

# 线性蠕变平面问题中的摄 动有限元方法

邬瑞锋 杨海天

(大连工学院, 1985年4月9日收到)

## 摘 要

本文提出一种利用摄动有限元求解线性蠕变问题的方法(PFMC)。它可用于平面蠕变问题, 诸如钢筋混凝土梁, 预应力混凝土梁, 钢筋混凝土圆筒或位于弹性或粘弹性介质中的钢筋混凝土隧洞及地下建筑等。

本方法不采用一般增量法中关于在一个时段内各物理量保持不变的假设, 提高了分析精度, 加大了计算步长, 减少了机器存储, 提高了运算效率。

本文构造了包含钢筋在内的四节点四边形等参单元的有限元摄动格式, 并给出五个算例, 与解析解相比, 有令人满意的精度。

## 一、引 言

随着生产的发展和工程规模的扩大, 材料的蠕变影响愈来愈受到重视。

蠕变分析的特殊困难在于材料的本构关系是应力、应变及它们导数的微分或积分方程式, 加之复杂的边界条件和受荷形式, 一般难求到解析解。

随着计算机技术的发展, 以及各种数值技术, 特别是有限元方法的发展, 为蠕变问题的求解开辟了一个新的天地。

目前, 一般增量方法在这个领域已取得了一些成果<sup>[1,2,3,4,5]</sup>, 但仍存在某些不足:

(i) 一般增量方法要假定在一个时段内材料的性质不改变、应力保持不变或随时间作线性变化<sup>[1,4,5]</sup>, 这显然与真实情况有差异。

(ii) 由于以上假设, 使计算步长受到限制从而增加了计算机时。

(iii) 由于蠕变问题的特殊性, 用一般增量方法计算时, 通常要有较大的信息贮存。

鉴于上述考虑, 本文从 Арутюнян 的线性蠕变理论出发<sup>[6]</sup>, 应用摄动有限元给出一个兼顾到空间和时域的求解蠕变平面问题的一般算法, 它不仅适用于单一蠕变体, 而且适于两个或更多持荷龄期不同的相互耦合的蠕变体, 并较合理简单地考虑了材料性质随时间的改变。

摄动有限元方法 [PFM] 是一种较新的数值方法, 曾被用于弹塑性分析和大变形问题及其它非线性问题<sup>[7,8,9,10]</sup>, 将此用于求解蠕变问题是一个新的尝试, 可克服一般增量方法的不

足, 可用较大的时间步长和较小的存贮得到合用的结果, 从而提高了运算效率. 本文采用四节点四边形等参单元, 并建立了钢筋附属单元.

## 二、线性蠕变理论中的本构方程

从Арутюнян的线性蠕变理论出发, 平面问题的本构方程为:

$$\{\varepsilon(t)\} = [D] \left\{ \{\sigma(t)\} / E(t) - \int_{\tau_0}^t \{\sigma(\tau)\} \frac{\partial}{\partial \tau} [1/E(\tau) + C(t, \tau)] d\tau \right\} \quad (2.1)$$

这里

$$\{\varepsilon(t)\} = \{\varepsilon_x(t), \varepsilon_y(t), \gamma_{xy}(t)\}^T \quad (2.2)$$

$$\{\sigma(t)\} = \{\sigma_x(t), \sigma_y(t), \tau_{xy}(t)\}^T \quad (2.3)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

对平面应力问题按(2.4), 对平面应变问题

$$[D] = \begin{bmatrix} (1-\nu^2) & -\nu(1+\nu) & 0 \\ -\nu(1+\nu) & (1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2.4)'$$

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau)(1 - \exp[-\gamma(t-\tau)]) \quad (2.5)$$

为摄动方便, 将(2.1)转化成微分方程:

$$\frac{d\{\varepsilon(t)\}}{dt} = [D] \left[ \frac{d\{\sigma(t)\}}{dt} / E(t) + \gamma\varphi(t)\{\sigma(t)\} - \int_{\tau_0}^t \{\sigma(\tau)\} \gamma \exp[-\gamma(t-\tau)] [\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)] d\tau \right] \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2\{\varepsilon(t)\}}{dt^2} + \gamma \frac{d\{\varepsilon(t)\}}{dt} = [D] \left[ \frac{d^2\{\sigma(t)\}}{dt^2} / E(t) - \left( \frac{dE(t)}{dt} / E^2(t) - \gamma / E(t) - \gamma\varphi(t) \right) \frac{d\{\sigma(t)\}}{dt} \right] \quad (2.7)$$

(2.1), (2.6), (2.7)是以后用到的本构方程.

