应用数学和力学，第9卷第1期（1988年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

不可压缩理想势流绕两平行平板间圆柱流动的新的近似解析解*

袁镒吾

（中南工业大学，1986年1月9日收到）

摘　　要

文献[1]得到了不可压缩理想势流绕两平行平板间圆柱流动的近似分析解.

本文指出，用M．E．Швец法[2]亦可得到与文献[1]完全相同的结果．如果用本文作者新提出的改进了的M．E．Швец法[2]则可得到比文献[1]更加精确的结果．有算例.

一、问题的提法

如图1所示，设两平行平板间的距离为$2h$，在中心有半径为1的圆柱，∞处为均匀理想不可压缩气流，速度为1，试决定此不可压缩理想势流绕此圆柱的流动.

首先，引入Жуковский变换[1]

$$\zeta=Z+1/Z \tag{1.1}$$

式中

$$Z=x+iy \tag{1.2}$$

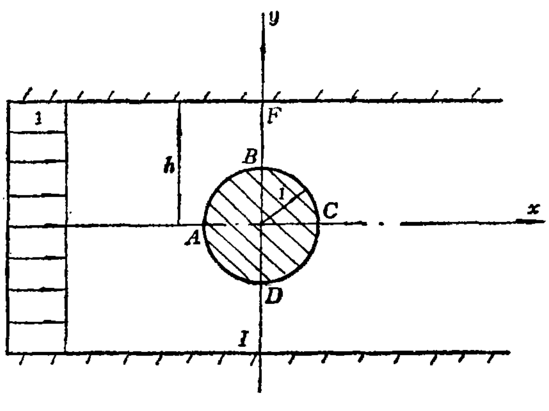

图1　Z平面

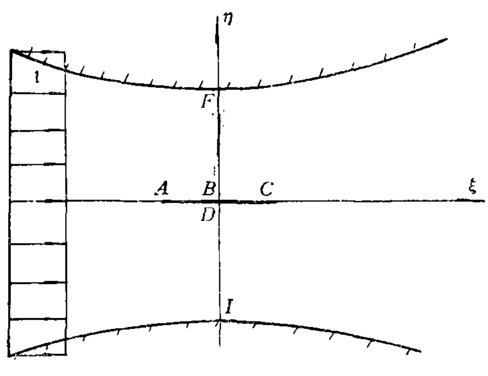

图2　ζ平面

* 钱伟长推荐.

它将图1物理平面 Z 上的流场变换为图2，ζ 平面上的对应区域的流场。

由式(1.1)及(1.2)得

$$
\left.\begin{aligned}
\xi &= \frac{x}{x^2+y^2}+x \\
\eta &= y-\frac{y}{x^2+y^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}
$$

在壁面上，

$$
\left.\begin{aligned}
\xi_W &= x+\frac{x}{x^2+h^2} \\
\eta_W &= \pm\left(h-\frac{h}{x^2+h^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}
$$

注：文献[1]中式(1.4)有笔误。

式中 $\xi+i\eta=\zeta$，下标 W 表示管壁。对应的圆柱在 ζ 平面是实轴上位于 $\xi=\pm2$ 之间的一段割线，它在理想流体条件下，对流场不产生扰动。故问题归结为求给定壁面形状的二元管道内不可压缩理想流体的流动。

设流动是具势（无旋）的，引入流函数 ψ，速度分量为

$$u_\xi=\partial\psi/\partial\eta,\quad v_\xi=-\partial\psi/\partial\xi \tag{1.5}$$

无旋条件为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=0 \tag{1.6}$$

边界条件为

$$
\left.\begin{aligned}
&\eta=0\ \text{时},\ \psi=0 \\
&\eta=f(\xi)\text{时},\ \psi=Q
\end{aligned}\right\} \tag{1.7}
$$

