应用数学和力学，第9卷第1期（1988年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

大位移非线性弹性理论的变分原理和广义变分原理

钱伟长

（上海工业大学；上海应用数学和力学研究所）

（1986年12月1日收到）

摘　要

在前文中[1]，作者首次提出了大位移非线性弹性力学的位能原理和余能原理，以及各种完全的和不完全的广义变分原理．但在约束条件和欧拉条件上，证明和叙述都不很明确，有时甚至把原来应该是欧拉方程的误认为是约束条件，如余能驻值原理中，应力位移关系原应是欧拉方程，但把它当作了变分约束条件．这就是说：我们把余能驻值原理约束得超过了必要的要求．还有，在所有变分原理中，应力应变关系式都是不参加变分的约束条件，亦即，他们是从已定应力导出应变或从已定应变导出应力的约束条件．这一点，在文[1]（1979）中，并未明确指出．本文并将用高阶拉氏乘子法，导出更一般的广义变分原理（1983）[2]．本文使用 V．V．Novozhilov 的有关非线性弹性力学的成果（1958）[3]．

一、大变形非线性弹性理论

一般研究弹性体的大位移（即有限）变形时，可以采用拉格朗日坐标，这种坐标有时称为拖带坐标（Comoving Coordinates)．这种坐标是 L．Brillonin (1928)[4]所首先使用的，称为拉格朗日坐标，Synge 和钱伟长(1940)[5]称为拖带坐标．即弹性体上各实点都用坐标值x_i标定，这个坐标值x_i在变形的过程中保持不变，但坐标框架的形状变了．例如，在变形前，如果把弹性体各点用卡氏直角坐标框架值x_i标定后，在变形中这个坐标点随各点移动但其值不变，所以坐标框架的形状起了变化．若用u_i来表示位移，则可以证明在大位移的条件下，应变位移关系式可以写成

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}) \qquad (\text{在}V\text{内}) \qquad (1.1)$$

在小位移变形时，略去非线性项$u_{k,i}u_{k,j}$，就可以还原为小位移变形的应变位移关系式．有关大位移变形理论的详细论述，可以参考 V．V．Novozhilov[3]和鹫津久一郎(1965)[6]．

静力平衡是在变形后的条件获得的，平衡单元的表面面积在变形中有了改变，这种改变对于单元的内应力平衡当然是有影响的．如果把这些影响考虑在内，则在大位移变形条件下

的应力平衡方程应该是

$$[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]_{,j}+F_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma\text{内}) \tag{1.2}$$

在小位移时，略去了$\gamma_{ik}+u_{i,k}$中的$u_{i,k}$，就还原为小位移变形条件下的应力平衡条件。(1.2)中γ_{ik}代表克氏符号

$$\gamma_{ik}=\begin{cases}1 & (i=k)\\ 0 & (i\neq k)\end{cases} \tag{1.3}$$

非线性弹性体的应力应变关系见文[7](1987)，总结如下：应力应变关系可以通过应变能密度$A(e_{ij})$来表示，亦即

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{1.4a}$$

也可以用余能密度$B(\sigma_{ij})$来表示，亦即

$$\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{1.4b}$$

也可以根据能量恒等式来表示

$$\Phi=A(e)+B(\sigma)-e_{ij}\sigma_{ij}=0 \tag{1.4c}$$

这里必须指出，对线性的小应变理论而言，$A(e)$是e_{ij}的二次不变量，$B(\sigma)$是σ_{ij}的二次不变量。对于非线性弹性体而言，$A(e)$和$B(\sigma)$分别是e_{ij}和σ_{ij}的高次不变量，而且有正定二次式：

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}\geqslant 0 \tag{1.5a}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial \sigma_{ij}\partial \sigma_{kl}}\delta \sigma_{ij}\delta \sigma_{kl}\geqslant 0 \tag{1.5b}$$

不论是线性和非线性的弹性体而言，(1.4a, b, c)都代表应力应变关系。我们必须指出，对于线性弹性体而言(1.4c)是可以析成因子的，但非线性弹性体，则不能析成因子。即

$$\Phi(e,\sigma)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right) \qquad (\text{线性}) \tag{1.6a}$$

$$\Phi(e,\sigma)\neq\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\left(e_{ij}-\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}\right) \qquad (\text{非线性}) \tag{1.6b}$$

