

# 光粘弹性——粘弹性应力分析的一个实验方法

卡尔-汉斯·雷曼

(德意志联邦共和国柏基切-乌泊特大学, 1986年3月11日收到)

## 摘 要

本文对粘弹性应力分析的光粘弹性实验方法进行了全面的讨论。指出排除试件的收缩和老化效应很重要。为此, 在试验开始前, 将材料加热至60℃且保温三天是个好经验。测量时应有恒温器保持恒温。并指出除了在轴对称问题以外, 用实验测定折射张量的主轴(随时间变化的)还有困难。在逐步加载的精确测量中避免动力效应, 必须将每一阶段的测量时间限在一秒钟内完成。

近年来, 在结构设计的广泛领域内, 粘弹应力分析的理论和应用取得了意义重大的进展, 光粘弹性方法被频繁地用于实验分析, 一些不同的途径已予考虑。关于材料的力学的和光学的响应的某些特殊假定, 例如四参数弹簧阻尼器模型及 Mindlin<sup>[1]</sup> 的线性应变双折射关系已经引入。正如 Pindera<sup>[2]</sup> 所证明的, 这些假定一般并不成立, Dill、Fowlkes 和 Coleman<sup>[3]~[7]</sup> 描述了一种更一般性的理论。基于电-磁关系, 电介质张量和折射张量分别被认为是应力张量历史(假定为一个“衰减记忆”史)的线性函数。

假定 1) 所有场合是准静力的和等温的; 2) 相应于平衡条件的 Lagrange 列式, 位移是小的; 3) 应变张量和折射张量间的关系是线性的, Boltzmann 原理对于笛卡尔坐标系  $x_\alpha$ ,  $\alpha \in [1, 2]$  的二维问题有

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(t) &= C_N^*(t) N_{12}(0^+) + \int_{0^+}^t C_N^*(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} N_{12}(\tau) d\tau \\ \sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t) &= C_N^*(t) [N_{11}(0^+) - N_{22}(0^+)] \\ &\quad + \int_{0^+}^t C_N^*(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [N_{11}(\tau) - N_{22}(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $C_N^*(t)$  为光学松弛函数,  $N_{\alpha\beta}$  为折射张量, 折射张量定义为电介质张量的正定方根。折射主轴由  $N_{\alpha\beta}$  的固有矢量给出:

$$\psi_N = \frac{1}{2} \arccot \frac{N_{11} - N_{22}}{2N_{12}} \quad (2)$$

$N_{\alpha\beta}$  的特征值为主方向的折射指数  $n_\alpha$ 。

当双折射  $\Delta$  定义为折射指数之差时, (1) 式最后成为

\* 薛大为推荐。

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{12}(t) &= \frac{1}{2} \left\{ C_N^*(t) \Delta(0^+) \sin 2\psi_N(0^+) \right. \\ &\quad \left. + \int_{0^+}^t C_N^*(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\Delta(\tau) \sin 2\psi_N(\tau)] d\tau \right\} \\ \sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t) &= C_N^*(t) \Delta(0^+) \cos 2\psi_N(0^+) \\ &\quad + \int_{0^+}^t C_N^*(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [\Delta(\tau) \cos 2\psi_N(\tau)] d\tau \end{aligned} \right. \quad (3a)$$

$$\left. \right\} \quad (3b)$$

在光粘弹实验中，等色条纹给出双折射 $\delta(t)$ 的级数。

$$\Delta(t) = \delta(t) \frac{\lambda}{d(t)} \quad (4)$$

且  $\lambda$  为光的波长， $d(t) = d_0[1 + \varepsilon(t)]$ ， $d_0$  为未变形状态的模型厚度。

等倾线作为折射张量的相同主方向的几何轨迹给出 $\psi_N(t)$ 。

当已知实验数据  $\delta(t)$  和  $\psi_N(t)$  后，为了节约中心处理时间和存储容量以便利用微型计算机系统以求解 Volterra 积分方程(3)，Katoná<sup>[8]</sup>提出了一个建议，此建议已被 Bakic<sup>[9]</sup>所证明。由材料试验给出的光学松弛函数 $C_N^*(t)$ 可推广为一指数函数级数

