

环形板最大挠度极小化的优化设计*

俞焕然 叶开沅

(兰州大学力学系, 1987年6月1日收到)

摘 要

本文讨论环形板的最大挠度极小化的优化设计. 环形板承受任意的轴对称荷载, 利用阶梯折算法, 问题可以化为一个具有等式约束的标准的非线性规划问题. 算例表明, 本文的方法具有很多的优点.

一、引 言

弹性板的优化设计已引起了广泛的重视^[1]. 程耿东与Olhoff关于实心板的最大刚度的优化设计作了研究^[2]. 在文[3]中, 利用不同的方法研究了同一个问题. 在文[4], [5]和[6]中, 处理了弹性板的最大挠度极小化的问题, 因为这些文章中考虑的是任意形状的弹性板, 所以采用的方法极为复杂. 本文, 将用阶梯折算法, 仅处理环形弹性板的优化设计. 文章表明, 利用我们的方法对最大挠度极小化的优化问题将是极为方便的.

我们考虑内外半径分别为 b 和 a 的变厚度的环形弹性薄板. 假定板的弹性模量 E 和泊松比 ν 都是常数. 环形板承受任意分布的轴对称荷载, 且边界条件也是轴对称的. 从而, 挠度也是轴对称的. 取板中面为极坐标平面 (r, θ) , 并将极坐标原点放在圆心上(图1).

于是, 我们的优化设计问题可表成问题 I:

问题 I 确定板的厚度函数 $H(r)$, 使得

$$\text{Max } w(r, H(r))$$

取极小, 约束为

$$H_{\min} \leq H(r) \leq H_{\max}$$

$$\int_b^a H(r) r dr = V_0 / 2\pi$$

这里 H_{\min} 和 H_{\max} 分别表示给定的板的最小厚度和最大厚度, V_0 是给定的板的体积, w 是板的挠度函数.

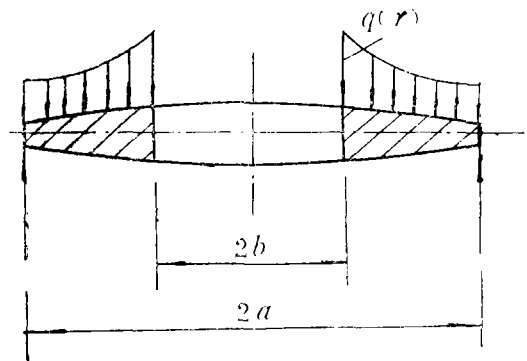


图 1

二、简 化

按照文[7]所给出的阶梯折算法, 我们用 $(n+1)$ 个圆周, 其半径分别为 $b=r_0, r_1, r_2, \dots, r_n=a$, 把全板分成 n 个圆环. 令这 n 个圆环的厚度分别为 H_1, H_2, \dots, H_n , 这里

* 本文得到国家教委科学基金资助. 本文在87年新加坡国际会议上宣读.

$H_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都是常数. 于是立即可以写出该环形板的挠度函数的精确表式

$$w = w(r, H_1, H_2, \dots, H_n)$$

为了避免繁琐, 我们在这里不再给出具体表式, 有兴趣的读者可参看[8]. 于是, 问题 I 可简化为下述问题 II.

问题 II 确定 $n+1$ 个变量 r, H_1, H_2, \dots, H_n , 使得

$$\text{Max } w(r, H_1, H_2, \dots, H_n)$$

取极小, 并满足约束

$$H_{\min} \leq H_i \leq H_{\max} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^n H_i (r_{i-1}^2 - r_i^2) = H_u (a^2 - b^2) \quad (b \leq r \leq a)$$

这里 H_u 是体积为给定体积 V_0 的均匀等厚度板的厚度.

当边界条件是夹支或简支时, 且荷载都是同向时, 最大挠度点必定是唯一的. 于是, 问题 II 可以进一步简化为问题 III.

问题 III 确定 $n+1$ 个变量 r, H_1, H_2, \dots, H_n , 使得

$$w = w(r, H_1, H_2, \dots, H_n)$$

取极小, 满足约束

$$H_{\min} \leq H_i \leq H_{\max} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^n H_i (r_{i-1}^2 - r_i^2) = H_u (a^2 - b^2)$$

$$F(r, H_1, H_2, \dots, H_n) = 0$$

这里函数 F 是挠度函数 w 关于 r 的导函数, 于是问题化成具有等式约束的通常的非线性规划问题. 需要指出的是, 由于 w 的函数已知, 所以导函数 F 极易求得. 正是 w 是已知的, 所以它关于 H_i 的函数亦很易求得. 从而我们可以采用各种多变量的梯度算法来解决上述的非线性规划问题.

