

旋转壳局部几何缺陷对其频率 和振型的影响

卢文达 高世桥

(上海市应用数学和力学研究所, 1986 年 10 月 28 日收到)

摘 要

本文在文献[7]的基础上, 视旋转壳局部几何缺陷为初始位移, 形成了子午向局部几何缺陷的附加刚度阵, 然后用结构摄动的方法分析了其几何缺陷对系统自然频率及振型的影响. 通过算例可知, 子午向局部几何缺陷将引起系统频率升高; 缺陷幅度越大, 频率升高得也越多.

一、前 言

在工程实际中, 象双曲冷却塔这类的旋转壳建筑结构, 由于施工中人为控制误差, 设备精度误差的存在, 不可避免地要使结构产生一些局部的几何偏差, 如半径误差; 局部失圆, 中心漂移等. 一些资料表明^[1], 这样的几何偏差是引起某些冷却塔倒塌的主要原因之一. 这样, 就有许多学者对旋转壳缺陷的静力问题进行研究^{[2][3][4][5]}. 但却没有研究缺陷的动力影响. 1980 年, 卢文达^[6]用有限元的方法对子午向几何缺陷的动力问题进行了讨论. 1986 年, 卢文达和高世桥^[7]用初位移的有限元法研究了一般几何缺陷 (非轴对称的) 对系统固有频率的影响. 本文在文献[7]的基本方程基础上, 考虑到附加刚度为一小量, 采用了结构摄动的方法研究子午向几何缺陷对系统固有频率及振型的影响.

二、基 本 方 程

根据文献[7], 把初始几何缺陷视为初始位移, 可以导出子午向几何缺陷引起的单元附加刚度阵 $[\Delta\tilde{K}_k]$ 为:

$$[\Delta\tilde{K}_k] = [A]^T \int_{-1}^1 ([B_k]^T [D] [B'_k] + [B'_k]^T [D] [B_k]) r l dx [A] \quad (2.1)$$

其中: $[A]$ 为常数变换阵; $[D]$ 为弹性阵; $[B_k]$ 为完善壳 (无缺陷) 对应于第 k 阶谐波的单元应变位移关系变换阵; $[B'_k]$ 是几何缺陷引起的 $[B_k]$ 附加阵; 其它符号参见文献[7]. 由[7]可知, $[B'_k]$ 的形式为:

$$[B'_k] = \begin{bmatrix} B'_{11} & B'_{12} & B'_{13} \\ B'_{21} & B'_{22} & B'_{23} \\ B'_{31} & B'_{32} & B'_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

其中

$$B'_{11} = -\frac{[x]_2'}{Rl} (w_0 \sin \varphi + u_0 \cos \varphi)$$

$$- \frac{1}{l^2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \sin \varphi [x]_2' + \frac{1}{l^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \cos \varphi [x]_2'$$

$$B'_{12} = 0$$

$$B'_{13} = \frac{[x]_2'}{Rl} (w_0 \sin \varphi - u_0 \cos \varphi)$$

$$+ \frac{1}{l^2} \frac{\partial u_0}{\partial x} \cos \varphi [x]_2' + \frac{1}{l^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} \sin \varphi [x]_2'$$

$$B'_{21} = 0$$

$$B'_{22} = -\frac{k}{r^2} (w_0 \sin \varphi + u_0 \cos \varphi) [x]_1$$

$$B'_{23} = \frac{1}{r^2} (w_0 \sin \varphi + u_0 \cos \varphi) [x]_2$$

$$B'_{31} = -\frac{k}{r} \left(\frac{\partial u_0}{l \partial x} + \frac{w_0}{R} \right) [x]_2 \sin \varphi + \frac{k}{r} \left(\frac{\partial w_0}{l \partial x} - \frac{u_0}{R} \right) [x]_2 \cos \varphi$$

$$B'_{32} = \frac{1}{rl} (u_0 \cos \varphi + w_0 \sin \varphi) [x]_1' - \frac{1}{rl} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w_0}{\partial x} \sin \varphi \right. \\ \left. - \frac{u_0 l}{R} \sin \varphi + \frac{w_0 l}{R} \cos \varphi \right) [x]_1$$

$$B'_{33} = -\frac{k}{rl} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w_0 l}{R} \right) [x]_2 \cos \varphi + \frac{k}{rl} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{u_0 l}{R} \right) [x]_2 \sin \varphi$$

