应用数学和力学，第 9 卷第 1 期（1988年 1 月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

受冲击性约束作用的系统的运动方程

孙 右 烈

（上海工业大学，1985年4月20日收到）

摘 要

当具有n个自由度的系统加有p个冲击性的约束时，要求解系统的运动，一般都需要解含$n+p$个方程的方程组．本文提出以待定乘子法为基础，分别就取广义坐标和伪坐标的二种情况，从n个碰撞方程中消去未知的待定乘子，将碰撞方程简化为$n-p$个，它和p个冲击性约束方程一起组成了含n个方程的方程组，就能求解具有冲击性约束的碰撞问题，这比一般方法更为简便．

一、引 言

考虑由N个质点组成的系统，它具有n个广义坐标，$q_1,\cdots,q_n$，在其上加有p个冲击性约束，其中有s个非完整约束

$$\sum_{i=1}^{n} b_{\beta i}\dot{q}_i+a_{\beta 0}=0 \qquad (\beta=1,\cdots,s)$$

$p-s$个完整约束

$$f_\alpha(q_1,\cdots,q_n,t)=0 \qquad (\alpha=s+1,\cdots,p)$$

后面p-s个约束又可写成

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (\alpha=s+1,\cdots,p)$$

因此，这两种约束又可合併写成

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\beta i}\dot{q}_i+a_{\beta 0}=0 \qquad (\beta=1,\cdots,s,s+1,\cdots,p) \tag{1.1}$$

对于这一类碰撞问题，在一般著作[1][2][3]中，求解的方法不外乎下列两种，一种解法为：从拉格朗日方程

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+\sum_{\beta=1}^{p}\sigma_\beta a_{\beta i} \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{1.2}$$

出发，其中Q_i为广义冲力，在t至$t+\tau_0$时间间隔中对τ积分，得到碰撞方程

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right)=\hat{Q}_i+\sum_{\beta=1}^{p}\hat{\sigma}_\beta a_{\beta i} \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{1.3}$$

* 钱伟长推荐．

(1.1)，(1.3)二式联立，共$n+p$个方程，可以求解这类碰撞问题。

另一种解法为：将约束(1.1)对系统的作用简化为p个未知的约束冲量：$S_1,\cdots,S_p$，系统的碰撞方程为

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)=\hat{Q}_i+S_i' \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{1.4}$$

其中 S_i'为$S_1,\cdots,S_p$的函数。(1.1)与(1.4)式联立，共$n+p$个方程，可以求解这类碰撞问题。对于n个自由度的系统，如果要选取伪坐标，$\pi_1,\cdots,\pi_n$来描写系统的运动，则从阿贝尔方程

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Q_i-\frac{\partial W}{\partial \ddot{\pi}_i}\right)\delta\pi_i=0 \tag{1.5}$$

推得[4]n个碰撞方程

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(\dot{\pi}_j-\dot{\pi}_{0j})=\sum_{k=1}^{p}R_{ik}S_k \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{1.6}$$

和冲击性约束方程

$$\sum_{i=1}^{n}a_{\beta i}\dot{\pi}_i+a_{\beta 0}=0 \qquad (\beta=1,\cdots,p) \tag{1.7}$$

(1.6)与(1.7)式联立，可求解这类碰撞问题。

综合起来说，具有p个冲击性约束的系统的碰撞问题，总是作如下二步简化，先将约束简化为p个作用于系统上的未知冲量，$S_1,\cdots,S_p$，或引入p个待定乘子，用待定乘子法，将p个约束加于系统上，写出n个碰撞方程；然后再写出p个约束对碰撞后系统的位置和运动的限制条件，因此这类碰撞问题最后都归结为要解含$n+p$个方程的联立方程组。

本文对具有冲击性约束的系统的碰撞问题，从方程(1.2)出发，得到了用义广坐标描写的系统的碰撞方程，在这些方程中已消去了和冲击性约束有关的待定乘子，从方程(1.5)出发又得到了以伪坐标描写的碰撞方程，其中也不含由冲击性约束引起的广义约束冲量，最后将这类碰撞问题都归结为解$n-p$个碰撞方程和p个约束条件(1.1)或(1.7)的联立方程。