三、迭代程序

我们从均匀板开始迭代, 具体程序如下:

$$1^\circ H_i^{(0)} = H_u \quad (i=1, 2, \dots, n); \quad 2^\circ 0 \rightarrow k$$

$$3^\circ w(r^{(k+1)}, H_i^{(k)}) = \text{Max } w(r, H_i^{(k)}); \quad 4^\circ w(r^{(k+1)}, H_i^{(k+1)}) = \min w(r^{(k+1)}, H_i)$$

$$5^\circ \text{ 如 } |w(r^{(k+1)}, H_i^{(k+1)}) - w(r^{(k)}, H_i^{(k)})| < \varepsilon \quad \text{则转向 } 7^\circ$$

$$6^\circ k+1 \rightarrow k, \text{ 转向 } 3^\circ; \quad 7^\circ r^* = r^{(k+1)}, H_i^* = H_i^{(k+1)} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$8^\circ \min \text{Max } w(r, H_i) = w(r^*, H_i^*); \quad 9^\circ \text{ 结束}$$

对于问题 III, 3° 将由 $F(r^{(k+1)}, H_i^{(k)}) = 0$ 来代替.

四、算例

我们计算了在均布荷载作用下, 具有各种边界条件下的环形板的最优厚度分布.

在下面的算例中, 我们取内半径与外半径之比为 $b/a=0.2$, $\nu=0.25$, $n=40$. 迭代都是等厚板开始.

在表1, 2, 3和表4中给出了最优厚度分布的各 H_i 值与等厚板厚度之比, 该等厚板的体积为给定体积. 图3, 5, 7和图9中虚线是等厚度板的挠度曲线, 实线是相应的最优厚度分布下板的挠度曲线. r_0^* 是等厚板的最大挠度点的径向坐标与外半径 a 的比值, r^* 是优化板的相应数值. K 是优化板的最大挠度与等厚板最大挠度的比值.

在计算中, 我们没有给出最大厚度与最小厚度的限制.

4.1 内外边夹支

表1 最优厚度分布值

i	H	i	H	i	H	i	H	i	H
1	2.5496	9	0.8323	17	0.9707	25	0.6358	33	0.8882
2	2.3847	10	0.8304	18	0.9991	26	0.6354	34	0.9970
3	2.1293	11	0.7982	19	1.0084	27	0.6343	35	1.0594
4	1.9391	12	0.7852	20	1.0098	28	0.6266	36	1.0673
5	1.3825	13	0.7833	21	1.0163	29	0.6215	37	1.2396
6	1.3478	14	0.7929	22	1.0167	30	0.6221	38	1.2590
7	1.2857	15	0.8130	23	1.0051	31	0.6288	39	1.2590
8	1.2617	16	0.8265	24	0.9975	32	0.6341	40	1.4690