## 三、有限元及本构摄动方程

由虚功原理得:

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \delta \{u\}^T \{F\} dV + \int_\Omega \delta \{u\}^T \{f\} d\Omega \quad (3.1)$$

这里,  $\{f\} = \{f_x, f_y\}^T$  是面力向量,  $\{F\} = \{F_x, F_y\}^T$  是体力向量,  $\{u\} = \{u, v\}^T$  是位移向量.

令  $s = (t - t_0) / T$  (3.2a)

此处  $t_0$  是任意时间起点,  $T$  是时段长.

令  $\{\sigma(s)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{\sigma\}^m \cdot s^m$  (3.2b)

$$\{\varepsilon(s)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{\varepsilon\}^m s^m \quad (3.2c)$$

$$\{F(s)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{F\}^m s^m \quad (3.2d)$$

$$\{f(s)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{f\}^m s^m \quad (3.2e)$$

$$\{u(s)\} = \sum_{m=0}^{\infty} \{u\}^m s^m \quad (3.2f)$$

$$E(s) = \sum_{m=0}^{\infty} E^m s^m \quad (3.2g)$$

$$\varphi(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^m s^m \quad (3.2h)$$

由位移应变关系有

$$\{e\}^m = [H]\{u\}^m \quad (3.3)$$

这里

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

将(3.2b)~(3.2f)代进(3.1)得:

$$\int_V \delta(\{\varepsilon\}^l)^T \{\sigma\}^k dV = \int_V \delta(\{u\}^l)^T \{F\}^k dV + \int_{\Omega} \delta(\{u\}^l)^T \{f\}^k d\Omega \quad (l=0, 1, 2, \dots; \quad k=0, 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

$$\text{令} \quad \{u\} = [N]_{\mathbf{q}} \{\bar{u}\} = [N] \sum_{m=0}^{\infty} \{\bar{u}\}^m s^m \quad (3.6)$$

$$\text{那末} \quad \{e\}^m = [H][N]\{\bar{u}\}^m = [B]\{\bar{u}\}^m \quad (3.7)$$

这里 $[N]$ 是形函数矩阵,  $\{\bar{u}\}$ 是节点位移向量,  $[N]$ ,  $\{\bar{u}\}$ ,  $[B]$ 将由具体单元导出.

将(3.6), (3.7)代进(3.5), 我们有

$$\begin{aligned} \sum \int_V \delta(\{\bar{u}\}^l)^T [B]^T \{\sigma\}^k dV &= \sum \int_V \delta(\{\bar{u}\}^l)^T [N]^T \{F\}^k dV \\ &+ \sum \int_{\Omega} \delta(\{\bar{u}\}^l)^T [N]^T \{f\}^k d\Omega \end{aligned} \quad (3.8)$$

将(3.2a)~(3.2h)代入(2.1), (2.6), (2.7), 并在一个时段内近似令

$$E(s) = a_0 + b_0 s \quad (3.9)$$

$$\varphi(s) = c_0 + d_0 s \quad (3.10)$$

在第一时段内  $t_0 = \tau_0$  如果  $s=0$ ,  $t=t_0$

由(2.1)及(2.6), 有

$$\{\sigma\}^0 = [\bar{D}]^{-1} \{\varepsilon\}^0 \quad (3.11a)$$

$$\{\sigma\}^1 = [\bar{D}]^{-1} \{\varepsilon\}^1 - T\gamma c_0 a_0 \{\sigma\}^0 \quad (3.11b)$$