$$C_N^*(t) = C_N^*(0^+) \sum_{\mu=1}^m a_\mu \cdot \exp(-t/b_\mu) \quad (5)$$

亦即，材料的光学响应将由一Maxwell单元的级数来表述。当系数 $a_\mu$ 及 $b_\mu$ 被确定，则

$$\sum_{j=0^+}^k [C_N^* - C_N^*(0^+) \sum_{\mu=1}^m a_\mu \cdot \exp(-t_j/b_\mu)]^2 = \min \quad (6)$$

如在Laplace变换中的卷积是可交换的，则方程(3)变成下列形式

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{12}(t) &= \frac{1}{2} \left\{ C_N^*(0^+) g(t) - \int_{0^+}^t g(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [C_N^*(t-\tau)] d\tau \right\} \\ \sigma_{11}(t) - \sigma_{22}(t) &= C_N^*(0^+) \bar{g}(t) - \int_{0^+}^t \bar{g}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} [C_N^*(t-\tau)] d\tau \end{aligned} \right. \quad (3a)'$$

$$\left. \right\} \quad (3b)'$$

上式用了缩写：

$$g(t) = \Delta(t) \sin 2\psi_N(t), \quad \bar{g}(t) = \Delta(t) \cos 2\psi_N(t)$$

由方程(5)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [C_N^*(t-\tau)] = C_N^*(0^+) \sum_{\mu=1}^m \frac{a_\mu}{b_\mu} \exp(-t/b_\mu) \exp(-\tau/b_\mu) \quad (7)$$

将上式代入方程(3a, b)'，得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12}(t_n) &= \frac{1}{2} C_N^*(0^+) \left\{ g(t_n) - \sum_{\mu=1}^m \frac{a_\mu}{b_\mu} \exp(-t_n/b_\mu) \mathcal{F}_{1\mu}(t_n) \right\} \\ \sigma_{11}(t_n) - \sigma_{22}(t_n) &= C_N^*(0^+) \left\{ \bar{g}(t_n) - \sum_{\mu=1}^m \frac{a_\mu}{b_\mu} \exp(-t_n/b_\mu) \mathcal{F}_{2\mu}(t_n) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

积分

$$\mathcal{F}_\mu(t_n) = \int_{0^+}^{t_n} g(\tau) \exp(\tau/b_\mu) d\tau \quad (9)$$

由递推公式给出:

$$\mathcal{F}_\mu(t_n) = \mathcal{F}_\mu(t_{n-1}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} g(\tau) \exp(\tau/b_\mu) d\tau \quad (10)$$

如果任意区间  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  足够小且  $g(\tau) \exp(\tau/b_\mu)$  对于时间的微分可看成是近似线性的, 则方程(10)成为

$$\mathcal{F}_\mu(t_n) = \mathcal{F}_\mu(t_{n-1}) + \frac{1}{2} \left[ g(t_n) \exp(t_n/b_\mu) - g(t_{n-1}) \exp(t_{n-1}/b_\mu) \right] \Delta t_n \quad (10)'$$

一般而论, 应力张量主轴并不与折射张量主轴一致, 但根据前述假定且因与时间相关的应力状态也应使其满足任一时刻  $t_n$  时的平衡条件, 故应力张量的主方向由

$$\psi_\sigma(t) = \frac{1}{2} \text{arc cot} \frac{\bar{g}(t) - \sum_{\mu=1}^m \frac{a_\mu}{b_\mu} \exp(-t/b_\mu) \mathcal{F}_{2\mu}(t)}{g(t) - \sum_{\mu=1}^m \frac{a_\mu}{b_\mu} \exp(-t/b_\mu) \mathcal{F}_{1\mu}(t)} \quad (11)$$

给出.