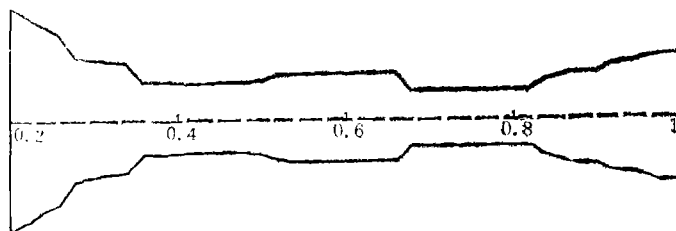


图2 最优断面分布

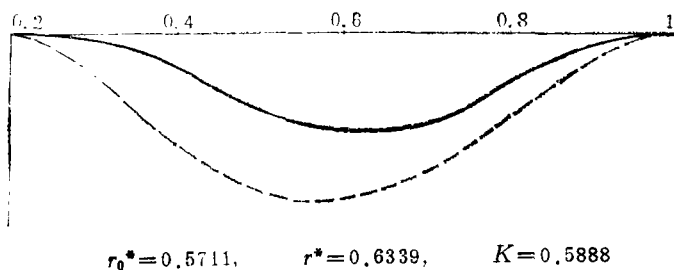


图3 挠度曲线

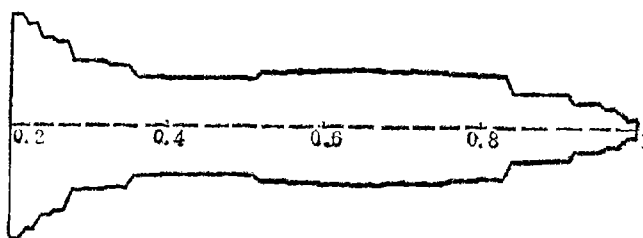
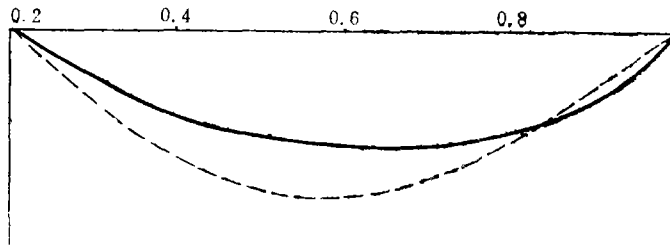


图4 最优断面分布

4.2 内边夹支、外边简支

表 2 最优厚度分布值

i	H	i	H	i	H	i	H	i	H
1	2.3522	9	1.0187	17	1.1504	25	1.1804	33	0.7279
2	2.0136	10	1.0177	18	1.1521	26	1.1818	34	0.7276
3	1.8709	11	1.0063	19	1.1617	27	1.1733	35	0.7263
4	1.7877	12	1.0048	20	1.1639	28	1.1708	36	0.7260
5	1.3655	13	1.0051	21	1.1998	29	1.1273	37	0.5087
6	1.3493	14	1.0049	22	1.2026	30	1.1247	38	0.5086
7	1.2998	15	1.0067	23	1.2147	31	1.1073	39	0.4188
8	1.2907	16	1.0073	24	1.2176	32	1.1039	40	0.2487



$r_0^* = 0.6333, r^* = 0.7230, K = 0.5854$

图5 挠度曲线

4.3 内边简支、外边夹支

表 3 最优分布厚度值

i	H	i	H	i	H	i	H	i	H
1	3.9190	9	1.1195	17	1.2287	25	0.7385	33	0.8183
2	1.3800	10	1.1295	18	1.2145	26	0.7314	34	0.9090
3	1.1644	11	1.1437	19	1.1458	27	0.7224	35	0.9595
4	1.1940	12	1.1576	20	1.0826	28	0.7195	36	1.0174
5	1.0730	13	1.1698	21	0.9987	29	0.7180	37	1.0634
6	1.0705	14	1.1833	22	0.9610	30	0.7195	38	1.1611
7	1.0752	15	1.1903	23	0.9158	31	0.7278	39	1.0950
8	1.0820	16	1.1996	24	0.8915	32	0.7354	40	1.8861

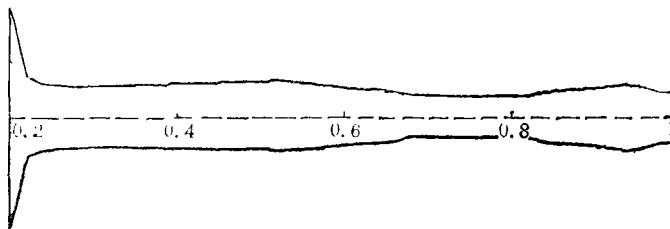
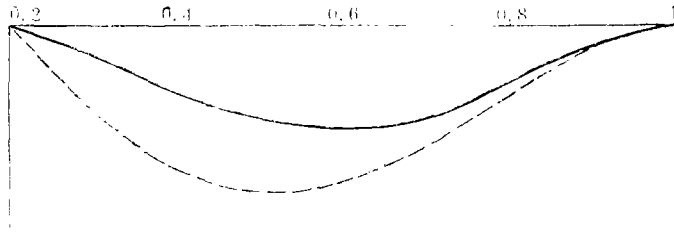


图6 最优断面分布



$$r_0^* = 0.5160, r^* = 0.6138, K = 0.6167$$

图7 挠度曲线

4.4 内外边简支

表4 最优分布厚度值

i	H	i	H	i	H	i	H	i	H
1	1.2364	9	1.1965	17	1.3298	25	1.1624	33	0.6525
2	1.2325	10	1.1966	18	1.3312	26	1.1589	34	0.6522
3	1.2127	11	1.1990	19	1.3376	27	1.1430	35	0.6511
4	1.2092	12	1.1998	20	1.3391	28	1.1397	36	0.6509
5	1.1681	13	1.2207	21	1.3456	29	1.0930	37	0.4991
6	1.1667	14	1.2219	22	1.3468	30	1.0904	38	0.4990
7	1.1626	15	1.2289	23	1.3379	31	1.0788	39	0.3715
8	1.1622	16	1.2304	24	1.3313	32	1.0764	40	0.2718