由(2.7), 有

$$\{\sigma\}^2 = [\bar{D}]^{-1} \left\{ \{\varepsilon\}^2 + \frac{T\gamma}{2} \{\varepsilon\}^1 \right\} + \frac{T\gamma}{2} \left[ \frac{b_0}{T\gamma a_0} - (1 + c_0 a_0) \right] \{\sigma\}^1 \quad (3.11c)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^3 = & [\bar{D}]^{-1} \left\{ \{\varepsilon\}^3 + \left( \frac{2b_0}{3a_0} + \frac{T\gamma}{3} \right) \{\varepsilon\}^2 + \frac{T\gamma b_0}{3a_0} \{\varepsilon\}^1 \right\} \\ & - \frac{T\gamma}{3} (1 + c_0 a_0) \{\sigma\}^2 - \frac{T\gamma}{6} (b_0/a_0 + 2b_0 c_0 + a_0 d_0) \{\sigma\}^1 \end{aligned} \quad (3.11d)$$

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^4 = & [\bar{D}]^{-1} \left[ \{\varepsilon\}^4 + \left( \frac{b_0}{a_0} + \frac{T\gamma}{4} \right) \{\varepsilon\}^3 + \left( \frac{b_0^2}{6a_0^2} + \frac{b_0 T\gamma}{3a_0} \right) \{\varepsilon\}^2 \right. \\ & \left. + \frac{b_0^2 T\gamma}{12a_0^2} \{\varepsilon\}^1 \right] - \frac{1}{4a_0} [b_0 + T a_0 \gamma (1 + a_0 c_0)] \{\sigma\}^3 \\ & - \frac{T\gamma}{6} \left( \frac{b_0}{a_0} + 2b_0 c_0 + a_0 d_0 \right) \{\sigma\}^2 - \frac{T\gamma}{12} \left( \frac{b_0^2 c_0}{a_0} + 2b_0 d_0 \right) \{\sigma\}^1 \end{aligned} \quad (3.11e)$$

这里  $[\bar{D}] = [D]/a_0$

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^l = & [\bar{D}]^{-1} \left[ \{\varepsilon\}^l + \frac{2b_0(l-2) + T\gamma a_0}{l a_0} \{\varepsilon\}^{l-1} + \frac{b_0(l-2)}{l \cdot (l-1) a_0^2} [(m-3)b_0 + 2a_0 T\gamma] \{\varepsilon\}^{l-2} \right. \\ & \left. + \frac{T\gamma b_0^2(l-3) \{\varepsilon\}^{l-3}}{a_0^2 l(l-1)} \right] - \frac{b_0(l-3) + T\gamma a_0(1 + a_0 c_0)}{l a_0} \{\sigma\}^{l-1} \\ & - \frac{T\gamma(l-2)[b_0 + 2a_0 b_0 c_0 + a_0^2 d_0]}{l(l-1)a_0} \{\sigma\}^{l-2} - \frac{T\gamma[b_0^2 c_0 + 2a_0 b_0 d_0][l-3]}{l \cdot (l-1)a_0} \{\sigma\}^{l-3} \\ & - \frac{T\gamma b_0^2 d_0(l-4)}{l \cdot (l-1)a_0} \{\sigma\}^{l-4} \quad (l \geq 5) \end{aligned} \quad (3.11f)$$

如果  $b_0 = d_0 = 0$ ,  $E$  和  $\varphi$  将在一个时段内成为常数, 那末可导出更简单的递推公式:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^l = & [\bar{D}]^{-1} \left[ \{\varepsilon\}^l + \frac{T\gamma}{l} \{\varepsilon\}^{l-1} \right] - \frac{\gamma T(1 + a_0 c_0)}{l} \{\sigma\}^{l-1} \\ & l = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

第一时段的初始条件由(3.11a)和(3.11b)给出, 其余时段的初值将由前一时段末的值给出。

#### 四、四节点四边形等参单元

考虑到计算精度程序实现, 采用四节点四边形等参单元, 其基本参数为:

$$\{\bar{u}\} = \{u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m, u_p, v_p\}^T \quad (4.1)$$

$$[N] = [\bar{N}_i, \bar{N}_j, \bar{N}_m, \bar{N}_p] \quad (4.2)$$

$$[N_k] = \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$N_k = \frac{1}{4} (1 + \xi_k \xi) (1 + \eta_k \eta) \quad (4.4)$$

$$[B] = [H][N] = [\bar{B}_i, \bar{B}_j, \bar{B}_m, \bar{B}_p] \quad (4.5)$$

$$[\bar{B}_k] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{16|J|} \begin{bmatrix} (a_4 + B\xi), -(a_0 + B\eta) \\ -(a_3 + A\xi), (a_1 + A\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1 + \eta_k \eta) \xi_k \\ (1 + \xi_k \xi) \eta_k \end{Bmatrix} \quad (k=i, j, m, p) \quad (4.7)$$