而且有

$$\delta\Phi=\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right)\delta e_{ij}+\left(\frac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}-e_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}=0 \tag{1.7}$$

边界条件为：

位移已给的边界条件，

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{1.8}$$

外力已给的边界条件，

$$(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k=\bar{p}_i \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \tag{1.9}$$

其中

$$S=S_u+S_\sigma=\text{总边界面} \tag{1.10}$$

我们的问题共有3类变量u_i，σ_{ij}，e_{ij}（15个分量），有3种求解这些待定变量（共15个）的方程，即应变大位移关系(1.1)，应力平衡方程(1.2)，和应力应变关系(1.4a)或(1.4b)。

还有边界条件(1.8)，(1.9)。这是一个边界值问题。

我们也可以把这个问题变为变分问题。

二、大位移非线性弹性理论的最小位能原理

大位移非线性弹性理论的最小位能原理和小位移线性弹性理论相同。它可以写成

在满足大位移应变关系(1.1)和边界位移已给的条件(1.8)的所有一切允许的u_i(和e_{ij})中，其使弹性体总位能Π_{LP}为最小的u_i(和e_{ij})，必为有关弹性力学问题的精确解。

亦即：这个变分问题变分约束条件为(1.1)和(1.8)，变分所得欧拉方程为(1.2)和(1.9)[但以$\partial A/\partial e_{ij}$代表$\sigma_{ij}$的]。如果引进不参加变分的约束条件(1.4a)，则上述欧拉方程可以完全改写为(1.2)和(1.9)的形式。

$$\Pi_{LP}=\int_V [A(e)-F_i u_i] dV-\int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i dS \tag{2.1}$$

Π_{LP}在形式上和小位移弹性体的最小位能原理完全一样。

最小位能原理的必要条件为

$$\delta\Pi_{LP}=\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}-F_i\delta u_i\right)dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i\delta u_i dS=0 \tag{2.2}$$

根据(1.1)式，

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}&=\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}+u_{k,i}\delta u_{k,j}+u_{k,j}\delta u_{k,i})\\&=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta u_{i,j}+u_{k,i}\delta u_{k,j})=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\delta u_{k,j}\\&=\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\delta u_k\right]_{,j}-\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}\delta u_k\end{aligned} \tag{2.3}$$

利用葛林定理，并注意$S=S_u+S_\sigma$；在S_u上，$u_k=\bar{u}_k$，所以$\delta u_k=0$。于是

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{LP}=&-\int_V\left\{\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+\bar{F}_k\right\}\delta u_k dV\\&+\int_{S_\sigma}\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})n_j-\bar{p}_k\right]\delta u_k dS=0\end{aligned} \tag{2.4}$$

极值的必要条件给出

$$\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\right]_{,j}+F_k=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.5a}$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\gamma_{ki}+u_{k,i})n_j-\bar{p}_k=0 \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{2.5b}$$

这是用e_{ij}，u_i写的平衡方程和外力已给边界条件。如果引进不参加变分的约束条件(1.4a)，则(2.5a,b)立刻化为(1.2)和(1.9)式。所以约束条件(1.4a)虽不参变分，但在(1.4a)的约束下，Π_{LP}的变分给出欧拉条件(1.2)和(1.9)式。

现在来研究Π_{LP}为极小的充分条件：

$$\delta^2\Pi_{LP}=\int_V\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}dV\geq 0 \tag{2.6}$$

这是(1.5a)所决定的。

$$\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}}\delta e_{ij}\delta e_{kl}=\delta e_{ij}\delta\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\delta e_{ij}\delta\sigma_{ij} \tag{2.7}$$

这是以应力$\delta\sigma_{ij}$和应变δe_{ij}所形成的应变能，所以一定是正的，这就证明了(2.6)。从而证明了最小位能原理的充分条件。

三、大位移非线性弹性理论的余能驻值原理

大位移非线性弹性理论的最小位能原理是大家都知道的(第2节)，但有关余能原理一直到七十年代才获得解决，这里将介绍一种余能驻值原理，它是我在1978年[1]得到的。由于变形中体积元素产生有限变化，所以，象小位移变形弹性理论那样的最小余能原理，我们并未找到，这里介绍的只是一个驻值原理。