为了全面评价应力状态, 可应用剪应力差法<sup>[10]</sup>, 此外, 重建算法<sup>[11]</sup>更便于从实验给出的边值确定应力张量的第一不变量  $\sigma_{\gamma\gamma} = \sigma_{11} + \sigma_{22}$ . 根据第二边值问题的 Dirichlet 定理, Laplace 方程  $\nabla^2 \sigma_{\gamma\gamma} = 0$  的解为

$$\sigma_{\gamma\gamma}(x_\alpha) = \oint_{\Gamma} w_\alpha [ (\bar{\sigma}_{\gamma\gamma})_\alpha^+ \cdot h_\alpha + (\bar{\sigma}_{\gamma\gamma})_\alpha^- \cdot h_\alpha ] d\varphi + \sigma_{\gamma\gamma}^0(x_\alpha) + \oint w_{\gamma\gamma} d\varphi \quad (12)$$

(不对  $\alpha$  求和)

其中(图1)

$$\begin{aligned} w_\alpha &= (+\xi_\alpha \cdot -\xi_\alpha)^{-1} \\ \pm h_\alpha &= \mp \xi_\alpha (+\xi_\alpha + -\xi_\alpha)^{-1} \\ (\bar{\sigma}_{\gamma\gamma})^\Gamma &= (\sigma_{\gamma\gamma})^\Gamma - (\sigma_{\gamma\gamma}^0)^\Gamma \end{aligned}$$

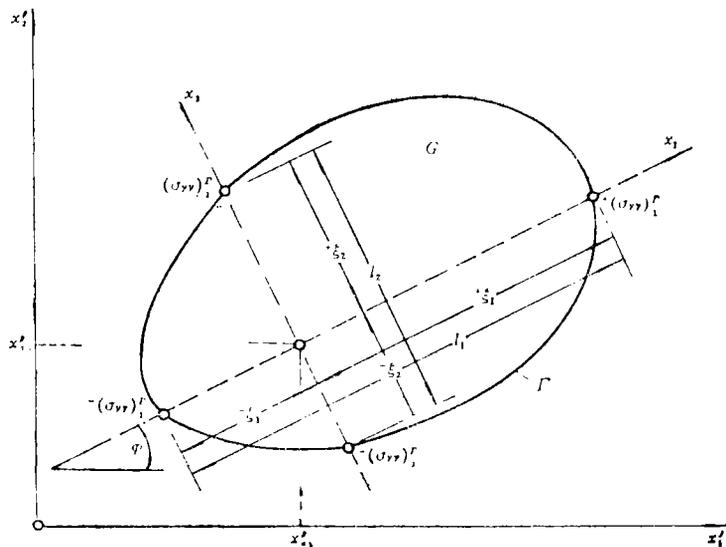


图 1

而  $\sigma_{11}^0$  表示半平面内应力状态的第一不变量, 作为计及作用于二维单连通模型边界上的外力的特解。

光学松弛函数  $C_N^*(t)$  可由单向拉伸试验或剪切试验所确定的光学蠕变柔度来确定[亦即, 变换此蠕变柔度为松弛函数, 正如在 Laplace 变换中有关系<sup>[12][9]</sup>

$$C_N^*(p)C_N^*(p) = p^{-2} \quad (13)$$

或由一维拉伸试验直接确定  $C_N^*(t)$ 。正如对于绝大多数光粘弹性材料所已证明过的<sup>[13]</sup>, Poisson 比可假定为不与时间  $t$  相关而认为是常量。在试验过程中用一控制系统(图 2)以保持应变  $\varepsilon_{11} = \text{const}$  为常量, 则拉应力为

$$\sigma_{11}(t) = P(t) - \frac{1}{A_0[1 - \nu\varepsilon_{11}(\sigma)]^2} \quad (14)$$

且双折射

$$\Delta(t) = \delta(t) \frac{\lambda}{d_0[1 - \nu\varepsilon_{11}(0)]} \quad (15)$$

