应用数学和力学，第9卷第1期（1988年1月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

二阶奇摄动边值问题*

周钦德 苗树梅

（吉林大学，1986年2月21日收到）

摘 要

本文应用上下解方法研究了边值问题$\varepsilon y''=f(t,y,\varepsilon)$，$L(y(0),y'(0),\varepsilon)=0$，$R(y(1),y'(1),\varepsilon)=0$（含一般的 Robin 问题）的解的存在性，唯一性和估计。

一、引 言

本文研究了含小参数 $\varepsilon<0$ 的边值问题

$$\varepsilon y''=f(t,y,\varepsilon) \tag{1.1}$$

$$L(y(0),y'(0),\varepsilon)=0,\quad R(y(1),y'(1),\varepsilon)=0 \tag{1.2}$$

已往的工作讨论了边值条件为$y(0)=a$，$y(1)=b$或$y(0)-py'(0)=a$，$y(1)+qy'(1)=b$，$p\cdot q\neq 0$的情形(例如[1],[2])。我们的工作将包含一般的 Robin 边值问题，并且还特别讨论了解的唯一性。

记$D=\{(t,y,\varepsilon)：0\leqslant t\leqslant 1，|y|<\infty，0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$，其中$\varepsilon_0$是一正数。假设

Ⅰ．$f(t,y,\varepsilon)$及其对 y 和对 ε 的偏微商于D上连续。

Ⅱ．存在正数m和二次微商有界的函数$u(t)$使得

$$f_y(t,y,\varepsilon)\geqslant m,\ (t,y,\varepsilon)\in D;\qquad f(t,u(t),0)\equiv 0\quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Ⅲ．对每一给定的$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$，$L(u,v,\varepsilon)$和$R(u,v,\varepsilon)$都是$-\infty<u,v<\infty$上的连续函数，且关于$v$单调不减。

我们将引用文献[3]之定理3.6，即

引理1 假设条件Ⅰ和Ⅲ成立，如果对每一给定的$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$，必存在函数$\bar\omega(t)$和$\underline{\omega}(t)$，使得于$0\leqslant t\leqslant 1$上成立：

$$\varepsilon\bar\omega''(t)\leqslant f(t,\bar\omega(t),\varepsilon),\quad \varepsilon\underline{\omega}''(t)\geqslant f(t,\underline{\omega}(t),\varepsilon) \tag{1.3}$$

$$L(\bar\omega(0),\bar\omega'(0),\varepsilon)\leqslant 0,\ R(\bar\omega(1),\bar\omega'(1),\varepsilon)\geqslant 0 \tag{1.4}$$

$$L(\underline{\omega}(0),\underline{\omega}'(0),\varepsilon)\geqslant 0,\quad R(\underline{\omega}(1),\underline{\omega}'(1),\varepsilon)\leqslant 0 \tag{1.5}$$

则边值问题(1.1)，(1.2)有解$y(t)$满足不等式

$$\underline{\omega}(t)\leqslant y(t)\leqslant\bar\omega(t)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

二、存 在 性

为了保证边值问题(1.1)，(1.2)的解存在，我们将以一般的 Robin 问题为背景，对

* 林宗池推荐。

$L(u,v,\varepsilon)$和$R(u,v,\varepsilon)$作进一步的限制。

Ⅳ$_0$. 对任意正数l，必存在正数N，使得当$|u|\leqslant l$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，

$$L(u,-N,\varepsilon)\leqslant 0,\quad L(u,N,\varepsilon)\geqslant 0.$$

Ⅴ$_0$. 存在正数N和小区间$u_1<u<\bar{u}_1$，$u_2<u<\bar{u}_2$（$\bar{u}_1<0<u_2$，$\bar{u}_1<u(0)<u_2$），使得

$$L(u,\ -N,\ \varepsilon)\leqslant 0\qquad (u_2<u<\bar{u}_2,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0),$$

$$L(u,\ N,\ \varepsilon)\geqslant 0\qquad (u_1<u<\bar{u}_1,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0).$$

