

高速扩展裂纹尖端的各向异性塑性应力场*

林 拜 松

(中南工业大学, 1986年6月12日收到)

摘 要

在理想弹塑性材料中, 高速扩展裂纹尖端的应力分量都只是 θ 的函数。利用这个条件以及定常运动方程、应力应变关系与 Hill 各向异性屈服条件, 我们得到反平面应变和平面应变两者的一般解。将这两个一般解分别用于扩展 III 型裂纹和 I 型裂纹, 我们就求出了 III 型裂纹和 I 型裂纹的高速扩展尖端的各向异性塑性应力场。

一、引 言

关于裂纹尖端的各向异性塑性应力场问题, 作者研究过静止裂纹尖端的各向异性塑性应力场^[1]。至今还没有人研究过高速扩展裂纹尖端的各向异性塑性应力场。为此, 我们用文献[2]中的方法来解决上述问题。

在高速扩展裂纹尖端的应力分量都只是 θ 的函数的条件下, 利用定常运动方程, 应力应变关系及 Hill 各向异性屈服条件, 我们得到反平面应变和平面应变两者的一般解。将这两个一般解分别用于 III 型裂纹和 I 型裂纹, 我们就求出了 III 型裂纹和 I 型裂纹的高速定常扩展尖端的各向异性塑性应力场。

图 1 表示一沿其裂纹线方向高速扩展裂纹的尖端几何。 (x_1, y_1, z_1) 和 (x, y, z) 分别是静止坐标系和运动坐标系。这些坐标轴亦是各向异性主轴。运动坐标系的原点在高速扩展裂纹的尖点上。裂纹尖端的速度为 $c_0 = \text{const}$ 。设裂纹作定常运动, 则有如下关系:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

今后取

$$\alpha = c_0 / \sqrt{\mu/\rho} \leq 1 \quad (1.2)$$

其中, $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ 为剪切波波速, μ 为剪切弹性模量, ρ 是材料的密度。

* 薛大为推荐。

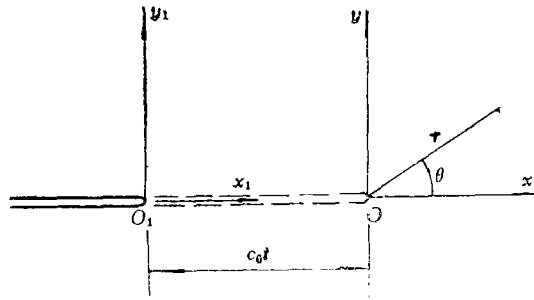


图 1

二、反平面应变

对于反平面应变情形,不为零的量是: z 方向的位移分量 $w(x, y)$ 及剪应力分量 $\tau_{xz}(x, y)$, $\tau_{yz}(x, y)$. 设 τ_{xz} , τ_{yz} 都只是 θ 的函数, 则 $w_z = \partial w / \partial x$ 亦只是 θ 的函数. 于是, 相对于运动坐标系 (x, y, z) 的基本方程为:

1. 定常运动方程

$$\sin\theta \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} - \cos\theta \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} - \rho c_0^2 \sin\theta \frac{dw_z}{d\theta} = 0 \quad (2.1)$$

2. Hill各向异性屈服条件

$$\left(\frac{\tau_{xz}}{S}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{yz}}{R}\right)^2 = 1 \quad (2.2)$$

其中, S 和 R 分别是相对于 x -, z 轴和 y -, z 轴的剪切屈服应力^[3]. 若材料是各向同性的, 则 $R=S=k$.

若取

$$\frac{\tau_{xz}}{S} = -\sin\omega, \quad \frac{\tau_{yz}}{R} = \cos\omega \quad (2.3)$$

则(2.2)恒被满足. 显然, ω 是 θ 的函数.

3. 应力应变关系

塑性应力应变关系是,

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \frac{dw_z}{d\theta} &= \frac{\sin\theta}{\mu} \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} + \frac{2\lambda}{S^2 c_0} \tau_{xz} \\ \cos\theta \frac{dw_z}{d\theta} &= \frac{\cos\theta}{\mu} \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} - \frac{2\lambda}{R^2 c_0} \tau_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中, λ 是 Prandtl-Reuss 流动方程中非负的比例因子. 从中消去 $2\lambda/c_0$ 得:

$$\beta^2 (\cos\theta \cdot \tau_{xz} + \sin\theta \cdot \tau_{yz}) \frac{dw_z}{d\theta} + \frac{\sin\theta}{\mu} \left(\beta^2 \tau_{xz} \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} - \tau_{yz} \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} \right) = 0 \quad (2.5)$$

将(2.3)代入(2.1)和(2.5)得,

$$\left. \begin{aligned} (\cos\omega - \beta \cot\theta \sin\omega) \frac{dw}{d\theta} + \alpha^2 \frac{\mu}{S} \frac{dw_z}{d\theta} &= 0 \\ \frac{R}{\mu} (\cos^2\omega + \beta^2 \sin^2\omega) \frac{d\omega}{d\theta} + \beta (\cos\omega - \beta \cot\theta \sin\omega) \frac{dw_z}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

这里, $\beta = R/S$.