这里

$$a_1 = \sum \xi_k x_k \quad (4.8a)$$

$$a_2 = \sum \xi_k y_k \quad (4.8b)$$

$$a_3 = \sum \eta_k x_k \quad (4.8c)$$

$$a_4 = \sum \eta_k y_k \quad (4.8d)$$

$$A = \sum \xi_k \eta_k x_k \quad (4.8e)$$

$$B = \sum \xi_k \eta_k y_k \quad (4.8f)$$

$$|J| = 16^{-1} [(a_1 a_4 - a_3 a_2) + (a_1 B - a_2 A) \xi + (a_4 A - a_3 B) \eta] \quad (4.8g)$$

座标转换后有

$$dx dy = |J| d\xi d\eta \quad (4.9)$$

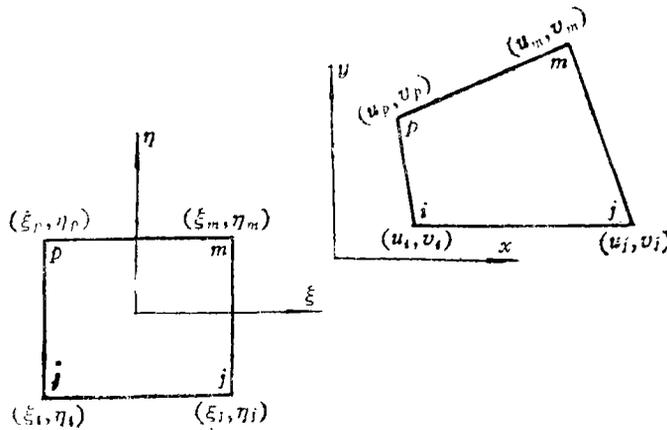


图 1

## 五、钢筋单元的刚度矩阵

基于四节点四边形等参单元，构造一种含钢单元。推导简明，使用方便。在某些问题中应用可得到满意的结果。其基本假设如下：

1. 混凝土和钢筋间无相对滑动
2. 只计钢筋的轴向应力
3. 钢筋变形在弹性限度内
4. 钢筋的两端位于四边形的两对边上。见图2。

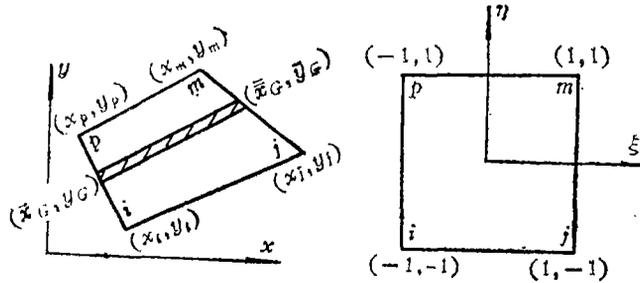


图 2

假设钢筋的两端位于 $ip$ 和 $jm$ 边上。当两端在 $ij$ 和 $mp$ 边上，情形类似。

令 $(\bar{x}_a, \bar{y}_a)$ ,  $(\bar{x}_b, \bar{y}_b)$ 是钢筋两端在 $x-y$ 平面上的座标， $(\bar{\xi}_a, \bar{\eta}_a)$ ,  $(\bar{\xi}_b, \bar{\eta}_b)$ 是 $(\bar{x}_a, \bar{y}_a)$ ,  $(\bar{x}_b, \bar{y}_b)$ 在 $\xi-\eta$ 平面上的对应点。