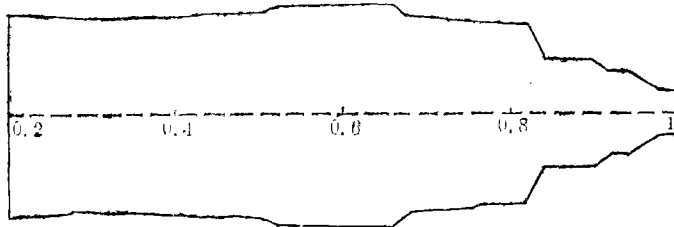
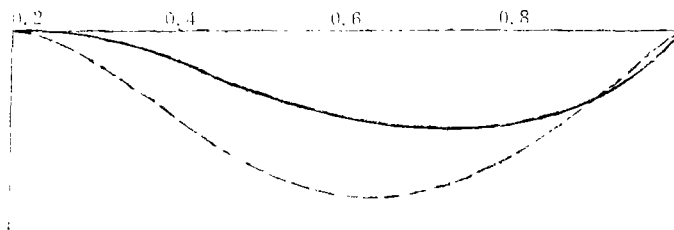


图8 最优断面分布



$$r_0^* = 0.5782, r^* = 0.6454, K = 0.7052$$

图9 挠度曲线

五、讨 论

由图3,5,7,9可看出,最大挠度点在0.65a附近。

当最大厚度和最小挠度的约束忽略时,计算结果仍然是合理的.这表明,这些约束在我们的问题中可以放松,为了实际使用,可以保留最小厚度的约束条件.由计算知,无限薄,高度无限大的肋在目前的条件下是不会形成的.这是因为,对于环形板没有经向的支承,向无

限薄高度无限的肋只能在环向产生,但这些肋无助于最大挠度的降低,因此,我们认为,并于最大厚度与最小厚度的约束可以在一些特殊问题中不计,至少可以加以放松。

对照文[4]可以发现,我们的计算方法简单得多,存储量少得多,完全可以在微机上进行。

参 考 文 献

- [1] Cheng, K. T. and N. Olhoff, An investigation concerning optimal design of solid elastic plate, *Int. J. Solids Structures*, **17** (1981), 305—323.
- [2] Cheng, K. T. and N. Olhoff, Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plate, *Int. J. Solids Structures*, **18**, (1982), 153—169.
- [3] Yu, H. R. and K. Y. Yeh, Optimal design of thin elastic plate under arbitrarily load, *Acta Mech. Sinica, Proceedings of China Researcher of the 16-th ICTAM*, (1986), 348—358.
- [4] Banichuk, N. V., Design of plate for minimum stress and deflection, *Optimization of Distributed Parameter Structures, IOWA*, (1980,1981), 333—361.
- [5] Banichuk, N. V., V. M. Kartvelishvili, and A. A. Mironov, Numerical solution of two-dimensional optimization problems for elastic plate, *Izv. An SSSR, MTT*, No. 1, (1977).
- [6] Banichuk, N. V., V. M. Kartvelishvili, and A. A. Mironov, The numerical method for two-dimensional optimization problem in the theory of elasticity, *Proc. of the V USSR Conference on the Numerical Methods for Solving Elasticity and Plasticity Problems*, Part 2 (in Russian), Novosibirsk, VC SO AN SSSR (1978.)
- [7] Yeh, K. Y., Bending, Buckling and Free Vibration of Nonhomogeneous Variable Thickness Beams, *J. of Lanzhou University (Natural Sciences), Special Number of Mechanics*, **19** (1979)138—157.
- [8] Yeh, K. Y. and J. H. Kue, Bending of arbitrary axisymmetrically non-homogeneous and variable thickness circular plate with holes at centers under arbitrary steady temperature, *J. of Lanzhou university, Special Number of Mech.*, **19** (1979), 75—114.
- [9] Jaroslaw, S. S., B. J. Benjamin, and R. D. Augustine, Structural Optimization by Multilevel Decomposition, *AIAA Journal*, **23**, 11 (1985), 1775—1782.

Optimal Design of Minimax Deflection of an Annular Plate

Yu Huan-ran Yeh Kai-yuan

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

The optimal design of minimax deflection of an annular plate is studied in this paper. The annular plate is subjected to an arbitrary axisymmetric loading. The problem can be posed as a standard nonlinear programming problem with equality constraints by means of the stepped reduction method. Some examples are also given to illustrate the method which has many advantages.