由(2.6)得到下面两种塑性区:

1) 非均匀区 ($d\omega/d\theta \neq 0$, $dw_z/d\theta \neq 0$)

非均匀区存在条件是(2.6)的系数行列式为零, 即

$$(\cos\omega - \beta \cot\theta \sin\omega)^2 = \alpha^2 (\cos^2\omega + \beta^2 \sin^2\omega) \quad (2.7)$$

从(2.7)得到该区的应力分量为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_{zz}}{S} &= \pm \left\{ \frac{f_3^2 - 2f_1f_2 - f_3\sqrt{f_3^2 - 4f_2(f_1+f_2)}}{2(f_2^2 + f_3^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\tau_{yz}}{R} &= \pm \left\{ \frac{f_3^2 + 2f_2(f_1+f_2) + f_3\sqrt{f_3^2 - 4f_2(f_1+f_2)}}{2(f_2^2 + f_3^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) &= (1 - \alpha^2) \sin^2\theta \\ f_2(\theta) &= \beta^2 \cos^2\theta - (1 - \alpha^2 + \alpha^2 \beta^2) \sin^2\theta \\ f_3(\theta) &= \beta \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

2) 均匀区 ($d\omega/d\theta = 0$, $dw_z/d\theta = 0$)

对于均匀区, 我们有

$$\omega = \text{const} \quad (2.10)$$

所以, 均匀区是均匀应力区。

将(2.8)和(2.10)直接用于Ⅲ型裂纹, 我们就得到高速扩展Ⅲ型裂纹尖端的各向异性塑性应力场为:

1) $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zz} &= -S \left\{ \frac{f_3^2 - 2f_1f_2 - f_3\sqrt{f_3^2 - 4f_2(f_1+f_2)}}{2(f_2^2 + f_3^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \tau_{yz} &= R \left\{ \frac{f_3^2 + 2f_2(f_1+f_2) + f_3\sqrt{f_3^2 - 4f_2(f_1+f_2)}}{2(f_2^2 + f_3^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (2.11a)$$

2) $\theta_1 \leq \theta \leq \pi$

$$\tau_{zz} = -S, \quad \tau_{yz} = 0 \quad (2.11b)$$

确定 θ_1 的公式是:

$$\begin{aligned} f_3^2(\theta_1) + 2f_2(\theta_1)[f_1(\theta_1) + f_2(\theta_1)] + f_3(\theta_1)\{f_3^2(\theta_1) \\ - 4f_2(\theta_1)[f_1(\theta_1) + f_2(\theta_1)]\}^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.11c)$$

显然, 当 $\beta = 1$, $S = R = k$ 时, (2.11)就变成高速扩展Ⅲ型裂纹尖端的理想塑性应力场, ([2], (2.18), (2.20)); 当 $\alpha = 0$ 时, (2.11)就变成静止Ⅲ型裂纹尖端的各向异性塑性应力场([1], (2.5)).

三、平面应变

对于平面应变情形, 设裂纹尖端应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 都只是 θ 的函数, 则 $\sigma_x = 2^{-1}(\sigma_x - \sigma_y)$

$\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = (1+\nu)(\sigma_x + \sigma_y)/3$, $u_x = \partial u/\partial x$, $v_x = \partial v/\partial x$ 亦都只是 θ 的函数^[2], u 和 v 分别是 x 方向和 y 方向的位移分量; ν 是泊松比. 这样, 在运动坐标系 (x, y, z) 中, 平面应变定常运动裂纹的基本方程为:

1. 定常运动方程

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \frac{d\sigma_-}{d\theta} + \frac{3\sin\theta}{2(1+\nu)} \frac{d\sigma}{d\theta} - \cos\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} - \rho c_0^2 \sin\theta \frac{du_x}{d\theta} &= 0 \\ -\cos\theta \frac{d\sigma_-}{d\theta} + \frac{3\cos\theta}{2(1+\nu)} \frac{d\sigma}{d\theta} - \sin\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} + \rho c_0^2 \sin\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

2. Hill各向异性屈服条件

$$\frac{\sigma_-^2}{1-c} + \tau_{xy}^2 = T^2 \quad (3.2)$$

其中, T 是相对于 x, y 轴的剪切屈服应力, 而 c 是描述流动平面内各向异性状态的参数^[3].