大位移非线性弹性力学余能驻值原理

在满足大位移变形的平衡方程(1.2)式，和边界外力已给条件(1.9)式的所有允许的σ_{ij}，u_i中，其使$\Pi_{LC}(\sigma,u)$为驻值的σ_{ij}，u_i必为弹性力学问题的精确解

$$\Pi_{LC}=\int_V\left\{B(\sigma)+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right\}dV-\int_{S_u}\bar{u}_k(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_j dS \tag{3.1}$$

也即是说，在约束条件(1.2)，(1.9)下，使Π_{LC}为驻值的σ_{ij}，u_i，必导出欧拉方程(1.1)和(1.8)式，此外(1.4b)为不参加变分的约束条件。

证明

$$\delta\Pi_{LC}=\int_V\left\{\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}\right\}dV-\int_{S_u}\{\bar{u}_i n_j\delta[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]\}dS=0 \tag{3.2}$$

也可以写成

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{LC}=&\int_V\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{i,k}u_{j,k})\right]\delta\sigma_{ij}dV\\&+\int_V\left\{u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_k)\delta\sigma_{ij}\right\}dV\\&-\int_{S_u}\{\bar{u}_i n_j\delta[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]\}dS=0\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中

$$\begin{aligned}&u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}\\&=u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+(u_{i,j}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}\\&=u_{k,j}\sigma_{ij}\delta(\gamma_{ki}+u_{k,i})+u_{k,j}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\delta\sigma_{ij}\\&=u_{k,j}\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]\end{aligned} \tag{3.4}$$

于是，根据葛林定理和平衡方程（1.2）式，有

$$\int_V u_{k,j}\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dV$$

$$=\int_V\{u_k\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]\}_{,j}dV+\int_V u_k\{\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]\}_{,j}dV$$

$$=\int_{S_u+S_\sigma}u_kn_j\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dS \tag{3.5}$$

由于在S_σ上受外力已给条件(1.9)的约束，所以，在那里有$\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]=0$。上式简化为

$$\int_V u_{k,j}\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dV=\int_{S_u}u_kn_j\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dS \tag{3.6}$$

最后（3.3）可以写成

$$\delta\Pi_{LC}=\int_V\left[\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\sigma_{ij}dV$$

$$+\int_{S_u}(u_k-\bar{u}_k)n_j\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dS=0 \tag{3.7}$$

驻值条件（即驻值原理的欧拉方程）为

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0\qquad(\text{在}V\text{内}) \tag{3.8a}$$

$$u_k-\bar{u}_k=0\qquad(\text{在}S_u\text{上}) \tag{3.8b}$$

使用了不参加变分的约束条件[(1.4b)应力应变关系]，(3.8a)给出应变大位移关系（1.1），而(3.8b)即为边界位移已给条件。这就证明了大位移非线性弹性理论的余能驻值原理。当u_i为小位移时，(3.1)中略去u_i的小量，(3.1)中的Π_{LC}还原为小位移的最小余能原理的泛函。在文章[1](1978)中，我们把(1.1)式或(3.8a)式当作约束条件证明了余能原理。

四、大位移非线性弹性理论的广义位能原理

我们可以利用拉氏乘子法，从位能原理和余能原理中导出大位移变形的两种广义变分原理，并证明它们在应力应变关系的约束下是等价的。这些点在[1](1978)中都已提出。但本文将推导得更合理。

最小位能原理Π_{LP}的u_i，e_{ij}必须受应变位移关系（1.1）和边界位移已给条件（1.8）的约束。设λ_{ij}和μ_i为待定的拉氏乘子，于是Π_{LP}可以改变为新的广义位能泛函$\Pi^*_{LP}(e_{ij},\ u_i,\ \lambda_{ij},\ \mu_i)$。它有四个独立变量，而且已把约束条件(1.1)，(1.8)吸收入新泛函，转变为新泛函的欧拉方程：

$$\Pi^*_{LP}(e_{ij},u_i,\lambda_{ij},\mu_i)=\int_V[A(e)-\bar{F}_iu_i]dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS$$

$$+\int_V\left\{e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right\}\lambda_{ij}dV+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\mu_idS \tag{4.1}$$