式中的 u_0 , w_0 为缺陷引起的子午向及法向的初位移, k 为谐波数, 其它符号参见文献 [7] 和 [8] 及附录。

有了缺陷引起的单元附加刚度阵 $[\Delta \tilde{K}_k]$, 就可以求出附加总刚阵 $[\Delta K_k]$, 进而可列出具有缺陷旋转壳系统的自由振动方程为:

$$[M_k] \{\ddot{\alpha}\} + [K_k] \{\alpha\} + [\Delta K_k] \{\alpha\} = 0 \quad (2.3)$$

其中: $[M_k]$ 为对应第 k 阶谐波的总质阵, $[K_k]$ 为相应的总刚阵 (指完善壳), $\{\alpha\}$ 为推广位移列阵。

从 (2.2) 式分析可见, 当缺陷幅度较小时, w_0 及 u_0 相对 r 为一小量, 从而可知 $[\Delta K_k]$ 的每一元素相对 $[K_k]$ 的元素为小量。

三、摄动求解

在进行摄动求解时,根据Stetson^[4]理论,若附加刚度(或质量)为小参量,则它所引起的自然频率及其振型的变化也都为小量,故可以令:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega}_n &= \omega_n + \Delta\omega_n \\ \hat{\phi}^{(n)} &= \varphi^{(n)} + \Delta\varphi^{(n)} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $\hat{\omega}_n$ 为有附加刚度时的第 n 阶自然频率, ω_n 为无附加刚度时的频率, $\Delta\omega_n$ 为附加刚度所引起的频率改变(这里均取一阶近似), $\hat{\phi}^{(n)}$ 为有附加刚度时的第 n 阶振型, $\varphi^{(n)}$ 为无附加刚度时的振型, $\Delta\varphi^{(n)}$ 为振型的改变。

由特征值理论可知,系统的特征方程为:

$$[\hat{K}]\hat{\phi} = \Omega[\hat{M}]\hat{\phi} \quad (3.2)$$

其中: $[\hat{K}] = [K] + [\Delta K]$, $[\hat{M}] = [M] + [\Delta M]$, $\Omega = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1^2 \\ \vdots \\ \hat{\omega}_n^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$

对于本文的问题, $[\Delta M] = 0$, 故上式可写成:

$$([K_k] + [\Delta K_k])\hat{\phi} = \Omega_k[M_k]\hat{\phi} \quad (3.3)$$

式中的下标 k 代表第 k 阶谐波。

用 $\hat{\phi}^{T(n)}$ 左乘(3.3)式两端,并取一阶近似可得

$$(\omega_n^2 + 2\omega_n\Delta\omega_n)\bar{m}_n = \bar{k}_n + \Delta k_n \quad (3.4)$$

其中

$$\bar{m}_n = \phi^{T(n)}[M_k]\phi^{(n)}, \quad \bar{k}_n = \phi^{T(n)}[K_k]\phi^{(n)}, \quad \Delta k_n = \phi^{T(n)}[\Delta K_k]\phi^{(n)}.$$

注意到: $\bar{m}_n\omega_n^2 = \bar{k}_n$, 则(3.4)式可简化成:

$$2\omega_n\Delta\omega_n\bar{m}_n = \Delta\bar{k}_n \quad (3.5)$$

令 $\xi_n = \Delta\omega_n/\omega_n$, 称为频率的改变率, 则由(3.5)式可得:

$$\xi_n = \frac{\Delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{1}{2} \frac{\Delta k_n}{\bar{k}_n} \quad (3.6)$$

由上式可知,只要知道几何缺陷引起的附加刚度,再得到完善壳系统的振型 $\phi^{(n)}$,就可以知道几何缺陷对系统自然频率的影响。

进一步,设 $\hat{\phi}^{(n)} = \sum_m C_{nm}\phi^{(m)}$, 且 $C_{nn} = 1$, 则利用振型的正交条件:

$$\hat{\phi}^{T(n)}[M_k]\hat{\phi}^{(m)} = 0 \quad (n \neq m \text{ 时}) \quad (3.7)$$

精确到一阶,可得:

$$C_{nm}\bar{m}_n + C_{nm}\bar{m}_m = 0 \quad (3.8)$$

再利用正交条件: $\hat{\phi}^{T(n)}([K_k] + [\Delta K_k])\hat{\phi}^{(m)} = 0$ ($n \neq m$), 同样的道理有:

$$C_{mn}\bar{k}_n + C_{nm}\bar{k}_m + \Delta k_{nm} = 0 \quad (3.9)$$

其中: $\Delta k_{nm} = \varphi^{T(n)}[\Delta K_k]\varphi^{(m)}$.