将方程(14)及(15)代入方程(3b)'并考虑到  $\sigma_{22}(t)$  及  $\psi_n(t)$  将为零, 可引出计算松弛函数的递推公式

$$C_N^*(t_n) = \frac{2}{2\delta(0^+) + \Delta\delta_n} \left\{ \left[ \lambda \cdot b_0 [1 - \nu\varepsilon_{11}(0^+)] \right]^{-1} \cdot P(t_n) - \frac{1}{2} C_N^*(0^+) \Delta\delta_1 - \frac{1}{2} \sum C_N^*(t_i) [\Delta\delta_i + \Delta\delta_{i+1}] \right\} \quad (16)$$

$$\Delta\delta_i = \delta(t_n - t_{i-1}) - \delta(t_n - t_i)$$

为了研究光粘弹性问题及光粘弹性效应, 可采用不同的高分子聚合物。力学的响应正如光学的响应一样可假定为线性粘弹性的<sup>[14]</sup>。在由 Bakic<sup>[9]</sup>所完成的实验中, 改进了的光粘弹模型材料, 采用较硬的 HY951 和二种不同的增塑剂 ARALDITE CY208 和 THIOKOL LP3 混合于环氧树脂 ARALDITE F 中来得到。为了正确且连续地就时间  $t$  测量拉伸松弛试验中的条纹级数, 采用了圆偏振的氦氖激光, 其光强已由光倍增管量出。

为了立即校核试验结果, 已经提取出相似的输出讯号。按前述公式, 试验结果数字化后已输入计算机存储库。

主要问题在于确定等倾线即测量折射张量的主方向  $\psi_N(t_n)$ 。根据大量的研究可以证实: 由于主方向只有微小的变化, 故角  $\psi_N(t_n)$  可由在开始时的时间  $t_A$  时的数值至临近测量过程未了的时间  $t_B$  时的数值的对数插值来确定。

$$\psi_N(t_n) = \psi_N(t_A) + [\psi_N(t_B) - \psi_N(t_A)] \log_{t_A}^{t_n} \left( \log_{t_A}^{t_B} \right)^{-1} \quad (17)$$

图 3 中示出了与时间相关的等色线条纹及其含有的一等倾线, 这些结果取自一个置于流动地基上的板的内应力状态的实验分析, 一些计算过程见图 4。

作为结论, 某些实践经验和结果叙述如下:

1. 混合、浇铸和加工试件及模型, 完成材料试验及特定试验应在尽可能短的时间内甚至是同时进行以排除收缩及老化效应。为了在试验开始前加速收缩和老化, 将材料加温至  $60^\circ\text{C}$  且保温三天是个好经验。