式中 Q 为流量，$\eta=f(\xi)$ 为管道壁面的方程。上式的第一条件是根据对称性，$y=0$ 对应的是一条流线。

只需考虑上半部。故问题归结为求解式(1.6)及(1.7)，决定 ζ 平面上的流场。然后，变换到物理平面 Z 上去。

由式(1.4)得管壁的斜率为

$$\frac{d\eta_W}{d\xi_W}=\frac{d\eta_W/dx}{d\xi_W/dx}=\frac{2hx}{x^4+(2h^2-1)x^2+(h^4+h^2)} \tag{1.8}$$

当 h 很大时，斜率小，即管道是细长的，这时，我们有理由认为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}=\frac{\partial v_\xi}{\partial\xi}\approx0$$

即是说，式(1.6)的第一项是小量，根据这一特点，以下我们用逐步逼近法（M. E. Швец法[2]）求解这个问题。

二、用M.E.Швец法求解——第一解法

1. 零级近似解

将式(1.6)变为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} \tag{2.1}$$

由于上式右端为小量，按M. E. Швец 法，求零级近似解时，令上式右端为零，而得

$$\partial^2\psi_0/\partial\eta^2=0$$

其解为

$$\psi_0=C(\xi)\eta+C_0(\xi)$$

由边界条件(1.7)得

$$C_0=0,\ C=Q/f(\xi)$$

故得

$$\psi_0=\frac{Q}{f}\eta \tag{2.2}$$

2. 一级近似解

按M. E. Швец 法，求式(2.1)的一级近似解时，将式(2.2)代入式(2.1)的右端，而得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}=Q\eta\left(-2\frac{f'^2}{f^3}+\frac{f''}{f^2}\right)$$

积分得

$$\psi_1=\frac{Q}{6}\left(-2\frac{f'^2}{f_3}+\frac{f''}{f^2}\right)\eta^3+C_1(\xi)\eta+C_2 \tag{2.3}$$

由边界条件(1.7)，$\eta=0$ 时，$\psi_1=0$，所以 $C_2=0$。$\eta=f(\xi)$时，$\psi_1=Q$，故

$$C_1(\xi)=\frac{Q}{f}\left[1-\frac{1}{6}(2f'^2+ff'')\right]$$

将 C_0，C_1 的值代入式(2.3)得

$$\psi_1=\frac{Q}{6}(-2f'^2+ff'')f^{-3}\eta^3+\frac{Q}{f}\left[1-\frac{1}{6}(-2f'^2+ff'')\right]\eta \tag{2.4}$$

ξ 平面上的速度分量为

$$u_\xi=\frac{Q}{2}(-2f'^2+ff'')f^{-3}\eta^2+\frac{Q}{f}\left[1-\frac{1}{6}\left(ff''-2f'^2\right)\right] \tag{2.5}$$

$$v_\xi=Q\eta^3\left(f'f''f^{-3}-\frac{1}{6}f'''f^{-2}-f'^3f^{-4}\right)$$

$$+Q\eta\left(-\frac{2}{3}f^{-1}f'f''+\frac{1}{6}f'''+f^{-2}f'+\frac{1}{3}f^{-2}f'^3\right) \tag{2.6}$$

式(2.4)～(2.6)和文献[1]的相应结果完全一致。

现决定流量 Q。由式(1.1)知，当 $Z\to\infty$时，有 $\xi\to\infty$，和 $d\xi/dZ\to1$，对应有 $u_\xi\to1$ 和 $v_\xi\to0$。

而 $v_\zeta/u_\zeta=f'(\xi)$，故有 $f'(\infty)=f''(\infty)=0$。故由式(2.5)得

$$1=Q/f(\infty)$$

即

$$Q=f(\infty) \tag{2.7}$$

又由式(1.4)，$f(\infty)=\eta_W(\infty)=h$，代入式(2.7)得

$$Q=h \tag{2.8}$$

现求 f，f'，f'' 及 f'''。

由式(1.8)得

$$f'=\frac{d\eta_W}{d\xi_W}=\frac{2hx}{x^4+(2h^2-1)x^2+h^4+h^2} \tag{2.9}$$

$$f''=\frac{d^2\eta_W}{d\xi_W^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\eta_W}{d\xi_W}\right)\frac{dx}{d\xi_W} \tag{2.10}$$