若取

$$\sigma_- = -T\sqrt{1-c} \cos\omega, \quad \tau_{xy} = -T\sin\omega \quad (3.3)$$

则(3.2)恒被满足. 显然, ω 是 θ 的函数.

3. 应力应变关系

塑性应力应变关系是:

$$\left. \begin{aligned} -\sin\theta \frac{du_x}{d\theta} &= -\frac{\lambda}{c_0} \frac{\sigma_-}{1-c} - \frac{\sin\theta}{2\mu} \frac{d}{d\theta} \left[\sigma_- + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \sigma \right] \\ \cos\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= \frac{\lambda}{c_0} \frac{\sigma_-}{1-c} - \frac{\sin\theta}{2\mu} \frac{d}{d\theta} \left[-\sigma_- + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \sigma \right] \\ \cos\theta \frac{du_x}{d\theta} - \sin\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= -\frac{2\lambda}{c_0} \tau_{xy} - \frac{\sin\theta}{\mu} \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

同反平面应变情形一样, 未知量 ω, σ, u_x 和 v_x 都只是 θ 的函数. 于是, 在高速扩展平面应变裂纹尖端的塑性区内, 问题归结为确定这四个未知量.

利用(3.1)、(3.3)和(3.4), 我们导出下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{1-c}\sin\omega + \cot\theta\cos\omega) \frac{d\omega}{d\theta} + \frac{a}{T} \frac{d\sigma}{d\theta} - \alpha^2 \left(\frac{\mu}{T} \right) \frac{du_x}{d\theta} &= 0 \\ (\sqrt{1-c}\sin\omega \cot\theta - \cos\omega) \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{a}{T} \cot\theta \frac{d\sigma}{d\theta} - \alpha^2 \left(\frac{\mu}{T} \right) \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \\ (1-c\sin^2\omega) \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{\mu}{T} (\sqrt{1-c}\sin\omega + \cot\theta\cos\omega) \frac{du_x}{d\theta} \\ - \frac{\mu}{T} (\sqrt{1-c}\sin\omega \cot\theta - \cos\omega) \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \\ -(1-c\sin^2\omega) \frac{d\omega}{d\theta} - a(1-2\nu)\sin\omega \frac{d\sigma}{d\theta} \\ + \frac{\mu}{T} (2\sqrt{1-c}\sin\omega + \cot\theta\cos\omega) \frac{du_x}{d\theta} - \frac{\mu}{T} \cos\omega \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中 $a=3/2(1+\nu)$ 。

为了简化计算, 我们只研究 $\nu=1/2$ 的情形。于是, 当 $\nu=1/2$ 时, 我们从(3.5)得到下面两种塑性区:

1) 非均匀区 ($d\omega/d\theta \neq 0, d\sigma/d\theta \neq 0, du_x/d\theta \neq 0, dv_x/d\theta \neq 0$)

非均匀区存在条件是(3.5)的系数行列式为零, 即

$$(\sqrt{1-c}\sin\omega\sin 2\theta + \cos\omega\cos 2\theta)^2 = \alpha^2\sin^2\theta(1-c\sin^2\omega) \quad (3.6)$$

从(3.6)得

$$\left. \begin{aligned} \sin\omega &= \left\{ \frac{f_2^2 - 2f_1f_3 - f_2\sqrt{f_2^2 - 4f_3(f_1+f_3)}}{2(f_1^2 + f_2^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \cos\omega &= \left\{ \frac{f_1^2 + 2f_1(f_1+f_3) + f_2\sqrt{f_2^2 - 4f_3(f_1+f_3)}}{2(f_1^2 + f_2^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) &= c(\alpha^2\sin^2\theta - \sin^2 2\theta) - \cos 4\theta \\ f_2(\theta) &= \sqrt{1-c}\sin 4\theta \\ f_3(\theta) &= \cos^2 2\theta - \alpha^2\sin^2\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

利用(3.5)的前三式解出 $d\sigma/d\theta$, 然后积分得到:

$$\sigma = \sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{1-c\sin^2\omega - \alpha^2\sin\theta}{\sqrt{1-c}\sin\omega\cos 2\theta - \cos\omega\sin 2\theta} d\omega \quad (3.9)$$

