_0-z_0)M_1 - M_0}{(z-\bar{z}_0)^2} \right] + h_2 \frac{X_0(z)}{X_0(z_0)} \cdot \frac{M_1}{z-z_0} \\ & + h_2 \frac{X_0(z)}{X_0(\bar{z}_0)} \left[ -\frac{N_1}{z-\bar{z}_0} + \frac{(\bar{z}_0-z_0)M_1 - M_0}{(z-\bar{z}_0)^2} + \frac{z_0 - \frac{1}{2}(a+b) + i\beta(a-b)}{(\bar{z}_0-a)(\bar{z}_0-b)} \right. \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\bar{M}_1(\bar{z}_0 - z_0) - \bar{M}_0}{z - \bar{z}_0} \Big] + h_1 C_i \left\{ 1 - \left[ z - \frac{1}{2}(a+b) - i\beta(a-b) \right] X_0(z) \right\} + C_1 X_0(z) \quad (2.25)$$

下面讨论如何具体确定(2.25)中实常数 $h_1 C$ 和复常数 $C_1$ 。注意到对充分大的 $|z|$ 有

$$X_0(z) = \frac{1}{z} + \left[ \frac{1}{2}(a+b) + (a-b)\beta i \right] \frac{1}{z^2} \\ + \left[ \left( \frac{3}{8} + i\beta - \frac{\beta^2}{2} \right) a^2 + \left( \frac{1}{4} + \beta^2 \right) ab + \left( \frac{3}{8} - i\beta - \frac{\beta^2}{2} \right) b^2 \right] \frac{1}{z^3} + \dots \quad (2.26)$$

从(1.38)和(2.25)，我们得到

$$h_1(M_1 - \bar{N}_1) + C_1 = -\frac{P+iQ}{2\pi} - \frac{X+iY}{2\pi} \quad (2.27)$$

$$\therefore C_1 = -\frac{P+iQ}{2\pi} - h_2 \frac{X+iY}{2\pi} \quad (2.28)$$

将(2.25)代入(1.40)并由留数定理计算其中围道积分(围道 $A$ 见图3)后，得

$$M^* = -\operatorname{Re} 2\pi i \left\{ h_2 M_1 z_0 - \frac{h_2 M_1}{X_0(z_0)} - h_2 \bar{N}_1 \bar{z}_0 + \frac{h_2 \bar{N}_1}{X_0(\bar{z}_0)} + h_2 [(\bar{z}_0 - z_0) \bar{M}_1 - \bar{M}_0] \right. \\ \left. - \frac{h_2}{X_0(\bar{z}_0)} \cdot \frac{\bar{z}_0 - \frac{1}{2}(a+b) + i\beta(a-b)}{(\bar{z}_0 - a)(\bar{z}_0 - b)} \cdot [(\bar{z}_0 - z_0) \bar{M}_1 - \bar{M}_0] \right. \\ \left. - C_1 \left[ \frac{1}{2}(a+b) + i\beta(a-b) \right] + \left[ \left( \frac{1}{8} + \frac{\beta^2}{2} \right) a^2 - \left( \frac{1}{4} + \beta^2 \right) ab \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{1}{8} + \frac{\beta^2}{2} \right) b^2 \right] h_1 C_i \right\} \quad (2.29)$$

为了便于对照，令 $b = -a$ ，然后解出 $h_1 C$

$$h_1 C = \frac{M^* - 2h_2 X \beta a - 2P \beta a}{\pi(1+4\beta^2)a^2} - \frac{2}{(1+4\beta^2)a^2} \operatorname{Im} \left\{ h_2 M_1 z_0 - \frac{h_2 M_1}{X_0(z_0)} \right. \\ \left. - h_2 \bar{N}_1 \bar{z}_0 + \frac{h_2 \bar{N}_1}{X_0(\bar{z}_0)} + h_2 [(\bar{z}_0 - z_0) \bar{M}_1 - \bar{M}_0] - \frac{h_2}{X_0(\bar{z}_0)} \frac{\bar{z}_0 + 2i\beta a}{\bar{z}_0^2 - a^2} \right. \\ \left. \cdot [M_1(\bar{z}_0 - z_0) - \bar{M}_0] \right\} \quad (2.30)$$

其中 $\operatorname{Im}$ 表示“虚部”。

上两个解答的若干特殊情形，与以往文献中的成果吻合。

在(2.22)中，令集中力偶 $m=0$ ，并取 $a$ 为 $-a$ ，取 $b$ 为 $a$ ，与[5]中解答吻合。应该指出，由于解法不同， $X_0(z)$ 在实轴上割线位置与文[5]不同，这样使两文 $X_0(z_0)$ 由于幅角计算不同而相差一个 $g$ 因子。以后遇此情况不再一一说明。