二、受冲击性约束作用时，以广义坐标表示的系统的碰撞方程

考虑一系统，具有n个广义坐标：$q_1,\cdots,q_n$，在t时刻突然加了p个冲击性约束(1.1)，这p个约束在t时刻是不连续的，即(1.1)式中的系数在t_-时取零值，在t_+时取值$a_{\beta i}$[3]。但是在碰撞时间t至$t+\tau_0$内，这p个约束是连续地加在系统上的，因此，在这段时间内，(1.1)式中的系数$a_{\beta i}$是$q_1,\cdots,q_n$，τ的连续函数，我们从方程组(1.2)出发，考虑经过时间间隔τ_0，系统的广义速度、广义动量有一增量，待定乘子σ_β是和冲击性约束有关的量，它和冲力一样具有性质：

$$1.\quad \lim_{\tau_0\to 0}\sigma_\beta=0; \qquad 2.\quad \lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\sigma_\beta\, d\tau=\hat{\sigma}_\beta \tag{2.1}$$

由(2.1)式可知，σ_β是和δ函数有关的量，它可以表示为[5]：

$$\sigma_\beta=\hat{\sigma}_\beta\,\delta(\tau-t) \qquad (\beta=1,\cdots,p) \tag{2.1$'$}$$

考虑到在碰撞过程中，系统上加了冲击性约束(1.1)，因此在t至$t+\tau_0$时刻内系统具有

$n-p=l$个自由度。将(1.1)式写成矩阵形式

$$\{A_0\}+[[A_1]\quad[A_2]]\{\dot{q}\}=\{0\} \tag{1.1'}$$

其中$\{A_0\}$为p个元素组成的一列矢，$[A_1]$为$p\times l$矩阵，$[A_2]$为$p\times p$方阵，它们是

$$\{\dot{q}\}=[\dot{q}_1\ \cdots\ \dot{q}_n]^T,\ \{A_0\}=[a_{10}\ \cdots\ a_{p0}]^T$$

$$[A_1]=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pl}\end{bmatrix}\qquad [A_2]=\begin{bmatrix} a_{1l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{pl+1} & \cdots & a_{pn}\end{bmatrix}$$

(1.2)式写成矩阵形式为

$$\left\{\frac{dP}{d\tau}\right\}^T-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}^T=\{Q\}^T+\{\sigma\}^T[[A_1]\quad[A_2]] \tag{1.2'}$$

其中$\{P\}=[p_1\ \cdots\ p_n]^T$，$p_i=\partial T/\partial\dot{q}_i$，

$$\left\{\frac{dP}{d\tau}\right\}=\left[\frac{dp_1}{d\tau}\ \cdots\ \frac{dp_n}{d\tau}\right]^T,\ \left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}=\left[\frac{\partial T}{\partial q_1}\ \cdots\ \frac{\partial T}{\partial q_n}\right]^T$$

$$\{\dot{Q}\}=[\dot{Q}_1\ \cdots\ \dot{Q}_n]^T,\ \{\sigma\}=[\sigma_1\ \cdots\ \sigma_p]^T$$

取矩阵[6]

$$[C]=\begin{bmatrix}[I]\\ -[A_2]^{-1}[A_1]\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

其中$[I]$为$l\times l$单位矩阵，$-[A_2]^{-1}[A_1]$为$p\times l$矩阵，所以$[C]$为$n\times l$矩阵，以$[C]$右乘(1.2)′，得到

$$\left\{\frac{dP}{d\tau}\right\}^T[C]-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}^T[C]=\{Q\}^T[C]+\{\sigma\}^T[[A_1]\ [A_2]][C] \tag{2.3}$$

以(2.1)′式和$\{dP/d\tau\}=\{\Delta P\}\delta(\tau-t)$，$\{Q\}=\{\dot{Q}\}\delta(\tau-t)$诸式[6]代入(2.3)式，再将(2.3)式在碰撞时间t至$t+\tau_0$内对τ积分，得到

$$\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\{\Delta P\}^T\delta(\tau-t)[C]d\tau-\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\left\{\frac{\partial T}{\partial q}\right\}^T[C]d\tau$$

$$=\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\{\hat{Q}\}^T\delta(\tau-t)[C]d\tau+\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\{\hat{\sigma}\}^T\delta(\tau-t)[[A_1]\ [A_2]][C]d\tau \tag{2.3'}$$