变分得

$$\delta\Pi^*_{LP}=\int_V\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\lambda_{ij}\right)\delta e_{ij}-\bar{F}_i\delta u_i+\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}\right.\right.$$

$$\left.\left.+u_{k,i}u_{k,j}\right]\delta\lambda_{ij}-(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}\delta u_{k,j}\right\}dV$$

$$-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i\delta u_i dS+\int_{S_u}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i+\mu_i\delta u_i]dS=0 \tag{4.2}$$

利用葛林定理，我们有

$$-\int_V(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}\delta u_{k,j}dV=\int_V[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}]_{,j}\delta u_k dV$$

$$-\int_{S_u+S_\sigma}(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}\delta u_k n_j dS \tag{4.3}$$

于是(4.2)可以化为

$$\delta\Pi^*_{LP}=\int_V\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\lambda_{ij}\right)\delta e_{ij}\right\}dV+\int_V\{[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}]_{,j}-\bar{F}_k\}\delta u_k dV$$

$$+\int_V\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right]\delta\lambda_{ij}dV$$

$$+\int_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\mu_i dS+\int_{S_u}\{\mu_k-(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j\}\delta u_k dS$$

$$-\int_{S_\sigma}\{\bar{p}_k+(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j\}\delta u_i dS=0 \tag{4.4}$$

这些变分δu_i，δe_{ij}，$\delta\sigma_{ij}$，$\delta\mu_i$，$\delta\lambda_{ij}$等，都是独立的，所以得

(1) 在V内　　$\dfrac{\partial A}{\partial e_{ij}}+\lambda_{ij}=0$　　(4.5a)

(2) 在V内　　$[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}]_{,j}-\bar{F}_k=0$　　(4.5b)

(3) 在V内　　$e_{ij}-\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})=0$　　(4.5c)

(4) 在S_u上　　$u_i-\bar{u}_i=0$　　(4.5d)

(5) 在S_u上　　$\mu_k-(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j=0$　　(4.5e)

(6) 在S_σ上　　$\bar{p}_k+(\gamma_{ki}+u_{k,i})\lambda_{ij}n_j=0$　　(4.5f)

从上式，我们由(4.5a,e)求得待定拉氏乘子

$$\lambda_{ij}=-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}},\quad \mu_k=-(\gamma_{ki}+u_{k,i})n_j\frac{\partial A}{\partial e_{ij}} \tag{4.6a,b}$$

代入(4.5b,f)，得平衡方程(1.2)和外力已给边界条件(1.9)。其余(4.5c,d)分别为应变位移关系(1.1)和位移已知边界条件(1.8)。把(4.6a,b)代入(4.1)式，得双变量(e_{ij},u_i)的广义位能原理的泛函：

$$\Pi^*_{LP}(e_{ij},u_i)=\int_V[A(e)-\bar{F}_iu_i]dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_i dS$$

$$-\int_V\left\{e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right\}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}dV$$

$$-\int_{S_u}(u_k-\bar{u}_k)(\gamma_{ki}+u_{k,i})n_j\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}dS \tag{4.7}$$

双变量广义位能原理

在一切e_{ij}，u_i中，其使$\Pi^*_{LP}(e_{ij},\ u_i)$为驻值的u_i，e_{ij}为大位移非线性弹性力学问题的精确解。应力应变关系(1.4a)为不参加变分的约束条件，在求得了u_i，e_{ij}的精确解后，可以通过(1.4a)求得应力σ_{ij}。

我们也可以用σ_{ij}代替(1.7)中的$\partial A/\partial e_{ij}$，得另一个含有三变量的广义位能原理的泛函

$$\Pi^{**}_{LP}(e_{ij},u_i,\sigma_{ij})=\int_V[A(e)-\bar{F}_iu_i]dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS$$
$$-\int_V\left\{e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right\}\sigma_{ij}dV$$
$$-\int_{S_u}(u_k-\bar{u}_k)(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}n_jdS \tag{4.8}$$

但它受(1.4a)的约束，也即是说σ_{ij}，u_i，e_{ij}并不独立，而是由应力应变关系(1.4a)式联系着（即约束的）。当u_i很小时，在略去非线性项后，(4.8)式的Π^{**}_{LP}退化为胡鹫原理的泛函Π_{HW}(见[8](1985))。