由对应关系，有

$$\bar{\xi}_a = -1, \bar{\xi}_b = 1$$

$$\bar{\eta}_a = [2\bar{x}_a - (x_i + x_p)] / (x_p - x_i) \quad (5.1)$$

$$\bar{\eta}_b = [2\bar{x}_b - (x_j + x_m)] / (x_m - x_j) \quad (5.2)$$

钢筋的相对位移为：

$$\varepsilon_a = [B]_a \{ \bar{u} \} \quad (5.3)$$

$$[B]_a = [\cos\theta, \sin\theta] [X] \quad (5.4)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} (1-\bar{\eta}_a), 0, -(1-\bar{\eta}_a), 0, -(1+\bar{\eta}_a), 0, (1+\bar{\eta}_a), 0 \\ 0, (1-\bar{\eta}_a), 0, -(1-\bar{\eta}_a), 0, -(1+\bar{\eta}_a), 0, (1+\bar{\eta}_a) \end{bmatrix} / L \quad (5.5)$$

这里 $L$ 是钢筋的长度。

以对混凝土相类似的推导，令 $\sigma_a = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_G^k S^k$  则有

$$[D]_a = E_a AL [B]_a^T [B]_a \quad (5.6)$$

$$\sigma_a^k = E_a [B]_a \{ \bar{u} \}^k \quad (5.7)$$

$[D]_a$ 是钢筋元的刚度矩阵。

## 六、算 例

### 1. 受均匀内压的钢筋混凝土圆筒

考虑一个受均匀内压 $p_1$ 的混凝土圆筒，筒的外表面与钢筋接触，设 $\delta$ 是钢筋的厚度。若每

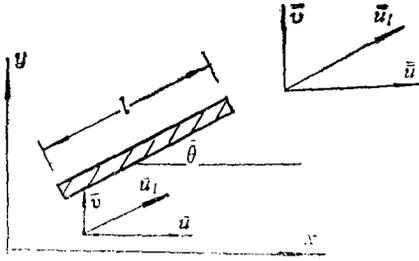


图 3

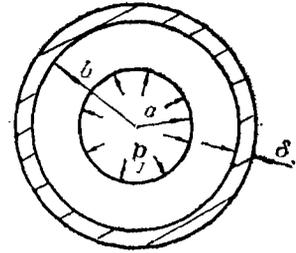


图 4

单位长圆筒钢筋的面积是  $F_a$ , 那么  $F_a = \delta$ , 见图4.

参数和符号给定如下:  $E_a = 2.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $C(t, \tau) = \left(0.9 + \frac{4.82}{\tau}\right) \times (1 - \exp[-0.026(t - \tau)]) \times 10^{-5}$ ,  $N_3$  为摄动阶数,  $\tau_0$  为混凝土加荷龄期,  $\beta = b/a$ ,  $p_1 = 1 \text{ kg/cm}^3$ ,  $E_c = 2.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . 计算结果见图5.

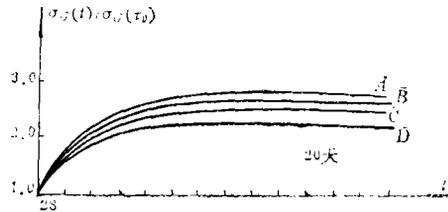
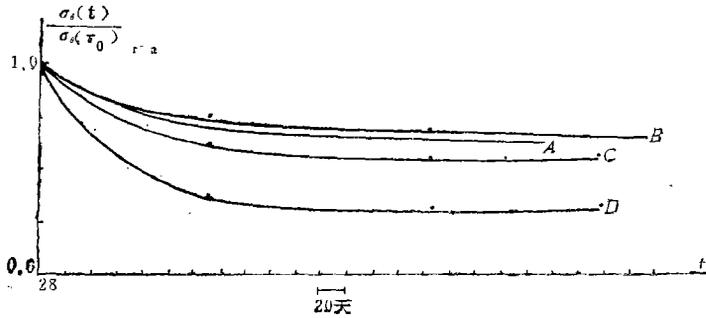


图 5

这里,  $A, \bar{A}$  本文解 ( $N_3 = 4, \beta = 1.3$ , 等步长为 20 天),  $B, \bar{B}$  本文解 ( $N_3 = 5, \beta = 1.3$ , 等步长为 20 天),  $C, \bar{C}$  本文解 ( $N_3 = 5, \beta = 1.2$ . 最小变步长为 20 天), ‘·’ 由 [6] 给出.