联立(3.8)式和(3.9)式,可解得:

$$C_{nm} = -\Delta k_{nm}\bar{m}_n / (\bar{m}_n\bar{k}_m - \bar{m}_m\bar{k}_n)$$

或

$$C_{mn} = -\omega_n^2\Delta k_{nm}/\bar{k}_m / (\omega_n^2 - \omega_m^2) \quad (n \neq m) \quad (3.10)$$

系数 C_{nm} 可以从两个方面反映出系统振型的变化。首先, C_{nm} 相对 $C_{nn} = 1$ 的大小可反映

映出振型 $\varphi^{(n)}$ 受缺陷影响的程度。其次 $C_{nm}(m \neq n, m=1, 2, \dots)$ 各参数之间的相对大小可反映出振型向哪一种模态变化的趋势强。为了明确起见,令当 n 为一定时, $\mu_n = \max_m [C_{nm}]$ 为程度指数, $\eta_n = [m | C_{nm} = \mu_n]$ 为趋势指数。其含义分别为: μ_n 是 $C_{nm}(m \neq n, m=1, 2, \dots)$ 中的最大者; η_n 是对应 $C_{nm} = \mu_n$ 时指标 m 的值。

四、算例结果与分析

本文用上述结构摄动的方法对如图1所示的具有子午向局部几何缺陷的双曲冷却塔旋转壳进行了计算。冷却塔的结构尺寸为:塔高90米,喉部高度为72米,进风口标高为5.8米,塔壳中面的曲线方程为 $r^2 = b^2 + az^2$,其中的参数 $a=0.177, b=19.4$ 米,壳厚按指数规律变化,其最小和最大厚度及指数为: $h_{min}=0.14$ 米; $h_{max}=0.5$ 米; $\eta=2.0$ 。

冷却塔的材料参数为:泊松比 $\nu=0.167$;弹性模量 $E=2700000T/m^2$;容重为: $\gamma=2.4T/m^3$ 。

几何缺陷的参数为:几何缺陷的中心位于距塔底45米处,缺陷的波长为 $H=4$ 米,缺陷的幅度分别为 $w_0=0.055$ 米, $w_0=0.105$ 米,和 $w_0=0.205$ 米三种情况。

计算的结果列于表1至表5中。表1是完善双曲旋转壳的各阶自然频率,从表中可以看出,最低频发生在第三谐波处,其值为0.89057Hz。

表2,表3和表4分别为对应于 $w_0=0.055$ 米, $w_0=0.105$ 米和 $w_0=0.205$ 米的几何缺陷所引起的各阶自然频率的改变率 ξ_n 。有了 ξ_n 就可以计算出有缺陷时的自然频率。例如: $w_0=0.205$ 米几何缺陷所引起的最低频率改变率为: $\xi_n=0.1465$,则由(3.6)式可求得有缺陷时的该阶频率为1.02104Hz。从而可以得知,局部几何缺陷的存在将使系统的自然频率升高,这一点从其它各阶频率的改变情况亦可以看出。

表5给出了 $w_0=0.105$ 米的几何缺陷对系统振型影响的程度指数 μ_n 和趋势指数 η_n 。从表中可以发现,对于低阶谐波,几何缺陷的作用是使振型向相邻模态的变化趋势较强,但对于高阶谐波的高阶振型,情况有些差别。

最后从表2,表3和表4的数据可以看出,随着缺陷幅度的增加, ξ_n 也在增加,从而可以知道,缺陷的幅度越大,使系统自然频率升高得越高。

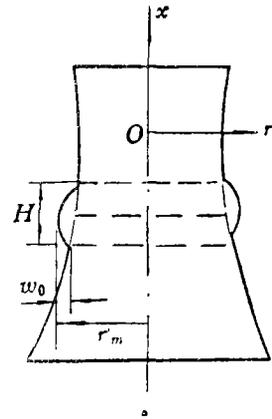


图1 具有几何缺陷的冷却塔

表1 人支柱支承的完善双曲壳的自然频率(Hz)

自然频率 振型阶数	谐波数				
	1	2	3	4	
1	1.69791	1.12065	0.89057	1.01656	
2	2.03602	1.89006	1.37657	1.37857	
3	10.1755	4.77161	2.68300	2.51478	
4	13.3654	9.48751	5.38425	3.24387	