五、大位移非线性弹性理论的广义余能原理

现在让我们用拉氏乘子λ_i，μ_i将Π_{LC}的约束条件(1.2)，(1.9)吸收进新的泛函中去，从而使新的泛函$\Pi^*_{LC}(u_i,\sigma_{ij},\lambda_i,\mu_i)$具有(1.1)，(1.2)，(1.8)，(1.9)四个欧拉方程，当然应力应变关系(1.4b)是σ_{ij}和e_{ij}的不参加变分的约束条件。

$$\Pi^*_{LC}(u_i,\sigma_{ij},\lambda_i,\mu_i)=\int_V\left\{B(\sigma)+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right\}dV$$
$$+\int_V\{[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k\}\lambda_kdV$$
$$-\int_{S_u}\bar{u}_i(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}n_jdS+\int_{S_\sigma}[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i]\mu_idS \tag{5.1}$$

变分给出

$$\delta\Pi^*_{LC}=\int_V\left\{\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\right)\delta\sigma_{ij}+u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}\right.$$
$$\left.+\lambda_k\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}\right\}dV$$
$$+\int_V\{[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k\}\delta\lambda_kdV$$
$$-\int_{S_u}\bar{u}_in_j\delta[(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}]dS$$
$$+\int_{S_\sigma}\{[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i\}\delta\mu_idS+\int_{S_\sigma}\mu_in_k\delta[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}]dS=0 \tag{5.2}$$

和(3.4)相同，我们有

$$\int_V\left\{u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}\right\}dV$$

$$=\int_V u_{k,j}\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dV \tag{5.3}$$

根据葛林定理，上式可以写为

$$\int_V\left\{u_{k,i}\delta u_{k,j}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\delta\sigma_{ij}\right\}dV$$

$$=\int_{S_u+S_\sigma}u_kn_j\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dS-\int_V u_k\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}dV \tag{5.4}$$

把(5.4)式代入(5.2)式，得

$$\delta\Pi^*_{LC}=\int_V\left\{\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\right\}\delta\sigma_{ij}dV$$

$$+\int_V(\lambda_k-u_k)\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}dV+\int_V\{[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k\}\delta\lambda_kdV$$

$$+\int_{S_u}(u_k-\bar{u}_k)n_j\delta[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]dS+\int_{S_\sigma}(\mu_i+u_i)n_k\delta[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}]dS$$

$$+\int_{S_\sigma}\{[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i\}\delta\mu_idS=0 \tag{5.5}$$

于是，得下列欧拉方程

(1) 在V内　　$\dfrac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{i,k}u_{j,k})=0$　　(5.6a)

(2) 在V内　　$\lambda_k-u_k=0$　　(5.6b)

(3) 在V内　　$[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k=0$　　(5.6c)

(4) 在S_u上　　$u_k-\bar{u}_k=0$　　(5.6d)

(5) 在S_σ上　　$\mu_i+u_i=0$　　(5.6e)

(6) 在S_σ上　　$(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i=0$　　(5.6f)

其中(5.6b,e)决定待定拉氏乘子 λ_i，μ_i，

$$\lambda_k=u_k,\quad \mu_i=-u_i \tag{5.7a,b}$$

(5.6a)，(5.6d) 给出用 $\partial B/\partial\sigma_{ij}$ 表示的应力位移关系 (1.1) 和位移已给边界条件 (1.8)，它们是原来的余能原理的欧拉方程。(5.6c,f)是原余能原理的约束条件，现在也变成了新泛函的欧拉方程。

把 (5.7a,b) 代入 (5.1) 式的新泛函 $\Pi^*_{LC}(u_i,\ \sigma_{ij},\ \lambda_i,\ \mu_i)$，形成广义余能原理的泛函 $\Pi^{**}_{LC}(u_i,\sigma_{ij})$，它只有两种变量

$$\Pi^{**}_{LC}(u_i,\sigma_{ij})=\int_V\left\{B(\sigma)+\frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}\right\}dV$$

$$+\int_V\{[(\gamma_{ki}+u_{k,i})\sigma_{ij}]_{,j}+\bar{F}_k\}u_kdV$$

$$-\int_{S_u}\bar{u}_i(\gamma_{ik}+u_{i,k})\sigma_{kj}n_jdS$$

$$-\int_{S_\sigma} u_i[(\gamma_{ij}+u_{i,j})\sigma_{jk}n_k-\bar{p}_i]dS \tag{5.8}$$