## 2. 纯弯曲钢筋混凝土梁

计算两个配筋率  $\mu$  不同的纯弯曲钢筋混凝土梁, 见图6. 当弹性模量  $E$  随时间变化时, 钢筋应力的增加和混凝土应力的减少示于图7(a)和图7(b)中.

这里,  $F_1, \bar{F}$  ( $N_3 = 4, \mu = 1\%$ , 最小变步长为 20 天,  $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ),  $G, \bar{G}$  ( $N_3 = 4, \mu = 2\%$ ,  $E = 2 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , 最小变步长为 20 天),  $H, \bar{H}$  ( $N_3 = 4, \mu = 2\%$ ,  $E = 2 \times 10^5 (1 - \exp[-0.03t]) \text{ kg/cm}^2$ , 最小变步长为 20 天) 由 PPMC 给出, ‘·’ 为 [6] 给出. 其余参数同例1.

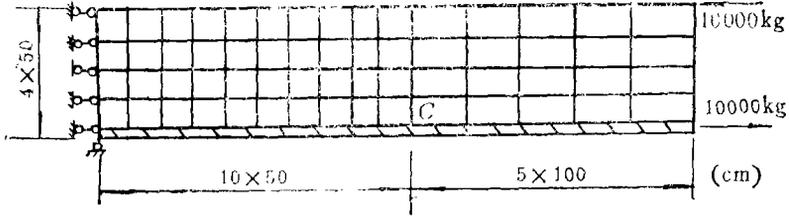


图 6

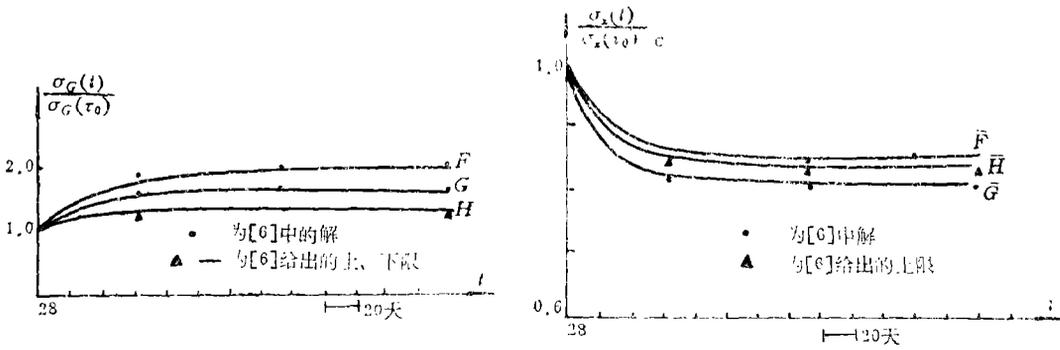


图 7

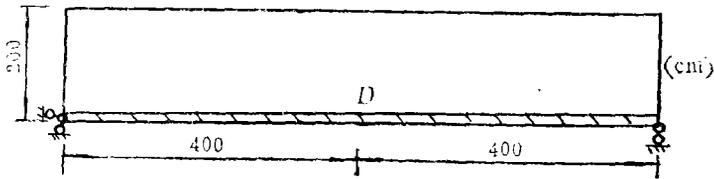


图 8

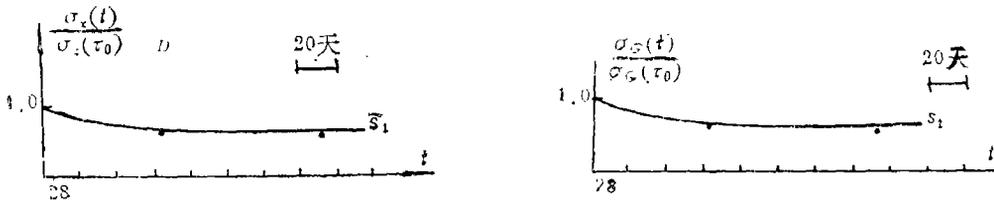


图 9

### 3. 预应力钢筋混凝土梁

图8所示为一预应力钢筋混凝土梁。计算参数给定如下：钢筋初始相对变形为 $\Delta=0.002$ ，配筋比 $\mu=1\%$ ，均匀步长为20天， $N_3=5$ ，其余参数与1同。计算结果示于图9，这里 $s_1, \bar{s}_1$ 由PFMC得到，‘·’由[6]给出。