因为[6]$[[A_1]\quad[A_2]][C]=[0]$ 且 $\lim\limits_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}0\cdot\delta(\tau-t)d\tau=0$，$[0]$是由零元素组成的$n\times l$矩阵，$[C]$中各元素是和$a_{\beta i}$有关的量，这些元素都是$q_1,\cdots,q_n$，$\tau$的连续函数，所以，根据$\delta$函数的性质[5]，由(2.3)′式可推得

$$\{\Delta P\}^T[C]=\{\dot{Q}\}^T[C] \tag{2.3''}$$

这里$\{\Delta P\}=[\Delta p_1\ \cdots\ \Delta p_n]^T$，$\Delta p_i$为经过碰撞时间$\tau_0$后广义动量$p_i$的增量。(2.3)″式即为以矩阵形式表示的加有约束(1.1)时的碰撞方程，这是由$n-p=l$个方程组成的方程组，在这些方程中，是不出现和冲击性约束有关的未知量σ_β的，(2.3)″式和(1.1)式联立共$l+p=n$个方程，可以用来求解具有冲击性约束的碰撞问题。这比过去用(1.1)式和(1.4)式联立，或(1.1)式和(1.3)式联立，解含$n+p$个方程的方程组更为简便。

由此知道，加有 p 个冲击性约束的系统的碰撞方程和加有外冲力作用的非完整系统的碰撞方程[6]具有相同的形式.

三、受冲击性约束作用时，以伪坐标表示的系统的碰撞方程

考虑系统具有n个伪坐标 $\pi_1,\cdots,\pi_n$，加有p个冲击性约束

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\beta i}\dot{\pi}_i + a_{\beta 0}=0 \qquad (\beta=1,\cdots,p) \tag{1.7}$$

这p个冲击性约束在t至$t+\tau_0$碰撞时间间隔中是连续地加在系统上的.

从阿贝尔方程[7]即方程(1.5)出发，由于在τ_0时间间隔中有约束(1.7)存在，因此(1.5)式中的$\delta\pi_1,\cdots$，$\delta\pi_n$是不独立的，由(1.7)式可得，$\delta\pi_1,\cdots$，$\delta\pi_n$要满足p个关系

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\beta i}\,\delta\pi_i=0 \qquad (\beta=1,\cdots,p) \tag{1.7$'$}$$

取待定乘子σ_β，用待定乘子法将这p个条件(1.7)$'$式加在系统上，就得到:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial W}{\partial\ddot{\pi}_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{p}\sigma_\beta\, a_{\beta i}\right]\delta\pi_i=0 \tag{3.1}$$

由(3.1)式得到

$$\frac{\partial W}{\partial\ddot{\pi}_i}-Q_i-\sum_{\beta=1}^{p}\sigma_\beta\, a_{\beta i}=0 \qquad (i=1,\cdots,n) \tag{3.1$'$}$$

这里 σ_β 是和冲击性约束有关的量，它和冲力一样，具有(2.1)式所示的性质，因此它也是和δ函数有关的量，可以表示为(2.1)$'$[5]

将(3.1)$'$写成矩阵形式为

$$\left\{\frac{\partial W}{\partial \ddot{\Pi}}\right\}^T-\{Q\}^T+\{\sigma\}^T[[A_1]\quad[A_2]]=\{0\}^T \tag{3.1$''$}$$

其中

$$\left\{\frac{\partial W}{\partial \ddot{\Pi}}\right\}^T=\left[\frac{\partial W}{\partial\ddot{\pi}_1}\ \cdots\ \frac{\partial W}{\partial\ddot{\pi}_n}\right]$$

如(2.2)式所示作矩阵$[C]$[6]，以(2.2)式右乘(3.1)$''$式，得到

$$\left\{\frac{\partial W}{\partial \ddot{\Pi}}\right\}^T[C]-\{\hat{Q}\}^T[C]-\{\sigma\}^T[[A_1]\quad[A_2]][C]=\{0\}^T \tag{3.2}$$