Ⅳ$_1$. 对任意正数l，必存在正数N，使得当$|u|\leqslant l$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，

$$R(u,-N,\varepsilon)\leqslant 0,\quad R(u,N,\varepsilon)\geqslant 0.$$

Ⅴ$_1$. 存在正数N和小区间$u_3<u<\bar{u}_3$，$u_4<u<\bar{u}_4$（$\bar{u}_3<0<u_4$，$\bar{u}_3<u(1)<u_4$），使得

$$R(u,-N,\varepsilon)\leqslant 0,\ (u_3<u<\bar{u}_3;\quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0),$$

$$R(u,N,\varepsilon)\geqslant 0,\quad (u_4<u<\bar{u}_4;\quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0).$$

定理1 假设条件Ⅰ～Ⅲ，Ⅳ$_0$，Ⅳ$_1$成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)，(1.2)有解$y(t,\varepsilon)$于$0\leqslant t\leqslant 1$上满足不等式：

$$|y(t,\varepsilon)-u(t)|\leqslant c_0\varepsilon^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\,t\right]+c_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}\exp\left[\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\,(t-1)\right]+\frac{M}{m}\varepsilon \tag{2.1}$$

其中M是$|f_\varepsilon(t,u(t),\varepsilon)-u''(t)|$于$0\leqslant t\leqslant 1$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$上的一个上界，而$c_i(i=0,1)$是满足$\sqrt{m}c_i\geqslant N_i+|u'(i)|+1$的正数，$N_i$是条件Ⅳ$_i$中$l$取作$|u(i)|+1$时所指出的正数。

证明 记不等式(2.1)右端的函数为$\omega(t,\varepsilon)$，取

$$\bar{\omega}(t)=u(t)+\omega(t,\varepsilon),\quad \underline{\omega}(t)=u(t)-\omega(t,\varepsilon).$$

下面验证它们满足引理1中的(1.3)～(1.5)。由于$\bar{\omega}(t)-u(t)>0$，因此由中值定理知，存在介于$\bar{\omega}(t)$和$u(t)$之间的ξ和$\theta\in(0,1)$，使得

$$\begin{aligned}f(t,\bar{\omega}(t),\varepsilon)&=f(t,\bar{\omega}(t),\varepsilon)-f(t,u(t),\varepsilon)+f(t,u(t),\varepsilon)-f(t,u(t),0)\\&=f_y(t,\xi,\varepsilon)(\bar{\omega}(t)-u(t))+[f_\varepsilon(t,u(t),\theta\varepsilon)-u''(t)]\varepsilon+\varepsilon u''(t)\\&\geqslant m(\bar{\omega}(t)-u(t))-M\varepsilon+\varepsilon u''(t).\end{aligned}$$

由于$z=\omega(t,\varepsilon)$　即$z=\bar{\omega}(t)-u(t)$是方程$\varepsilon z''=mz-M\varepsilon$的解，所以$f(t,\bar{\omega}(t),\varepsilon)\geqslant\varepsilon\bar{\omega}''(t)$成立。同理可得(1.3)的第二式。

由$\omega(t,\varepsilon)$的表达式可见，存在$\varepsilon_1>0$，当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，$0<\omega(t,\varepsilon)\leqslant 1$（$0\leqslant t\leqslant 1$）。因此当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，$|\bar{\omega}(i)|\leqslant|u(i)|+1$（$i=0,1$）。此外，至多只要再缩小$\varepsilon_1$，还可要求

$$c_i\sqrt{m}\exp[-\sqrt{m/\varepsilon}\,]\leqslant 1\qquad (i=0,1,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1)$$

于是当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，

$$\begin{aligned}\bar{\omega}'(0)&=u'(0)-c_0\sqrt{m}+c_1\sqrt{m}\exp[-\sqrt{m/\varepsilon}\,]\\&\leqslant u'(0)-(N_0+|u'(0)|+1)+1\leqslant -N_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\omega}'(1)&=u'(1)-c_0\sqrt{m}\exp[-\sqrt{m/\varepsilon}\,]+c_1\sqrt{m}\\&\geqslant u'(1)-1+(N_1+|u'(1)|+1)\geqslant N_1\end{aligned}$$

由N_i的含义及$L(u,v,\varepsilon)$，$R(u,v,\varepsilon)$对v的单调不减性知

$$L(\bar{\omega}(0),\bar{\omega}'(0),\varepsilon)\leqslant L(\bar{\omega}(0),-N_0,\varepsilon)\leqslant 0$$

$$R(\bar{\omega}(1),\bar{\omega}'(1),\varepsilon)\geqslant R(\bar{\omega}(1),N_1,\varepsilon)\geqslant 0$$