故

$$f''=\frac{(x^2+h^2)^2[-6hx^4+2hx^2(1-2h^2)+2h^3(h^2+1)]}{[x^4-x^2(1-2h^2)+h^4+h^2]^3} \tag{2.11}$$

及

$$\begin{aligned}f'''=&\{(x^2+h^2)^4[-6hx^4+2hx^2(1-2h^2)+2h^3(h^2+1)]\\&\cdot[3x^3-2x(1-2h^2)](-3)\}\cdot[x^4-x^2(1-2h^2)+h^4\\&+h^2]^{-5}+(x^2+h^2)^3\{(x^2+h^2)[-24hx^3+4h(1-2h^2)\\&\cdot x]+4x[-6hx^4+2hx^2(1-2h^2)+2h^3(h^2+1)]\}\cdot\\&[x^4-x^2(1-2h^2)+h^4+h^2]^{-4}\end{aligned} \tag{2.12}$$

现求 Z 平面上的速度。由式(1.1)得

$$\begin{aligned}u_Z-iv_Z&=(u_\zeta-iv_\zeta)d\zeta/dZ\\&=(u_\zeta-iv_\zeta)(1-1/Z^2)\end{aligned} \tag{2.13}$$

将式(2.5)及(2.6)代入式(2.13)，即可求得 Z 平面上的速度。

本节的解法简称第一解法

三、用改进了的M.E.Швец法求解——第二解法[2]

本节的解法，简称第二解法

1. 零级近似

按照原 M. E. Швец 法，由于 $\partial^2\psi/\partial\xi^2\sim\varepsilon$，式中"～"表示数量级相等，$\varepsilon$ 为小量，求式(2.1)的零级近似解时，应抛弃 $\partial^2\psi/\partial\xi^2$，即略去 $O(\varepsilon)$。我们现在只抛弃 $O(\varepsilon^2)$。其法如下：

设

$$\psi=\varphi(\xi)+\varphi_1(\xi,\eta) \tag{3.1}$$

式中 φ 及 φ_1 均为任意函数，且设

$$\varphi\gg\varphi_1$$

则

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}=\varphi''(\xi)+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\xi^2}\approx-F_0(\xi) \tag{3.2}$$

式中

$$\varphi''(\xi)=-F_0(\xi)$$

求零级近似解时，把式(2.1)改写成

$$\partial^2\psi_0/\partial\eta^2=F_0(\xi) \tag{3.3}$$

令

$$\psi_0=F_1(\xi)\cdot F_2(\eta) \tag{3.4}$$

代入式(3.3)得

$$F_1(\xi)F_2''(\eta)=F_0(\xi)$$

故得

$$F_2''(\eta)=\frac{F_0(\xi)}{F_1(\xi)}=a=\text{常数} \tag{3.5}$$

由

$$F''(\eta)=a$$

得

$$F_2(\eta)=a\eta^2/2+b\eta+a_1 \tag{3.6}$$

由式(1.7)，$\eta=0$ 时，$\psi=0$，而 $F_1(\xi)\neq0$，故有 $\eta=0$ 时，$F_2(\eta)=0$。故 $a_1=0$。将式(3.6)及(3.5)代入式(3.4)得

$$\psi_0=\frac{1}{a}F_0(\xi)\left(\frac{1}{2}a\eta^2+b\eta\right) \tag{3.7}$$

设管道壁面的方程为

$$\eta=f(\xi) \tag{3.8}$$

则有 $\eta=f(\xi)$时，$\psi_0=Q$，代入式(3.7)得

$$Q=\frac{1}{a}F_0(\xi)\left(\frac{1}{2}af^2+bf\right) \tag{3.9}$$

为了使 Q 与 ξ 无关，必须

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}F_0(\xi)f^2(\xi)=K=\text{常数}\\&b=0\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