以(2.1)$'$式代入(3.2)式，再将(3.2)式在碰撞时间t至$t+\tau_0$内对时间τ积分，得到

$$\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\left\{\frac{\partial W}{\partial \ddot{\Pi}}\right\}^T[C]d\tau-\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\{Q\}^T[C]d\tau$$

$$-\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\delta(\tau-t)\{\hat{\sigma}\}^T[[A_1]\quad[A_2]][C]d\tau=\{0\}^T \tag{3.2$'$}$$

其中$\{\hat{\sigma}\}^T=[\hat{\sigma}_1\ \cdots\ \hat{\sigma}_p]$，因为$[[A_1]\quad[A_2]][C]=[0]$，且 $\lim\limits_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}0\cdot\delta(\tau-t)\,d\tau=0$，这

里矩阵[0]是由零元素组成的$n\times l$矩阵，又因为[4]

$$\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\frac{\partial W}{\partial \ddot{\pi}_i}d\tau=\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_i}\right)$$

且

$$\lim_{\tau_0\to 0}\frac{\partial W}{\partial \ddot{\pi}_i}=\infty$$

于是有

$$\frac{\partial W}{\partial \ddot{\pi}_i}=\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_i}\right)\delta(\tau-t)$$

由δ函数性质[5]可得

$$\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\left\{\frac{\partial W}{\partial \ddot{\Pi}}\right\}^T[C]d\tau=\lim_{\tau_0\to 0}\int_t^{t+\tau_0}\left\{\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{\Pi}}\right\}^T[C]\delta(\tau-t)d\tau$$

$$=\left\{\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{\Pi}}\right\}^T[C]$$

这里$\left\{\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{\Pi}}\right\}^T=\left[\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_1}\right)\cdots\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_n}\right)\right]$.所以(3.2)′式化简为

$$\left\{\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\Pi}}\right)\right\}^T[C]-\{\hat{Q}\}^T[C]=\{0\}^T \tag{3.3}$$

这是包含$n-p=l$个方程的方程组，其中既不含待定乘子，也不含由冲击性约束引起的未知约束冲量、l个碰撞方程(3.3)式和p个冲击性约束方程(1.7)式，共为$l+p=n$个方程的方程组，可以求解受冲击性约束作用时以伪坐标描写的系统的碰撞问题，这比过去用(1.6)，(1.7)二式联立解这类问题[4]更为简便。

四、结　　论

本文研究了受p个冲击性约束的系统的碰撞问题。

当系统以广义坐标描写时，其碰撞方程归结为方程(2.3)式。这l个方程和p个冲击性约束方程即(1.1)式联立，共$l+p=n$个方程，即可求解这类碰撞问题。

当系统以伪坐标描写时，其碰撞方程归结为方程(3.3)。这l个方程和p个冲击性约束方程(1.7)联立，同样可求解这类问题。

将本文的结论和“受冲力作用的非完整系统的运动方程”一文[6]相比较，可以看到，非冲击性的非完整约束对系统的作用和冲击性约束对系统的作用是相似的，它们都可以归结为求一个$[C]$矩阵，l个碰撞方程的形式也是相似的。

五、算　　例

例1　由四根相同的直杆铰接成一菱形，在光滑的水平面上绕通过其对角线交点E的铅垂轴以匀角速ω_0转动，如图1所示，求将其中的一个质点A固定时，各杆的角速度。

解：取由四根杆铰接而成的菱形$ABCD$的对角线AC与x轴的交角φ为广义坐标q_1，各杆与AC的交角θ为q_2，对角线的交点E的坐标$x=q_3$，$y=q_4$。

系统的动能在碰撞前为：$T_0=2ml^2\omega_0^2/3$，碰撞后为：

$$T=2ml^2(\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2)/3+2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