这就是(1.4)，同理可证(1.5)。总之引理1的条件成立。因此当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$时，边值问题(1.1)，(1.2)有解$y(t,\varepsilon)$满足不等式：

$$\omega(t) \leqslant y(t,\varepsilon) \leqslant \bar{\omega}(t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

此即(2.1)，定理1得证。

完全类似地可得如下几个定理：

定理2 假设条件Ⅰ～Ⅲ，V_0，V_1成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)，(1.2)有解$y(t,\varepsilon)$，于$0\leqslant t\leqslant 1$上满足不等式：

$$|y(t,\varepsilon)-u(t)| \leqslant c_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\, t\right]+c_1\exp\left[\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\,(t-1)\right]+\frac{M}{m}\varepsilon \tag{2.2}$$

其中正数M同定理1，$c_0=\max\{u_{20}-u(0),u(0)-u_{10}\}$，$c_1=\max\{u_{40}-u(1),\ u(1)-u_{30}\}$，而$u_{i0}(i=1,2,3,4)$是区间$\underline{u}_i<u<\bar{u}_i$中的任一取定点。

定理3 假设条件Ⅰ～Ⅲ，IV_0，V_1成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)，(1.2)有解$y(t,\varepsilon)$，于$0\leqslant t\leqslant 1$上满足不等式：

$$|y(t,\varepsilon)-u(t)| \leqslant c_0 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\, t\right]+c_1\exp\left[\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\,(t-1)\right]+\frac{M}{m}\varepsilon \tag{2.3}$$

其中正数M，c_0同定理1，c_1同定理2。

定理4 假设条件Ⅰ～Ⅲ，V_0，IV_1成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，边值问题(1.1)(1.2)有解$y(t,\varepsilon)$，于$0\leqslant t\leqslant 1$上满足不等式：

$$|y(t,\varepsilon)-u(t)| \leqslant c_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\, t\right]+c_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}\exp\left[\sqrt{\frac{m}{\varepsilon}}\,(t-1)\right]+\frac{M}{m}\varepsilon \tag{2.4}$$

其中正数M，c_1同定理1，c_0同定理2。

对于线性边值条件：

$$a_0y(0)+b_0y'(0)=A_0(\varepsilon),\quad a_1y(1)+b_1y'(1)=A_1(\varepsilon) \tag{2.5}$$

其中a_i，b_i $(i=0,1)$是常数，$a_i^2+b_i^2>0$，而$A_i(\varepsilon)$是$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$上任意的连续函数。只须取

$$\left.\begin{aligned} L(u,v,\varepsilon)&=s(-a_0,b_0)[a_0u+b_0v-A_0(\varepsilon)]\\ R(u,v,\varepsilon)&=s(a_1,b_1)[a_1u+b_1v-A_1(\varepsilon)]\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

其中$s(a,b)$是符号函数。当$b\neq 0$时$s(a,b)=\mathrm{sign}\,b$；当$b=0$时，$s(a,b)=\mathrm{sign}\,a$。这时$L(u,v,\varepsilon)$，$R(u,v,\varepsilon)$满足条件Ⅲ，而且当$b_0\neq 0$时满足条件IV_0，当$b_0=0$时，满足条件V_0，当$b_1\neq 0$时满足条件IV_1，当$b_1=0$时满足条件V_1。于是从定理1～4特别可得

定理5 假设条件Ⅰ和Ⅱ成立，则当$\varepsilon>0$充分小时，Robin边值问题(1.1)，(2.5)有解$y(t,\varepsilon)$满足不等式(2.1)～(2.4)之一。详言之，当$b_0\neq 0$，$b_1\neq 0$时满足(2.1)，当$b_0=b_1=0$时，满足(2.2)，当$b_0\neq 0$，$b_1=0$时满足(2.3)，当$b_0=0$，$b_1\neq 0$时满足(2.4)。

三、唯一性

为了保证边值问题(1.1)，(1.2)之解的唯一性，对$L(u,v,\varepsilon)$和$R(u,v,\varepsilon)$仅仅作条件Ⅲ成立的假设显然是不够的，我们补充假设：