代入式(3.7)得

$$\psi_0=Kf^{-2}\eta^2$$

$\eta=f(\xi)$时，$\psi_0=Q$，故 $K=Q$，而有

$$\psi_0=Qf^{-2}\eta^2 \tag{3.11}$$

2. 一级近似

按 M. E. Швец 法，求一级近似解时，应把式(3.11)代入式(2.1)的右边，而得

$$\partial^2\psi_1/\partial\eta^2=2Q\eta^2(-3f^{-4}f'^2+f^{-3}f'')$$

积分二次得

$$\psi_1=\frac{1}{6}Q\eta^4(-3f^{-4}f'^2+f^{-3}f'')+C\eta+C_1 \tag{3.12}$$

式中 C 及 C_1 为积分常数。由式(1.7)得

$\eta=0$ 时，$\psi_1=0$，所以 $C_1=0$

$\eta=f(\xi)$时，$\psi_1=Q$，故

$$C=\frac{Q}{f}-\frac{Q}{6}\left(-\frac{3f'^2}{f}+f''\right)$$

将 C 及 C_1 的值代入式(3.12)得

$$\psi_1=\frac{1}{6}Q\eta^4(-3f^{-4}f'^2+f^{-3}f'')+\left[\frac{Q}{f}-\frac{Q}{6}\left(f''-\frac{3f'^2}{f}\right)\right]\eta \tag{3.13}$$

$$u_\xi=\frac{\partial\psi_1}{\partial\eta}=\frac{2}{3}Q\eta^3(f^{-3}f''-3f^{-4}f'^2)+\frac{Q}{f}-\frac{Q}{6}\left(f''-\frac{3f'^2}{f}\right) \tag{3.14}$$

$$v_\xi=-\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}=Q\eta^4\left(\frac{3}{2}f^{-4}f'f''-2f^{-5}f'^3-\frac{f'''}{6f^3}\right)$$

$$+Q\eta\left(f^{-2}f'+\frac{1}{6}f'''+\frac{1}{2}f^{-2}f'^3-f^{-1}f'f''\right) \tag{3.15}$$

现决定流量 Q。由式(1.1)知，当 $Z\to\infty$时，有 $\zeta\to\infty$ 和 $d\zeta/dZ\to1$，对应有 $u_\xi\to1$，$v_\xi\to0$。而 $v_\xi/u_\xi=f'(\xi)$，故 $f'(\infty)=f''(\infty)=0$。故由式(3.14)得 $Q=f(\infty)$。又由式(1.4)，$f(\infty)=\eta_W(\infty)=h$，故

$$Q=h \tag{3.16}$$

将式(3.14)及(3.15)代入式(2.13)可求 Z 平面上的速度分量 u_Z 及 v_Z。

文献[1]还介绍了 C. C. Shih 的近似解，它即是

$$\psi=y-\frac{h\cdot\sinh^2(\pi/2h)\sin(\pi y/h)}{\pi\left(\cosh^2\frac{\pi x}{2h}-\cos^2\frac{\pi y}{2h}\right)} \tag{3.17}$$

当 $h=2$ 时，

$$u_Z=1-\frac{0.7543\left[-\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi y}{2}+(\cos\frac{\pi y}{2})(1-\cos^2\frac{\pi y}{4})\right]}{(1-\cos^2\pi y/4)^2} \tag{3.18}$$

四、算　　例

1. $x=0$ 截面上的速度分布

当 $x=0$ 时，由式(1.4)得

$$f=\eta_W=\pm\frac{h^2-1}{h} \tag{4.1}$$

由式(2.9)，(2.12)及(2.11)得

$$\left.\begin{aligned}&f'=0,\ f'''=0\\&f''=2h/(h^2+1)^2\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