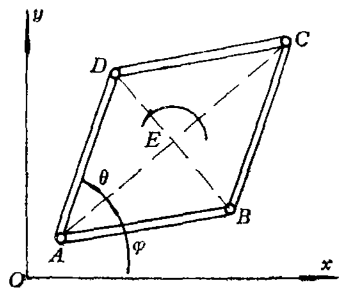

图 1

$$\{\Delta P\}=\begin{Bmatrix} \frac{4}{3}ml^2(\dot{\varphi}-\omega_0) \\ \frac{4}{3}ml^2\dot{\theta} \\ 4m\dot{x} \\ 4m\dot{y} \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

$$\{\hat{Q}\}^T=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{5.2}$$

加于系统上的冲击性约束为：$\dot{x}_A=0$，$\dot{y}_A=0$，即为：

$$\left.\begin{aligned} &(l\cos\theta\sin\varphi)\dot{\varphi}+(l\sin\theta\cos\varphi)\dot{\theta}+\dot{x}=0 \\ &-(l\cos\theta\cos\varphi)\dot{\varphi}+(l\sin\theta\sin\varphi)\dot{\theta}+\dot{y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

于是

$$[A_1]=\begin{bmatrix} l\cos\theta\sin\varphi & l\sin\theta\cos\varphi \\ -l\cos\theta\cos\varphi & l\sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix},\quad [A_2]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad [A_2]^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则$[C]$矩阵为

$$[C]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -l\cos\theta\sin\varphi & -l\sin\theta\cos\varphi \\ l\cos\theta\cos\varphi & l\sin\theta\sin\varphi \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

将(5.1)，(5.2)，(5.4)三式代入(2.3)式，得到碰撞方程组

$$\left.\begin{aligned} &4ml^2(\dot{\varphi}-\omega_0)/3-4ml\cos\theta\sin\varphi\dot{x}+4ml\cos\theta\cos\varphi\,\dot{y}=0 \\ &4ml^2\dot{\theta}/3-4ml\sin\theta\cos\varphi\dot{x}+4ml\sin\theta\sin\varphi\dot{y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

约束方程(5.3)和碰撞方程(5.5)联立，就可解出冲击性约束加于系统以后，$\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{x},\dot{y}$之值。

为了简单起见，设x轴与对角线AC平行，即$\varphi=0$，则(5.3)，(5.5)简化为：

$$\left.\begin{aligned} &l\sin\theta\,\dot{\theta}+\dot{x}=0 \\ &-l\cos\theta\,\dot{\varphi}+\dot{y}=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.3$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} &4ml^2(\dot{\varphi}-\omega_0)/3+4ml\cos\theta\,\dot{y}=0 \\ &4ml^2\dot{\theta}/3-4ml\sin\theta\dot{x}=0 \end{aligned}\right\} \tag{5.5$'$}$$

(5.3)′，(5.5)′联立，解得

$$\dot{x}=\dot{\theta}=0$$

$$\dot{\varphi}=\frac{\omega_0}{1+3\cos^2\theta}$$

$$\dot{y}=\frac{l\omega_0\cos\theta}{1+3\cos^2\theta}$$

于是，各杆的角速度皆为

$$\omega=\dot{\varphi}=\frac{\omega_0}{1+3\cos^2\theta}$$

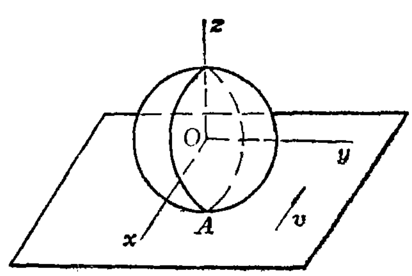

图 2

例 2　半径为R的均质空心圆球，其球心O的速度为 $\mathbf{v}_0=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$，角速度为 $\boldsymbol{\omega}_0=\omega_1\mathbf{i}+\omega_2\mathbf{j}+\omega_3\mathbf{k}$，另有一粗糙的塑性平板，以速度 $\mathbf{v}=-v\,\mathbf{i}$ 运动，当球与平板相撞以后，球与板的接触点立刻与板一起运动，设板的速度保持不变，求碰撞后球的运动。

解：取坐标$Oxyz$，如图2所示，取球心速度$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$和球的角速度ω_x，ω_y，ω_z为六个伪速度，球的动能为：