令(2.22)中 $X+iY=0$ ，即得仅作用集中力偶的解答

$$\Phi_1(z) = \frac{-h_1 \bar{M}_0}{(z - \bar{z}_0)^2} - h_2 \bar{M}_0 \frac{X_0(z)}{X_0(\bar{z}_0)} \left[ \frac{1}{(z - \bar{z}_0)^2} + \frac{\bar{z}_0 - \frac{1}{2}(a+b) + i\beta(a-b)}{(\bar{z}_0 - a)(\bar{z}_0 - b)} \frac{1}{z - \bar{z}_0} \right] \quad (2.31)$$

没有找到对照解答。

令(2.22)中材料参数 $\mu_1 = \mu_2$ ， $\kappa_1 = \kappa_2$ ，即得含一条直线裂纹的同种材料平面内作用有集中力和集中力偶的解答，与[3]相应的解吻合。

现在讨论两条半无限裂纹的情形。从(1.12), (1.33)和(2.25), 相应于介质 I 的应力函数  $\Phi_2(z)$  为

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = & h_2 \left[ \frac{M_1}{z-z_0} - \frac{N_1}{z-\bar{z}_0} + \frac{(z_0-z_0)\bar{M}_1 - \bar{M}_0}{(z-\bar{z}_0)^2} \right] - h_2 \frac{X_0(z)}{X_0(z_0)} \frac{M_1}{z-z_0} \\ & - h_2 \frac{X_0(z)}{X_0(\bar{z}_0)} \left[ -\frac{N_1}{z-\bar{z}_0} + \frac{(z_0-z_0)\bar{M}_1 - \bar{M}_0}{(z-\bar{z}_0)^2} + \frac{\bar{z}_0 - \frac{1}{2}(a+b) + i\beta(a-b)}{(\bar{z}_0-a)(\bar{z}_0-b)} \right. \\ & \left. + \frac{\bar{M}_1(\bar{z}_0-z_0) - \bar{M}_0}{z-\bar{z}_0} \right] - h_1 C i \left\{ 1 - \left[ z - \frac{1}{2}(a+b) - i\beta(a-b) \right] X_0(z) \right\} \\ & - C_1 X_0(z) + C i \end{aligned} \quad (2.32)$$

令(2.32)中  $\mu_1 \rightarrow \infty$ , 并为便于对照, 已设  $b$  为  $-a$ . 这样

$$h_2 \rightarrow 0, \quad h_1 C \rightarrow \frac{M^* - 2P\beta a}{\pi(1+4\beta^2)a^2}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = & -\frac{M^* - 2P\beta a}{\pi(1+4\beta^2)a^2} i \{ 1 - (z - 2i\beta a) X_0(z) \} \\ & + \frac{P+iQ}{2\pi} X_0(z) + C i \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\text{其中} \quad X_0(z) = (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \quad (2.34)$$

$$\beta = \lim_{\mu_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2}{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1} = \frac{1}{2\pi} \ln \kappa_2 \quad (2.35)$$

这是半平面上作用刚印问题的解答, 其中作用于刚印的外力主矢为  $-P-iQ$ , 外力对原点的主矩为  $-M^*$ . 在  $P=0, M^*=0$  的特殊情形, 解(2.33)同文[2]有水平基底的刚印问题的解一致. 而当  $P+iQ=0$  时, 则同文[2]在给定力偶下的刚印问题的解吻合, 这除了相差一个不影响应力的虚常数以外.

本文的解答也订正了以往关于有限联接问题的研究中的某些错误.

在文献[3]和[4]中, 对于包含两条半无限裂纹的情形, 由于忽视了两个半平面在无穷远转角不能同时假定为零, 作用于联接线上的应力主矢和主矩必须给定的问题, 得出了错误结果.