将 $x=0$ 代入式(2.13)得

$$u_Z=\frac{1+y^2}{y^2}u_\xi,\quad v_Z=\frac{1+y^2}{y^2}v_\xi \tag{4.3}$$

又由式(1.3)，$x=0$ 时，

$$\eta=\frac{y^2-1}{y} \tag{4.4}$$

第一解法．由式(4.3)，(4.4)，(4.2)及(2.5)得 $x=0$ 时，

$$u_Z=\frac{1+y^2}{y^2}\left[\frac{Q}{2}\cdot\frac{f''}{f^2}\cdot\frac{(y-1)^2}{y^2}+\frac{Q}{f}\left(1-\frac{ff''}{6}\right)\right] \tag{4.5}$$

当 $h=2$ 时，将式(4.1)及(4.2)代入得

$$u_Z=0.0711(1+y^2)(y^2-1)^2/y^4+1.28\cdot(1+y^2)/y^2 \tag{4.6}$$

第二解法．由式(4.1)～(4.4)及(3.14)得

$$u_Z=\frac{1+y^2}{y^2}\cdot h\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{(y^2-1)^3}{y^3}\cdot\frac{h^3}{(h^2-1)^3}\cdot\frac{2h}{(h^2+1)^2}+\frac{h}{h^2-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{(h^2+1)^2}\right] \tag{4.7}$$

$h=2$ 时，

$$u_Z=0.0632\frac{(y^2+1)(y^2-1)^3}{y^5}+1.28\frac{(1+y^2)}{y^2} \tag{4.8}$$

将式(4.6)，(4.7)及(3.18)的计算结果列入表 1，则表 1 表示 $x=0$ 截面上的速度分布．当 $h=2$，$x=0$，$y=1$ 时，按有限元法算得 $u_Z=2.55$[1]．

2． 平板上的流速分布（$h=2$）

（1） 由式(1.4)，(2.9)，(2.11) 分别求得 f，f' 及 f'' 列入表 2（本问题不必求 f''）

（2） 求 u_ζ

第一解法，由式 (2.5) 求 u_ζ；

第二解法，由式(3.14)求 u_ζ．

（3） 求 v_ζ

第一解法，由式 (2.6) 求 u_ζ．

表 1　　$h=2$ 时，$x=0$ 截面上速度分布的比较

y	u_Z		
	C. C. Shih 的近似解式(3.18)	本文第一解法的一级近似解式 (4.6)	本文第二解法的一级近似解式 (4.7)
1	2.5092	2.560	2.560
1.25	2.0915	2.123	2.109
1.5	1.8841	1.920	1.902
1.75	1.7844	1.829	1.835
1.9	1.7590	1.806	1.844
2.0	1.7546	1.800	1.867

注：本文第一解法的一级近似结果和文献[1]的一级近似结果稍有差别，估计后者计算有误．

表 2　　$h=2$ 时，f，f'，f'' 及 η 的值

x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
f	1.5050	1.5192	1.5413	1.5690	1.6
f'	0.0394	0.0757	0.1060	0.1286	0.1429
f''	0.1543	0.1377	0.1118	0.0798	0.0456
η	1.5050	1.5192	1.5413	1.5690	1.6

第二解法，由式(3.15)求 v_ξ。

(4) 求 u_Z 及 v_Z。

由式(2.13)得

$$u_Z=u_\xi-\frac{u_\xi(x^2-y^2)-2xyv_\xi}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} \tag{4.9}$$

$$v_Z=v_\xi-\frac{2xyu_\xi+(x^2-y^2)v_\xi}{(x^2-y^2)^2+4x^2y^2} \tag{4.10}$$

将求得的 u_ξ，v_ξ 及 u_Z 的数值列入表3，表3便表示了平板上的流速分布。

表3　平板上的流速分布($h=2$)

x	本文第一解法的一级近似结果，式(2.5)，(2.6)及(4.9)			本文第二解法的一级近似结果，式(3.14)，(3.15)及(4.9)		
	u_ξ	v_ξ	u_Z	u_ξ	v_ξ	u_Z
0.2	1.4304	0.0563	1.7802	1.4801	0.05827	1.8421
0.4	1.4033	0.1062	1.7245	1.4429	0.1092	1.7732
0.6	1.3624	0.1444	1.6415	1.3875	0.1471	1.6718
0.8	1.3138	0.1690	1.5440	1.3229	0.1701	1.5546
1.0	1.2634	0.1805	1.4439	1.2573	0.1797	1.4369