### 4. 无限大弹性介质中受内压的钢筋混凝土圆筒

图10所示为一无限大弹性介质中受内压的钢筋混凝土圆筒

计算参数给定如下：

$a=200\text{cm}, b=300\text{cm}, \delta=0.6\text{cm}$   $G_0=0.7 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, E_0=2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \nu=0.3, p=$

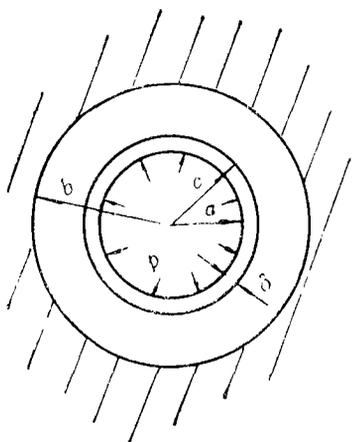


图 10

$10\text{kg/cm}^2, \tau_0=180\text{天}, E_{em}=3.9 \times 10^4\text{kg/cm}^2, \nu_{em}=0.3, \gamma=0.03, \eta(\tau)=\left(0.28 + \frac{4450}{3030 + \tau^2}\right) \times 10^{-5}$

计算结果示于图11、图12, 这里 $s_2, \bar{s}_2, s_3$ 由PFMC给出, ‘o’由[11]给出.

5. 考虑开挖应力后的无限大粘弹性介质中的圆形混凝土衬砌

本例所考虑的情况见图13,  $p$ 是开挖应力, 计算结果见图14与图15

计算参数给定如下:

$E_e=2.0 \times 10^5\text{kg/cm}^2, \nu_e=0.16$

$E_{ve}=1.0 \times 10^4\text{kg/cm}^2, p=-10\text{kg/cm}^2, \nu_{ve}=0.3$

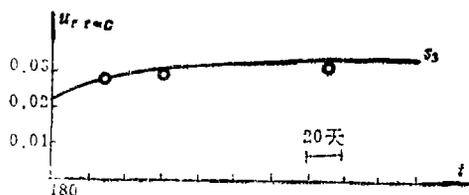
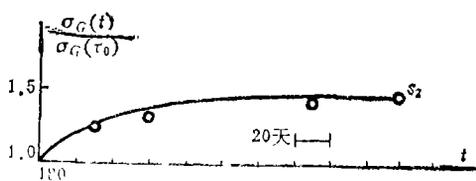


图 11

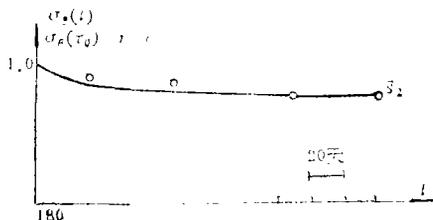


图 12

$a=500\text{cm}, b=470\text{cm}$

混凝土龄期40天·等步长为10天,  $N_3=4$ .

混凝土和粘弹性介质的蠕变度分别为

$C=0.5 \times 10^{-5}(1 - \exp[-0.025(t-\tau)])$

$C_{ve}=5 \times 10^{-4}(1 - \exp[-0.02(t-\tau)])$

开挖后5天衬砌.

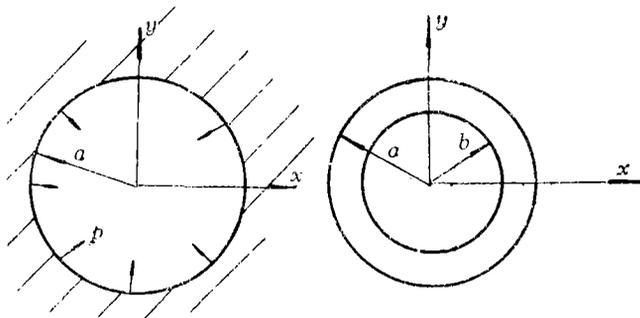


图 13

在图14和图15中,  $l_1, l_2, l_3$ 由PFMC得到,  $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ 由[12]给出.