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+\frac{1}{3}mR^2(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)$$

球的广义动量经过碰撞时间τ_0的增量为：

$$\left\{\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\Pi}}\right)\right\}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}mR^2(\omega_x-\omega_1)\\ \frac{2}{3}mR^2(\omega_y-\omega_2)\\ \frac{2}{3}mR^2(\omega_z-\omega_3)\\ m(\dot{x}-v_1)\\ m(\dot{y}-v_2)\\ m(\dot{z}-v_3)\end{bmatrix}\tag{5.6}$$

而$\{\dot{\Pi}\}=[\omega_x\ \ \omega_y\ \ \omega_z\ \ \dot{x}\ \ \dot{y}\ \ \dot{z}]^T$，$\{\hat{Q}\}=\{0\}$　　　(5.7)

平板加于球的冲击性约束是球与板的接触点A的速度必须为$\mathbf{v}_A=-v\mathbf{i}$，而$\mathbf{v}_A$又可以伪速度表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A&=\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\overrightarrow{OA}\\&=(\dot{x}-R\omega_y)\mathbf{i}+(\dot{y}+R\omega_x)\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k}\end{aligned}$$

于是冲击性约束为

$$\left.\begin{aligned}&-R\omega_y+\dot{x}=-v\\&R\omega_x+\dot{y}=0\\&\dot{z}=0\end{aligned}\right\}\tag{5.8}$$

系数矩阵为

$$[A_1]=\begin{bmatrix}0&-R&0\\R&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad[A_2]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

矩阵$[C]$为

$$[C]=\begin{bmatrix}[I]\\ \\ -[A_2]^{-1}[A_1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&R&0\\-R&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\tag{5.9}$$

(5.6)，(5.7)，(5.9)三式代入(3.3)式，得到碰撞方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2}{3}mR^2(\omega_x-\omega_1)-mR(\dot{y}-v_2)=0\\&\frac{2}{3}mR^2(\omega_y-\omega_2)+mR(\dot{x}-v_1)=0\\&\frac{2}{3}mR^2(\omega_z-\omega_3)=0\end{aligned}\right\}\tag{5.10}$$

冲击性约束方程(5.8)和碰撞方程(5.10)联立，就可求得球于碰撞后的运动。

$$\omega_x=\frac{2R\omega_1-3v_2}{5R};\quad \omega_y=\frac{2R\omega_2+3v+3v_1}{5R}$$

$$\omega_z=\omega_3;\quad \dot{x}=\frac{2R\omega_2-2v+3v_1}{5}$$

$$\dot{y}=\frac{-2R\omega_1+3v_2}{5};\quad \dot{z}=0$$

参 考 文 献

[1] 汪家䜣，《分析力学》，高等教育出版社（1982,9）.
[2] 吴镇，《分析力学》，上海交通大学出版社（1984,9）.
[3] Greenwood, Donald T., *Classical Dynamics*, Prentice-Hall, Inc.(1977).
[4] 张文，伪速度下的碰撞方程及其矩阵解法，固体力学学报，4（1983）.
[5] 吉洪诺夫A. H,. A. A.萨马尔斯基，《数学物理方程》(上册)，高等教育出版社（1953）.
[6] 孙右烈，受冲力作用的非完整系统的运动方程，应用数学和力学，8,2（1987），169—176.
[7] 甘特马赫 Ф. P.，《分析力学讲义》，人民教育出版社（1963）.

The Equations of Motion of a System under the Action of the Impulsive Constraints

Sun You-lie

(Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In order to solve the problem of motion for the system with n degrees of freedom under the action of p impulsive constraints, we must solve the simultaneous equations consisting of $n+p$ equations. In this paper, it has been shown that the undetermined multipliers in the equations of impact can be cancelled for the cases of both the generalized coordinates and the quasi-coordinates. Thus there are only n-p equations of impact. Combining these equations with p impulsive constraint equations, we have simultaneous equations consisting of n equations. Therefore, only n equations are necessary to solve the problem of impact for the system subjected to impulsive constraints. The method proposed in this paper is simpler than ordinary methods.