注：表3中第一解法的一级近似的 u_Z 值和文献[1]的相应结果稍有差别，估计后者计算有误。

由表3可见，本文的第二解法和第一解法的近似结果有明显的差别，特别是当 $|x|\leqslant 0.6$ 时比较显著。

五、本文第二解法的精确度的估计

现从理论上来估计第二解法的精确度。由式(3.2)及(3.10)，并注意到 $K=h$，可得

$$\partial^2\psi/\partial\xi^2=-2h/f^2 \tag{5.1}$$

第二解法要求 $\partial^2\psi/\partial\xi^2$ 为小量，即要求 $2h/f^2$ 为小量。第一解法要求 $\partial^2\psi/\partial\xi^2=0$，即要求 $2h/f^2=0$。

由式(1.4)知，

$$\frac{2h}{f^2}=2h\Big/\left(h-\frac{h}{x^2+h^2}\right)^2$$

$x=0$ 时，$\dfrac{2h}{f^2}=2h\Big/\left(\dfrac{h^2-1}{h}\right)^2=\dfrac{2}{h-2/h+1/h^3}$

$x\to\infty$ 时，$2h/f^2\to 2/h$

因 $h>1$，故 x 增大时，$2h/f^2$ 减小，于是有

$$\frac{2}{h-2/h+1/h^3}\geqslant\frac{2h}{f^2}\geqslant\frac{2}{h}$$

如果 $h\gg 1$，则 $2h/f^2$ 为小量；如果 $h\to\infty$，则 $2h/f^2\to 0$。故第二解法只要求 $h\gg 1$，而第一解法则要求 $h=\infty$。

可见，对于 $h>1$ 的一般情形，本文的第二解法较第一解法更加精确。

再从数量级的角度观察，由于 $\partial^2\psi/\partial\xi^2$ 是小量，故可设

$$\partial^2\psi/\partial\xi^2\sim\varepsilon \tag{5.2}$$

我们在式(3.1)中曾假设 $\varphi\gg\varphi_1$

故

$$-F_0(\xi)=\varphi''(\xi)\sim\varepsilon$$

$$\partial^2\varphi_1/\partial\xi^2\sim\varepsilon^2 \tag{5.3}$$

所以，式(3.2)中略去的是 $O(\varepsilon^2)$.

而第一解法的零级近似，则令

$$\partial^2\psi/\partial\xi^2=0$$

由式(4.11)知，第一解法的零级近似，略去的是 $O(\varepsilon)$.

可见，第二解法较第一解法更加精确. 既然第一解法的一级近似结果和文献[1]的一级近似结果完全一致，则有理由认为本文第二解法的一级近似结果较文献[1]的一级近似结果更加精确.

参 考 文 献

[1] 林超强，不可压缩理想势流绕两平板间圆柱流动，西北工业大学学报，2 (1984), 143—150.
[2] 袁镒吾，平行平板间径向气流的Navier-Stokes方程新的近似解，上海力学，2 (1985), 1—9.

A New Approximate Analytical Solution of the Ideal Potential Flow around a Circular Cylinder between Two Parallel Flat Plates

Yuan Yi-wu

(Central-South University of Technology, Changsha)

Abstract

In ref.[1], Lin obtained an approximate analytical solution of the ideal potential flow around a circular cylinder between two parallel flat plates.

In this paper, the author shows that one may obtain the result coinciding with that obtained in ref. [1] by making use of the Shvez's method[2]. Moreover, we can obtain a more accurate result than that obtained in ref. [1], if we make use of the improved Shvez's method[2]. Some calculating examples are presented.