从以上五个算例可以看出:

(a) 用PFMC可以较大步长得到合用的精度

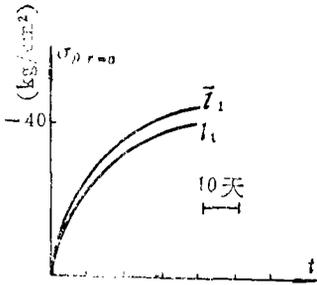


图 14

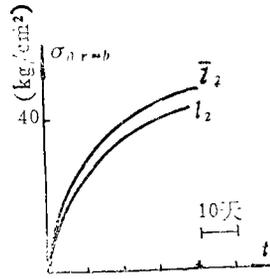
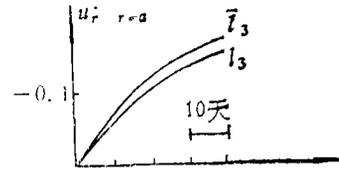


图 15



(b) 在计算时要兼顾考虑步长与摄动阶数的影响, 当步长较大时, 摄动阶数应当提高。

(c) 计算中有限元分析对精度有很大影响特别对于无穷域, 这将在以后讨论。

## 七、结论与展望

- 1、由 PFMC 可以较一般增量法大得多的步长, 得到满意的精度, 从而提高了运算效率。
- 2、PFMC 可用于分析一类平面问题, 诸如钢筋混凝土结构和地下建筑等。
- 3、PFMC 也可用于其它具有线性蠕变规律的结构, 并有希望在非线性蠕变问题中得到应用。

## 参 考 文 献

- [1] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London (1971).
- [2] Bazant, Z. P. and F. H. Wittmann, *Creep and Shrinkage in Concrete Structure*, John Wiley and Sons, Chichester (1982).
- [3] Nesille, A. M. and W. H. Dilger, *Creep of Plane and Structural Concrete*, Longman, London (1982).
- [4] 朱伯芳, 《有限单元法的原理和应用》, 水利电力出版社 (1979)。
- [5] 朱伯芳, 混凝土结构徐变应力分析的隐式解法, 水利工程学报, 5 (1983), 40—46。
- [6] Арутюнян А. X., 《蠕变理论中的若干问题》, 邬瑞锋等译, 科学出版社 (1952)。
- [7] 谢志成等, 在材料非线性问题中的摄动有限元法, 应用数学和力学, 4, 1 (1983), 123—134。
- [8] Yokoo, Yoshisura, Tsuneyoshi Nakamura and Koji Uetani, The incremental perturbation method for large displacement, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 10 (1976), 503—525。
- [9] 谢志成等, 摄动有限元方法解一般轴对称壳几何非线性问题, 应用数学和力学, 5, 5 (1984), 709—722。
- [10] У Жуй-фын (邬瑞锋), Неуставовившаяся ползучесть составной цилиндрической трубы в упругой среде, *Изв. АН АРМ. ССР, Серия Физ. Мат. Наук, Том VII, Вып. 3* (1959)。
- [11] 潘鼎元, 隧道的线性粘弹性分析, 同济大学学报, 3 (1980), 29—39。

# The Perturbation Finite Element Method for Solving the Plane Problem in Consideration of Linear Creep

Wu Rui-feng      Yang Hai-tian

*(Dalian Institute of Technology, Dalian)*

## Abstract

In this paper, a method (PFMC) for solving plane problem of linear creep is presented by using perturbation finite element. It can be used in plane problem in consideration of creep, such as reinforced concrete beam, prestressed concrete beam, reinforced concrete cylinder and reinforced concrete tunnel in elastic or visco-elastic medium, as well as underground building and so on.

In the presented method, the assumption made in the general increment method that variables remain constant in a divided time interval is not taken. The accuracy is improved and the length of time step becomes larger. The computer storage can be reduced and the calculating efficiency can be increased.

Perturbation finite element formulae for four-node quadrilateral isoparametric element including reinforcement are established and five numerical examples are given. As contrasted with the analytical solution, the accuracy is satisfactory.