这里和广义位能原理一样，应力应变关系(1.4b)是不参加变分的约束条件，在求得了σ_{ij}用它来计算e_{ij}。(5.8)式的驻值条件导出了用$\partial B/\partial\sigma_{ij}$来表示$e_{ij}$的四个欧拉方程，即(1.1)，(1.2)，(1.8)，(1.9)。所以，我们有两变量的广义余能原理。当 u_i 很小，其高次项可以略去不计时，这个广义余能原理化为有名的 Hellinger-Reissner 原理。

六、广义位能原理和广义余能原理的等价定理

$\Pi^{**}_{LP}(u_i, e_{ij}, \sigma_{ij})$ 和 $\Pi^{**}_{LC}(u_i,\sigma_{ij})$ 都受应力应变关系的约束，都能从其变分驻值条件中，以欧拉方程的形式，导出大变形非线性弹性力学的 (1) 平衡方程，(2) 应变位移关系，(3)外力已给边界条件和(4)位移已知边界条件等全部方程和有关边界条件。所以，虽然Π^{**}_{LP}和Π^{**}_{LC}在形式上有差别，在实质上应该没有差别。也即是说，Π^{**}_{LP}和Π^{**}_{LC}在应力应变关系的约束下，应该是等价的。利用(4.8)和(5.8)，我们可以证明

$$\Pi^{**}_{LP}+\Pi^{**}_{LC}=\int_V(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})dV \tag{6.1}$$

在应力应变关系的约束条件下，能量恒等式(1.4c)成立。所以(6.1)式给出

$$\Pi^{**}_{LP}+\Pi^{**}_{LC}=0 \tag{6.2}$$

这指出这两个泛函只差一个正负号，这就证明了：Π^{**}_{LP}和Π^{**}_{LC}是等价的（在应力应变关系的约束条件下成立）。这个等价定理和小位移弹性理论的两种广义变分原理等价是相同的（见[8](1985)）。

七、大位移非线性弹性力学的更一般的三变量完全独立的广义变分原理

用高阶拉氏乘子法(1983)[12]，我们可以把应力应变关系这个约束条件完全吸收到有关的大位移非线性弹性力学的各种广义变分原理的泛函中去。设Λ，Λ'为任意x_i，u_i，σ_{ij}，e_{ij}的函数，让Λ，Λ'为本问题的有关高阶拉氏乘子。称

$$\Pi_{GAL}=\Pi^{**}_{LP}+\int_V\Lambda(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})dV \tag{7.1}$$

$$\Pi_{GA'L}=\Pi^{**}_{LC}+\int_V\Lambda'(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})dV \tag{7.2}$$

其中Π^{**}_{LP}和Π^{**}_{LC}分别代表泛函(4.8)，(5.8)。这两个泛函不再有任何变分约束条件。其变分驻值条件导出全部弹性力学方程及其边界条件。

Π_{GAL}和$\Pi_{GA'L}$之间在某种条件下也是等价的。例如

$$\Pi_{GAL}+\Pi_{GA'L}=\int(1+\Lambda+\Lambda')(A+B-e_{ij}\sigma_{ij})dV \tag{7.3}$$

如果Π_{GAL}，$\Pi_{GA'L}$的泛函为等价，则Λ和Λ'必须满足等价条件。

$$1+\Lambda+\Lambda'=0 \tag{7.4}$$

由于(1.6a,b)，$\Phi(e,\sigma)$ 在非线性条件并不能分解成两个因子，而且Λ，Λ'为任意x_i，

u_i, σ_{ij}, e_{ij}的函数，所以(7.1)，(7.2)都不能误解为众所周知的加权残差法。

八、结 果

本文所得结果$\Pi_{LP}(e,u)$、$\Pi_{LC}(\sigma,u)$，$\Pi^{**}_{LP}(e,u,\sigma)$，$\Pi^{**}_{LC}(u,\sigma)$，$\Pi_{GAL}(e,\sigma,u,A)$、$\Pi_{GA'L}(e,\sigma,u,A')$都适用于非线性弹性和大挠度变形的弹性静力学问题。