2. 测量时要注意绝对保持温度为常数甚至辐射影响也必须避免。所以在试验装置中介绍了恒温器的应用。

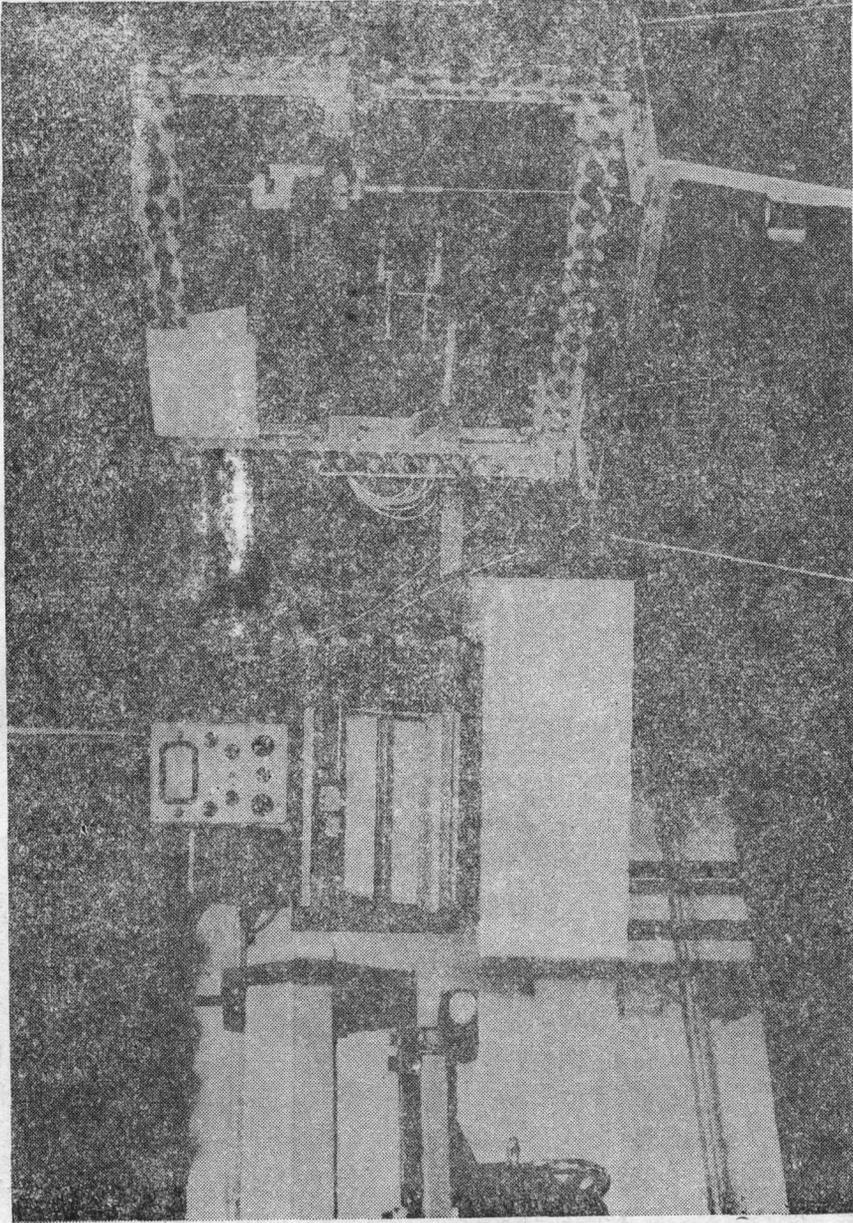


图2 材料试验设备

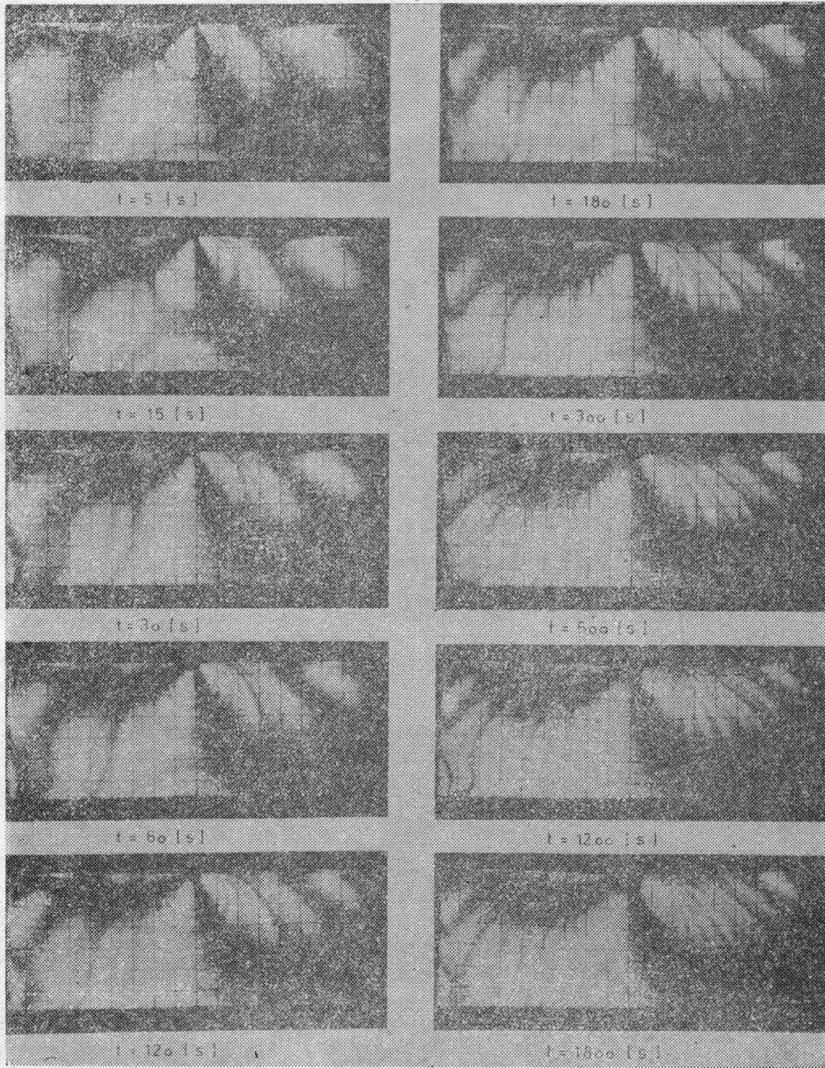


图3 流动地基上的面内受载板

3. 尽管对于确定作为时间的函数的等倾线角亦即用实验测定折射张量的主轴作了许多尝试,但它仍是一个尚未完满解决的问题。如果人们限于估价相应模型的依赖于时间的沿对称轴或沿不受外载的边界处的应力状态,则不会有什么困难存在。

4. 另一个问题是如何去逐步加载和精确测量(在 $t=0$ 时)。为避免动力效应,正如对模型分析一样,实验中的加载必须在有限时间间隔例如一秒钟内完成。

已经就理论上如何研讨加载函数作了很好的工作。但是在实验进行中的前两秒钟内,如何精确地观察和记录力学的和光学的现象仍有困难。正如由一系列特有实验所证明了的,精确性和可靠性并未随附加的数学上的耗费而增加。对于高分子材料的衰减记忆,可忽略前述问题,因为这对光粘弹实验结果上的影响,除了在 $t \approx 0^+$ 的附近以外是可以忽略的。