应用数学学报

表 2 几何缺陷引起的自然频率改变率($w_0=0.055m$)

谐波数 ξ_n	谐波数			
	1	2	3	4
振型阶数				
1	0.00004	0.0013	0.0105	0.0284
2	0.00003	0.0005	0.0019	0.0121
3	0.00004	0.0005	0.0015	0.0008
4	0.00005	0.0004	0.0014	0.0047

表 3 几何缺陷引起的自然频率改变率($w_0=0.105m$)

谐波数 ξ_n	谐波数			
	1	2	3	4
振型阶数				
1	0.0001	0.0046	0.0384	0.1034
2	0.0001	0.0016	0.0068	0.0443
3	0.0001	0.0018	0.0058	0.0030
4	0.0002	0.0013	0.0050	0.0017

表 4 几何缺陷引起的自然频率改变率($w_0=0.205m$)

谐波数 ξ_n	谐波数			
	1	2	3	4
振型阶数				
1	0.0006	0.0177	0.1465	0.3943
2	0.0005	0.0063	0.0259	0.1687
3	0.0005	0.0068	0.0223	0.0113
4	0.0007	0.0049	0.0192	0.0653

表 5 几何缺陷引起振型改变的程度指数 μ_n 和趋势指数 η_n ($w_0=0.105m$)

振型阶数	μ_n	η_n	谐波数					
			1	2	3	4		
1	0.00026	2	0.0034	3	0.0570	2	0.1341	2
2	0.00026	1	0.0317	1	0.0570	1	0.1341	1
3	0.00079	4	0.0034	1	0.0279	1	0.0281	1
4	0.00144	5	0.0021	6	0.0049	2	0.0497	1

符号对照表

- R ——旋转壳子午向曲率半径;
- l ——单元弧长;
- ϕ ——子午线法向与轴向的夹角;
- r ——旋转壳中面截圆半径;
- u_0 ——描述几何缺陷的子午向初位移;
- w_0 ——描述几何缺陷的法向位移;
- x ——局部子午向坐标;
- k ——谐波阶数;
- $[x]_n = [1, x, x^2, \dots, x^{(n+1)-1}]$;
- $[x]_n^m = \frac{d^m}{dx^m} [x]_n$.

参 考 文 献

- [1] Report of the Committee of Inquiry into the Collapse of the Cooling Tower at Ardeer Nylon Works, Ayrshire on Thursday, 27th September 1973, Engineering Services Department, Imperial Chemical House, Millbank, London SW1P 3JF.
- [2] Croll, J. G. A. and K. O. Kemp, Specifying tolerance limits for meridional imperfections in cooling tower, *ACI Journal*, January (1979), 139—159.
- [3] Kato Shiro and Yoshitsura Yokoo, Effect of geometric imperfections on stress distributions in cooling tower, *Eng. Struct.*, 2, July (1980), 150—156.
- [4] Croll, J. G. A., F. Kaleli and K. O. Kemp, A simplified approach to the analysis of geometrically imperfect cooling tower shell, *Eng. Struct.*, 1, January (1979), 92—98.
- [5] AL-Dabbagl, Adam and Ajaya K. Gupta, Meridional imperfection in cooling tower design, *Journal of the Structural Division ASCE.*, Vol. 501, No. ST6, Proc. pp. 14636, June (1979), pp. 1089—1102.
- [6] 卢文达等, 轴对称几何缺陷对双曲冷却塔壳体阵风响应的影响, 上海工业大学学报, 3 (1984), 15—28.
- [7] 卢文达、高世桥, 旋转壳局部几何缺陷对其自然频率的影响, 1986年全国第二届计算力学会议论文, 第177号, 上海.
- [8] 北京大学, 《旋转壳的应力分析》, 水利电力出版社出版.
- [9] Stetson, K. A., Perturbation method of structural design relevant to holographic vibration analysis, *AIAA J.*, 13, 4 (1975).

The Effect of Local Geometric Imperfections of Rotational Shell on Its Natural Frequencies and Models

Loo Wen-da Gao Shi-qiao

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

In this paper, an additional stiffness matrix of meridional geometric imperfections was formed by considering the geometric imperfections as initial displacements based on literature[7]. Then, natural frequencies and models of rotational shell with symmetric geometric imperfections were analysed by perturbation method. From the computed example, it was known that the effect of geometric imperfections on frequencies is to increase them, and the larger the range of imperfection, the more the frequencies would be increased.