当线性弹性和小挠度变形的条件有效时，$\Pi_{LP}(e,u)$还原简化为胡鹫原理[1],[6],[9]的泛函Π_{HW}，同时$\Pi_{LC}(\sigma,u)$还原简化为Hellingen-Reissner原理[10,11]的泛函Π_{HR}。所以，Π_{HW}和Π_{HR}分别是Π_{LP}和Π_{LC}的特殊形式。

这里必须指出，能量恒等式$\Phi(e_{ij},\sigma_{ij})$在小应变时可以析成两个因子$\sigma_{ij}-\partial A/\partial e_{ij}$, $e_{ij}-\partial B/\partial\sigma_{ij}$，但对于一般有限应变问题而言，不能析成两个因子[见(1.6a,b)]。所以，高阶拉氏乘子法和胡海昌所说的 Courant 氏的加权残差法[12]毫无共同之处。

这里必须指出，高阶拉氏乘子法中的乘子A和A'一般都是x_i，σ_{ij}，e_{ij},u_i的函数。当A和A'是待定的常系数时，Π^{**}_{LP}和Π^{**}_{LC}的线性组合才有可能得到Π_{GAL}或$\Pi_{GA'L}$。但一般讲来，A和A'并不是常量，显然Π_{GAL}和$\Pi_{GA'L}$并不能像胡海昌所说的那样从Π^{**}_{LP}和Π^{**}_{LC}的线性组合求得。对小位移的线性弹性体也一样，所以，胡海昌的所谓线性组合法[12]也是似是而非的。

参 考 文 献

[1] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，机械工程学报，**15**，2 (1979)，1—23.

[2] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，**4**，2 (1983)，137—150.

[3] Novozhilov, V. V.，《非线性弹性力学基础》(朱兆祥译)，科学出版社 (1958).

[4] Brillouin, L., *Les Tenssurs en Meconique et en Elasticile*, Paris (1928).

[5] Synge, J. L. and W. Z. Chien (钱伟长), *The Intrinsic Theory of Elastic Shells and Plates*, Th. von Karman anniversary volume (1940), 103—120.

[6] Washizu, K. (鹫津久一郎), *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, London (1968).

[7] 钱伟长，非线性弹性体的弹性力学变分原理，应用数学和力学，**8**，7 (1987)，567—578.

[8] 钱伟长，《广义变分原理》，知识出版社 (1985).

[9] 钱伟长，《变分法及有限元》，北京科学出版社 (1980年)

[10] Reissner, E., On variational principles in elasticity, *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, MacGraw Hill, **8** (1958), 1—6.

[11] Hellinger, E., Der allegemeine Ansatz der Mechanik dev kontinun Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften, part. 4, 4 (1914), 602—694.

[12] 胡海昌，关于拉氏乘子法及其它，力学学报，5 (1985)，426—434.

Variational Principles and Generalized Variational Principles for Nonlinear Elasticity with Finite Displacemant

Chien Wei-zang

(Shanghai University of Technology; Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

In a previous paper (1979), the minimum potential energy principle and stationary complementary energy principle for nonlinear elasticity with finite displacement, together with various complete and incomplete generalized principles were studied. However, the statements and proofs of these principles were not so clearly stated about their constraint conditions and their Euler equations. In some cases, the Euler equations have been mistaken as constraint conditions. For example, the stress displacement relation should be considered as Euler equation in complementary energy energy principle, but have been mistaken as constraint conditions in variation. That is to say, in the above mentioned paper, the number of constraint conditions exceeds the necessary requirement. Furthermore, in all these variational principles, the stress-strain relation never participate in the variation process as constraints, i. e., they may act as a constraint in the sense that, after the set of Euler equations is solved, the stress-strain relation may be used to derive the stresses from known strains, or to derive the strains from known stresses. This point was not clearly mentioned in the previous paper (1979). In this paper, the high order Lagrange multiplier method (1983) is used to construct the corresponding generalized variational principle in more general form. Throughout this paper, V. V. Novozhilov's results (1958) for nonlinear elasticity are used.