Ⅵ．对任意$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$和任意$u_1,u_2,v_1,v_2$成立：

$$L(u_1,v_1,\varepsilon)\neq L(u_2,v_2,\varepsilon),\ \text{当}u_1<u_2,\ v_1>v_2\text{时},$$
$$R(u_1,v_1,\varepsilon)\neq R(u_2,v_2,\varepsilon),\ \text{当}u_1<u_2,\ v_1<v_2\text{时}.$$

引理2 假设条件Ⅰ～Ⅲ，Ⅵ成立，则边值问题(1.1)，(1.2)的解唯一。

证明 用反证法，假设$y_1(t)$和$y_2(t)$是边值问题(1.1)，(1.2)的两个相异解，记

$$z(t)=y_2(t)-y_1(t)$$

则$z=z(t)$是方程

$$\varepsilon z''=\left(\int_0^1 f_y(t,y_1(t)+\theta z(t),\varepsilon)d\theta\right)z \tag{3.1}$$

的非零解. 它在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上必定或取正的最大值，或取负的最小值. 不失一般性，假设$z(t)$在$t_0\in[0,1]$处取到正的最大值. 首先指出，$z'(t_0)\neq 0$. 事实上，因为$z(t_0)>0$，若 $z'(t_0)=0$，则由(3.1)可见$z''(t_0)>0$，即$z(t_0)$不是$z(t)$于$0\leqslant t\leqslant 1$上的最大值，矛盾.

既然$z'(t_0)\neq 0$，这时或者$t_0=0$，或者 $t_0=1$. 于是当 $t_0=0$ 时有 $z(0)>0$，$z'(0)<0$，即$y_1(0)<y_2(0)$，$y_1'(0)>y_2'(0)$，可是却有

$$L(y_1(0),\ y_1'(0),\varepsilon)=0=L(y_2(0),\ y_2'(0),\varepsilon)$$

与条件Ⅵ中的第一式相违；当$t_0=1$时，有$z(1)>0$，$z'(1)>0$，即

$$y_1(1)<y_2(1),\ y_1'(1)<y_2'(1)$$

可是却有

$$R(y_1(1),y_1'(1),\varepsilon)=0=R(y_2(1),y_2'(1),\varepsilon)$$

与条件Ⅵ中的第二式相违，证完.

由引理2知，前面定理1～4中如果加上条件Ⅵ，则边值问题(1.1)，(1.2)的解存在，唯一，且有形如(2.1)～(2.4)之一的估计式. 特别，对线性边值条件(2.5)，若如(2.6)那样改写为边值条件(1.2)，则有

定理6 假设条件Ⅰ，Ⅱ成立，且$a_0b_0\leqslant 0$，$a_1b_1\geqslant 0$，则当 $\varepsilon>0$ 充分小时，Robin边值问题(1.1),(2.5)的解存在，唯一,且满足不等式(2.1)～(2.4)之一. 即当$b_0b_1\neq 0$时满足(2.1)，当$b_0=b_1=0$时满足(2.2)，当$b_0\neq 0$，$b_1=0$时满足(2.3)，当$b_0=0$，$b_1\neq 0$时满足(2.4).

参 考 文 献

[1] Бриш Н. И., О краевых задачах для уравнения $\varepsilon y''=f(x,y,y')$ при малых ε, *ДАН СССР*, XCV, 3 (1954), 429—432.

[2] 章国华、林宗池，半线性系统的Robin边值问题的奇摄动，应用数学和力学，7，9 (1985)，775—779.

[3] Erbe, L. H., Nonlinear boundary value problems for second order differential equations, *J. Differential Equations*, 7 (1970), 459—472.

Boundary Value Problems for Second Order Singularly Perturbed Differential Equations

Zhou Qin-de　Miao Shu-mei

(Jilin University, Changchun)

Abstract

In this paper the existence and uniqueness of solutions of boundary value problems $\varepsilon y''=f(t,y,\varepsilon)$, $L(y(0),\ y'(0),\ \varepsilon)=0$, $R(y(1),\ y'(1),\ \varepsilon)=0$ (which contains the Robin's problem) is discussed by using the upper and lower solution. In addition, the asymptotic estimation of the solution is given as well.