文[4]研究的问题相当于本文关于有限联结问题中,  $X+iY=0, m=0$  的特殊情形. 对两条半无限裂纹, 文[4]中解答(33)和(34)为

$$\Phi_1(z) = -\frac{P+iQ}{2\pi} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \quad z \in S^+ \quad (2.36)$$

$$\Phi_2(z) = \frac{P+iQ}{2\pi} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \quad z \in S^- \quad (2.37)$$

为比较方便, 上两式已换成本文记号. 由本文(2.25)和(2.32)中  $M_1=0, N_1=0, \bar{M}_0=0$ , 我们得到这个问题的正确解答:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & -\frac{P+iQ}{2\pi} (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \\ & + \frac{M^* - 2P\beta a}{\pi(1+4\beta^2)a^2} i \left[ 1 - (z - 2i\beta a) (z+a)^{-\frac{1}{2}+i\beta} (z-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \right] \quad z \in S^+ \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\Phi_2(z) = -\Phi_1(z) + iC \quad z \in S^- \quad (2.39)$$



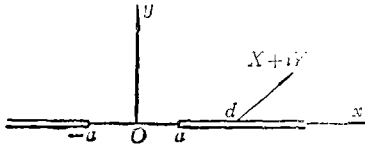


图 4

文[4]中解(44)也是不正确的。

文[3]研究了图4所示的问题,其中两半平面为同种材料,文[3]解答(18)为

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{4\pi(z-d)} \left[ \left( \frac{d^2-a^2}{z^2-a^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \quad (2.40)$$

其中记号已换成本文的记号。在本文(2.25)和(2.30)中令  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $m=0$ ,  $z_0 = d$ , 我们获得正确解答:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & -\frac{X+iY}{4\pi(z-d)} \left[ \left( \frac{d^2-a^2}{z^2-a^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] \\ & + \frac{i}{\pi a^2} \left[ M^* + \frac{1}{2} Y d - \frac{1}{2} Y (d^2-a^2)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{z}{(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ & - \left( \frac{P+iQ}{2\pi} + \frac{X+iY}{4\pi} \right) \frac{1}{(z^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

在(2.40)和(2.41)中,  $\Phi(z)$  定义在沿  $(-\infty, -a)$  和  $(a, \infty)$  割开的平面上。

### 三、应力强度因子

有了复应力函数  $\Phi(z)$  的表达式, 就不难得出断裂力学中有重要意义的应力强度因子。

本文采用文[5]关于不同弹性材料界面直线裂纹尖端复应力强度因子的定义。

例如, 对于例1中的问题, 在裂纹尖端  $b$  的复应力强度因子可以从(2.22)求得:

$$\begin{aligned} K_1 - iK_2 = & 2\sqrt{2} \exp[-\pi\beta] \lim_{z \rightarrow b} (z-b)^{\frac{1}{2}-i\beta} \Phi_1(z) \\ = & 2\sqrt{2} \exp[-\pi\beta] h_2 (b-a)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \left\{ \left[ 1 + \frac{1}{(b-z_0)X_0(z_0)} \right] M_1 \right. \\ & \left. - \left[ g + \frac{1}{(b-\bar{z}_0)X_0(\bar{z}_0)} \right] N_1 + \frac{\left( \frac{1}{2} + i\beta \right) (a-b) [M_1(z_0-z_0) - M_0]}{(b-\bar{z}_0)^2 (a-\bar{z}_0) X_0(\bar{z}_0)} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

关于  $X_0(z_0)$  见(2.19)式。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 樊大钧, 《数学弹性力学》, 新时代出版社 (1983), 374.
- [ 2 ] Мусхелишвили Н. И., 《数学弹性力学的几个基本问题》, 科学出版社 (1958).
- [ 3 ] Erdogan, F., On the stress distribution in plates with collinear cuts under arbitrary loads, *Proceedings of the 4-th U. S. National Congress of Applied Mechanics*, Vol. 1 (1962).
- [ 4 ] Erdogan, F., Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks, *J. Appl. Mech.*, 30 (1963), 232—236.
- [ 5 ] Loeber, J. F. and G. C. Sih, Green's function for cracks in nonhomogeneous materials, *J. Appl. Mech.*, 34 (1967), 240—234.
- [ 6 ] 刘又文、蒋持平, 在集中力和集中力偶作用下不同弹性材料圆形界面的裂纹问题, *应用数学和力学*, 8, 3 (1987), 267—276.

## Problems on Collinear Cracks between Bonded Dissimilar Materials under Concentrated Loads

Jiang Chi-ping

(*Engineering Mechanics Department, Haerbin Institute of Technology, Haerbin*)

Liu You-wen

(*Mathematics and Physics Department, Central-South University  
of Technology, Changsha*)

### Abstract

Following Ref. [6], this paper deals with the problem on collinear cracks between bonded dissimilar materials under a concentrated force and moment at an arbitrary point. Several typical solutions of complex stress functions in closed form are formulated and the stress intensity factors are given. These solutions include a series of results of previous researchers, and redress some errors in the researches of problems containing semi-infinite cracks<sup>[3],[4]</sup>.