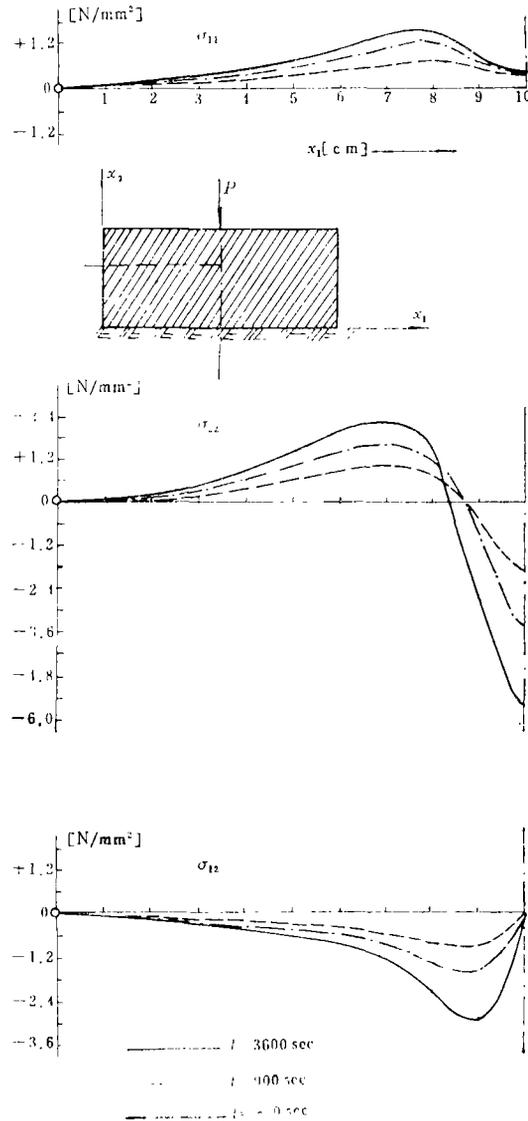


图 4

## 参 考 文 献

- [1] Mindlin, R. D., A mathematical theory of photoviscoelasticity, *J. of Appl. Physics*, 20, 2 (1949).
- [2] Pindera, J. T., Remarks of properties of photoviscoelastic model materials, *Exp. Mechanics*, 6 (1966).
- [3] Dill, E. H., Photoviscoelasticity, *Proc. Fourth Symp. on Naval Structural Mechanics, Mechanics and Chemistry of Solid Propellants*, Pergamon Press (1965).
- [4] Dill, E. H., Photoviscoelasticity, J. Kestens (editor): *The Photoelastic Effect and Its Applications*, Springer-Verlag (1975).
- [5] Dill, E. H. and C. Fowlkes, Photoviscoelastic Experiments, *The Trend in Engineering*, 7 (1964).

- [ 6 ] Coleman, B. D. and E. H. Dill, Theory of induced birefringence in materials with memory, *J. Mech. Phys. Solids*, **19** (1971).
- [ 7 ] Coleman, B. D. and E. H. Dill, Photoviscoelasticity theory and practice, J. Kestens (editor): *The Photoelastic Effect and Its Applications*, Springer-Verlag (1975).
- [ 8 ] Katona, M. G., Combo viscoplasticity: an introduction with incremental formulation, *Computers and Structures*, **11** (1980).
- [ 9 ] Bakic, A., Über die rechnerische und experimentelle Bestimmung des Spannungszustandes in elastisch gebetteten Scheiben unter Berücksichtigung viskoelastischen Materialverhaltens, *Diss. Berg. Universität GH Wuppertal* (1984).
- [10] Frocht, H. M., *Photoelasticity*, Vols. 1 and 2, John Wiley and Sons, Inc. (1949), (1948).
- [11] Laermann, K. -H., Rekonstruktion innerer Verformungs- und Spannungszustände aus experimentell bestimmten Oberflächenverformungen, *VDI-Berichte Nr.*, 514, VDI-Verlag Düsseldorf (1984).
- [12] Laermann, K. -H., Problems in application of photoviscoelasticity in practical experimental stress analysis, *Berichte: Labor Für Experimentelle Spannungsanalyse und MoBtechnik*, Berg. Univ. GH Wuppertal (1984).
- [13] Weber, H., Formulierung rheo-optischer Gesetze und deren Anwendung zur experimentellen Analyse ebener Spannungs- und Deformationszustände in Kunststoffbauteilen, *DFG-Forschungsbericht* (1981).
- [14] Theocaris, P. S., A review of the rheo-optical properties of linear high polymers, *Exper. Mech.*, **5** (1965).

## Photoviscoelasticity—an Experimental Method in Viscoelastic Stress Analysis

Karl-Hans Laermann

(Bergische Universität-Gesamthochschule Wuppertal, West Germany)

### Abstract

In this paper, the photoviscoelasticity method of viscoelastic stress analysis has been discussed in detail. It is shown that, in order to avoid the effects of shrinkage and aging in the test specimens, it is suggested that the specimens should be tempered for three days at a temperature of 60° C before starting the experiments, and the temperature filtering arrangement is recommended in the experimental setups to keep the temperature absolutely constant. Besides the axi-symmetrical time-dependent stress state, the determination of the principle axes of the refraction tensor experimentally remains an unsufficiently solved problem. To avoid dynamic effect in the stepwise loading, the time of measurement in every step should be limited in about one second.