所以, 该区的应力分量为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{1-c\sin^2\omega - \alpha^2\sin\theta}{\sqrt{1-c}\sin\omega\cos 2\theta - \cos\omega\sin 2\theta} \cdot d\omega - T\sqrt{1-c} \cos\omega \\ \sigma_y &= \sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{1-c\sin^2\omega - \alpha^2\sin\theta}{\sqrt{1-c}\sin\omega\cos 2\theta - \cos\omega\sin 2\theta} \cdot d\omega + T\sqrt{1-c} \cos\omega \\ \sigma_z &= \sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{1-c\sin^2\omega - \alpha^2\sin\theta}{\sqrt{1-c}\sin\omega\cos 2\theta - \cos\omega\sin 2\theta} \cdot d\omega, \\ \tau_{xy} &= -T\sin\omega \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

这里, $\sin\omega$ 和 $\cos\omega$ 由式(3.7)和(3.8)来给出。

2) 均匀区 ($d\omega/d\theta = 0, d\sigma/d\theta = 0, du_x/d\theta = 0, dv_x/d\theta = 0$)

在均匀区内有

$$\omega = \text{const} \quad \sigma = \text{const} \quad (3.11)$$

所以, 均匀区是均匀应力区。

显然, 只要裂纹沿裂纹线方向扩展, 则高速扩展平面应变裂纹尖端的各向异性塑性应力场就由均匀区和非均匀区组成。现以 I 型裂纹为例来说明之。

对于 I 型裂纹, 我们有下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \theta=0: \tau_{xy} &= 0, \sigma_y > 0 \\ \theta=\pi: \tau_{xy} &= 0, \sigma_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)'$$

根据(3.11), 我们知道, 平面应变高速扩展 I 型裂纹尖端的各向异性塑性应力场由一个塑性非均匀区和两个塑性均匀区所组成:

1) 塑性均匀区 ($0 \leq \theta \leq \theta_1$)

$$\omega = 0, \quad \sigma = \sigma_0 \quad (3.12a)$$

于是, 该区内的应力分量为:

$$\sigma_x = \sigma_0 - T\sqrt{1-c}, \quad \sigma_y = \sigma_0 + T\sqrt{1-c}, \quad \sigma_z = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (3.12b)$$

2) 塑性非均匀区 ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$)

该区内的应力分量是:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{1 - c \sin^2 \omega - \alpha^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - c \sin \omega \cos 2\theta - \cos \omega \sin 2\theta}} d\omega - T\sqrt{1 - c \cos \omega} \\ \sigma_y &= \sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{1 - c \sin^2 \omega - \alpha^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - c \sin \omega \cos 2\theta - \cos \omega \sin 2\theta}} d\omega + T\sqrt{1 - c \cos \omega} \\ \sigma_z &= \sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{1 - c \sin^2 \omega - \alpha^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - c \sin \omega \cos 2\theta - \cos \omega \sin 2\theta}} d\omega \\ \tau_{xy} &= -T \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (3.12c)$$

3) 塑性均匀区 ($\theta_2 \leq \theta \leq \pi$)

该区内的应力分量为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\sqrt{1-c}T, \quad \sigma_y = 0 \\ \sigma_z &= \sqrt{1-c}T, \quad \tau_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12d)$$

令(3.6)中的 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$, 就得到确定 θ_1 和 θ_2 的公式为:

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\theta_1 &= \alpha \sin \theta_1 \\ \cos 2\theta_2 &= -\alpha \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.12e)$$

由 $\theta=\theta_2$ 处 $\sigma_y=0$ 得到确定 σ_0 的公式为:

$$\sigma_0 = T\sqrt{1-c} + T \left[\int_0^\omega \frac{1 - c \sin^2 \omega - \alpha^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - c \sin \omega \cos 2\theta - \cos \omega \sin 2\theta}} d\omega \right]_{\omega=\pi} \quad (3.12f)$$

当 $c=0$ 和 $T=k$ 时, (3.12)就变成高速扩展平面应变 I 型裂纹尖端的理想塑性应力场^[2].

参 考 文 献

- [1] 林拜松, 奇点附近的各向异性塑性应力场, 应用数学和力学 (待发表).
 [2] 林拜松, 高速扩展裂纹尖端的理想弹塑性场, 应用数学和力学, 6, 10 (1985), 939—946.
 [3] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford (1950).

Anisotropic Plastic Stress Fields at a Rapidly Propagating Crack-Tip

Lin Bai-song

(Central-South University of Technology, Changsha)

Abstract

All the stress components at a rapidly propagating crack-tip in an elastic perfectly-plastic material are the functions of θ only. Making use of this condition and the equations of steady-state motion, stress-strain relations and Hill anisotropic yield condition, we obtain the general solutions in both the cases of anti-plane and in-plane strain. Applying these two general solutions to propagating Mode III and Mode I cracks, respectively, the anisotropic plastic stress fields at the rapidly propagating tips of Mode III and Mode I cracks are derived.